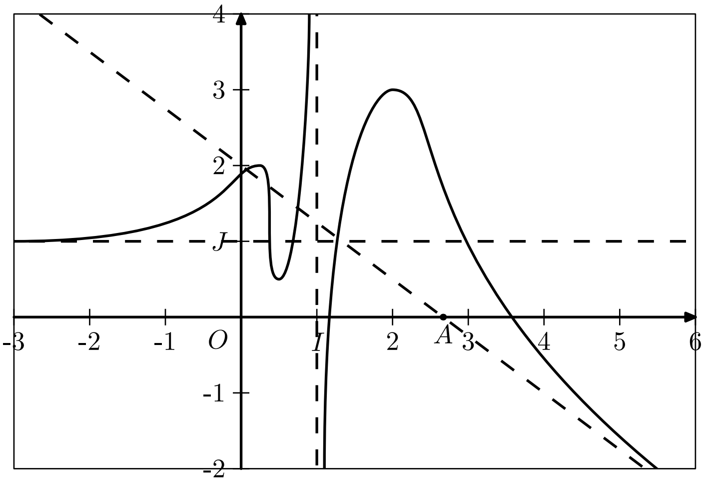
Terminale S/Encore de l'analyse

1. Asymptote oblique :

Exercice 3356

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on a représenté la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-3\,;6]\backslash\{1\}$



Les asymptôtes à la courbe $\mathscr{C}_f$ sont représentés en pointillées.

1. Préciser la nature et l'équation de chacune des asymptôtes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Donner la valeur de chacune des limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$

Exercice 3774

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x+2-\frac{4\cdot e^x}{e^x+3}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$ d'unité graphique $2\,cm$.

1. a. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   b. Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$

2. a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :
$$f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

   b. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

   Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. On rappelle que l'unité graphique choisie est $2\,cm$.

Exercice 6175

On considère trois fonctions f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par les relations :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{2\cdot x-1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad h(x) = \frac{2\cdot x^2+x}{5\cdot x}$$

On donne ci-dessous un tableau de valeurs pour chacune des fonctions :

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2{,}1}{3{,}01}$	$\frac{2{,}01}{3{,}0001}$	$\frac{2{,}001}{3{,}000001}$	$\frac{2{,}0001}{3{,}00000001}$

x	0,01	0,0001	0,000001
$g(x)$	$\frac{-0{,}98}{0{,}1}$	$\frac{-0{,}9998}{0{,}01}$	$\frac{-0{,}999998}{0{,}001}$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$h(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{0{,}12}{0{,}5}$	$\frac{0{,}0102}{0{,}05}$	$\frac{0{,}001002}{0{,}005}$	$\frac{0{,}00010002}{0{,}0005}$

Remarquez que, dans chaque tableau, les valeurs de x "*progressent lentement*" vers 0.

1. a. Pour chaque tableau et à l'aide de la calculatrice, observer la progression des valeurs approchées de ces quotients.

   b. Dans chaque cas, faire une conjecture sur la valeur limite de ces images lorsque :
   "*x tend vers 0 par des valeurs supérieures à 0*"
   Pour la fonction f, cette valeur se note :
   $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\x>0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)$

2. A l'aide de votre calculatrice, tracer les courbes représentatives de ces fonctions et observer la courbe au "*voisinage*" de l'axe des ordonnées.

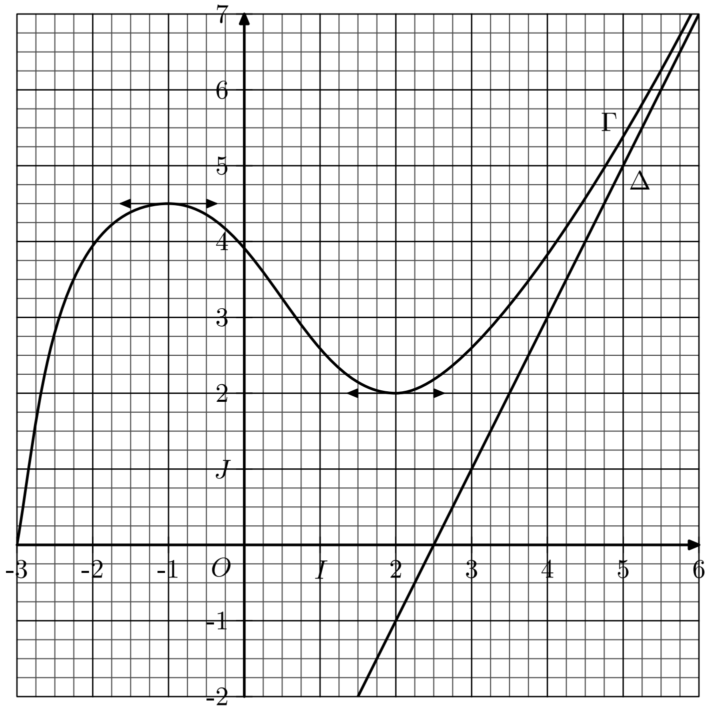
Exercice 3306

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3\,;-1]$ et $[2\,;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $\big[-3\,;+\infty\big[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,\big)$.

Elle passe par le point $A(-3\,;0)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=2x-5$



Les réponses ne seront pas justifiées.

Notation : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

1. L'équation $f(x)=4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $\big[-3\,;+\infty\big[$.

2. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$

3. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \Big|f(x)-(2x-5)\Big| = +\infty$.

4. $f'(0)=1$

5. $f'(x)>0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\big[-2\,;1\big]$

Exercice 3581

Soit f a fonction définie sur $\big]0\,;+\infty\big[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2{\cdot}x}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$.

1. a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $\big]0\,;+\infty\big[$.

   b. Préciser les équations des asymptotes de $\mathscr{C}$ *(pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera* $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\Big(f(x)-\frac{x}{\sqrt{3}}\Big)$*).*

   c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. a. Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y=m$. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$.

   b. Pour tout $m>\sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que, quand m décrit l'intervalle $\big]\sqrt{2}\,;+\infty\big[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}{\cdot}y$.

2. Parité :

Exercice 3315

Etudier la parité des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = \big(x-1\big){\cdot}\big(x+1\big)$ b. $g(x) = 3x^3-2x$

c. $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ d. $j(x) = \cos\big(3{\cdot}x^3\big)$

Exercice 3316

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par :
   $f(x) = 2x^2+4x-1$
   On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

   a. Soit h un nombre réel. Déterminer les expressions simplifiées en fonction de h de :
   $f(-1-h)$; $f(-1+h)$

   b. En déduire une propriété géométrique de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ définie par :
   $$g(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$
   Justifier que la courbe $\mathscr{C}_g$, représentative de la fonction g, admet le point de coordonnée $(1\,;1)$ pour centre de symétrie.

Exercice 3366

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{3x^3+4x^2-5x+4}{4(x^2+1)}$$
Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer la valeur des réels a, b, c vérifiant la relation :
   $$f(x) = a{\cdot}x+b+\frac{c{\cdot}x}{x^2+1}$$

   b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique (Δ) dont on précisera l'équation.

   c. Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (Δ).

2. Etablir que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet le point de coordonnée $(0\,;1)$ comme centre de symétrie.

3. a. Etablir que la dérivée f' de la fonction f admet pour dérivée :

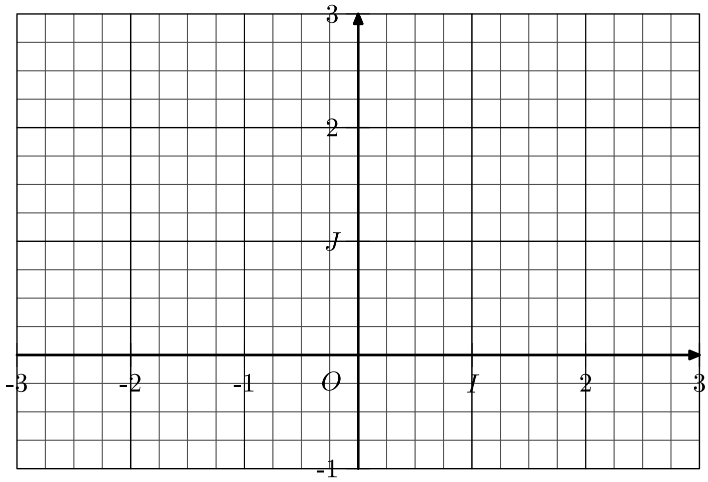
$$f'(x) = \frac{(x^2+5)(3x^2-1)}{4(x^2+1)^2}$$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

On admettra les deux résultats suivants :

- $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0{,}57$
- $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 1{,}43$

4. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$.



Exercice 3609

1. Justifier que la fonction suivante est paire :
   $f:\ x \longmapsto e^x + e^{-x}$
2. Justifier que la fonction suivante est impaire :
   $g:\ x \longmapsto e^x - e^{-x}$

Exercice 3611

Etablir les égalités suivantes :

a. $\dfrac{2+3\cdot e^x+e^{2x}}{e^{2x}} = 2\cdot e^{-2x} + 3\cdot e^{-x} + 1$

b. $(e^x+1)^2 - (e^x-1)^2 = 4\cdot e^x$

c. $\dfrac{e^{3x}+2}{e^{3x}-1} = \dfrac{1+2\cdot e^{-3x}}{1-e^{-3x}}$ d. $\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{e^{3x}+e^{2x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{(e^x+1)^2}$

Exercice 3985

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\cdot e^x}{e^x+3}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

On note I le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\ln 3$. Montrer que le point I est le centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 4221

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}\cdot\left(|x|-1\right)^2$$

1. Etudier la parité de la fonction f.
2. Montrer que cette fonction est la densité d'une loi de probabilité sur $[-1\,;1]$.

Exercice 4300

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{4\cdot e^x}{e^x+7}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) = \dfrac{4}{1+7\cdot e^{-x}}$
2. Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7\,;2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point I.

3. *Composée de fonctions :*

Exercice 3308

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

1. a. Déterminer la forme factorisée de l'expression $f(x)$.

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (On indiquera également les deux racines de la fonction f)

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
Variation de g	-1 ↗	1 ↘	-3 ↗	$+\infty$

a. Faire une conjecture sur la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}(g\circ f)(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty}(f\circ g)(x)$$

b. Justifier que la fonction $f\circ g$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

c. Justifier et préciser la monotonie de la composée $g\circ f$ sur chacun des deux intervalles suivants :

$]-\infty\,;-3]$; $[-3\,;1]$

4. Equations différentielles :

Exercice 3646

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vérifiant pour tout nombre réel x strictement positif :
$$xf'(x)-f(x)=x^2{\cdot}e^{2x}$$
Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$
Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :
$$g'(x)=e^{2x}$$
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$$h(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{e}{2}x$$
Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de $h(x)$.

Exercice 3685

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=\frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}$$
Vérifier que f est solution de l'équation différentielle :
$$y'+y=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}$$

Exercice 3686

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=e^{-2x}{\cdot}\ln\left(1+2{\cdot}e^x\right)$$
On considère l'équation différentielle :
$$(E):\ y'+2{\cdot}y=2{\cdot}\frac{e^{-x}}{1+2{\cdot}e^x}$$

1. Vérifier que la fonction f est solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi-f$ est solution de l'équation différentielle :
$(E'):\ y'+2y=0$.
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Exercice 3688

On appelle (E) léquation différentielle :
$$y''-y=0,$$
où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Déterminer les réels r tels que la fonction h, définie par $h(x)=e^{r\cdot x}$, soit solution de (E).
2. Vérifier que les fonction φ définies par $\varphi(x)=\alpha{\cdot}e^x+\beta{\cdot}e^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des solutions de (E). On admet qu'on obteint ainsi toutes les solutions de (E).
3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2\,;\dfrac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\dfrac{5}{4}$.

Exercice 4304

On considère les deux équations différentielles :
$$(E):\ y'+y=e^{-x}$$
$$(E'):\ y'+y=0$$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x)=x{\cdot}e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E').
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, la fonction $v-u$ est solution de l'équation différentielle (E').
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0)=2$.

5. Equations différentielles : annales :

Exercice 3173

Les parties A et B sont indépendantes.
Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t *(exprimé en années à partir de l'origine 2000)*.

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :
$$(E):\ y'=-\frac{1}{20}{\cdot}y{\cdot}(3-\ln y)$$

1. Démontrer l'équivalence suivante :
une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie $f'(t)=-\dfrac{1}{20}f(t)\big[3-\ln\big(f(t)\big)\big]$, pour tout t de $[0\,;+\infty[$
si, et seulement si,
la fonction $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $g'(t)=\dfrac{1}{20}g(t)-\dfrac{3}{20}$
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :
$$(H):\ z'=\frac{1}{20}z-\frac{3}{20}.$$
3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de

$[0\,;+\infty[$:

$$f(t)=\exp\left[3+C\cdot\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$$

(la notation exp *désigne la fonction exponentielle naturelle* $x\longmapsto e^x$ *)*

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t)=\exp\left[3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$$

   a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

   c. Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(t)<0{,}02$.
   Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à ving individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : "*La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas*".

On note M l'évènement "*l'animal est malade*", $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement "*le test est positif*".

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.

2. En déduire $P(T)$.

3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

☐ **Exercice 3244**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$

1. Démontrer que : $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

2. Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Etudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, de l'équation différentielle :

$$(E_1):\ y'=\frac{y}{4}$$

   a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

   b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t=0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est à dire $g(0)=1$.

   c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t *(exprimé en années)* dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2):\ \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4}-\dfrac{\left[u(t)\right]^2}{12}\\ u(0)=1\end{cases}$$

pour tout nombre réel t positif ou nul et où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

   a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t)>0$. On considère, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, la fonction h définie par $h=\dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions.

$$(E_3):\ \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t)+\dfrac{1}{12}\\ h(0)=1\end{cases}$$

   pour tout nombre réel t positif ou nul.

   b. Donner les solutions de l'équation différentielle :

$$y'=-\frac{1}{4}y+\frac{1}{12}$$

   et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

   c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

☐ **Exercice 3247**

On se propose de démontrer qu'il existe une seul fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C):\ \begin{cases} f(-x)\cdot f'(x) = 1 \text{ pour tout nombre réel } x\\ f(0)=-4\end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $g(x)=f(-x)f(x)$

   a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.

   c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

   d. On considère l'équation différentielle (E): $y'=\dfrac{1}{16}y$.
   Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0)=-4$.

2. **Question de cours**

   a. On sait que la fonction $x\longmapsto e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x\longmapsto Ke^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.

   b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 et 0.

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule

fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser qu'elle est cette fonction.

Exercice 3651

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

$(E):\ y'+\big(1+\tan x\big)y=\cos x$

$(E_0):\ y'+y=1$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).

2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et telles que :
   $f(x)=g(x)\cos x$

   Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).

3. Déterminer la solution de f de (E) telle que $f(0)=0$.

Exercice 3674

Les deux parties de cet exercice sont indépendqntes

Partie A :

On considère l'équation différentielle : (E): $y'+y=e^{-x}$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x)=x\cdot e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle :
   $(E):\ y'+y=0$
   Résoudre l'équation différentielle (E').

3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v-u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0)=2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :
$f_k(x)=(x+k)\cdot e^{-k}$
où k est un nombre réel donné. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en :
   $x=1-k$.

2. On note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1-k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y=e^{-x}$.

3. Sur le graphique donné en annexe 1 *(à rendre avec la copie)*, le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les nombres des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe Γ d'équation $y=e^{-x}$.
   - la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $y=(x+k)\cdot e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

   a. Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 *(à rendre avec la copie)*.

   b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :
   $$\int_0^2 (x+2)\cdot e^{-x}dx.$$
   Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

Exercice 3675

1. *Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*

   On suppose connu le résultat suivant :
   La fonction $x\longmapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi'=\varphi$, et $\varphi(0)=1$. Soit a un réel donné.

   a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{ax}$ est solution de l'équation $y'=a\cdot y$.

   b. Soit g une solution de l'équation $y'=a\cdot y$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=g(x)\cdot e^{-a\cdot x}$. Montrer que h est une fonction constante.

   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $y'=a\cdot y$.

2. On considère l'équation différentielle :
   $(E):\ y'=2y+\cos x$.

   a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f_0(x)=a\cdot\cos x+b\cdot\sin x$
   soit une solution f_0 de (E).

   b. Résoudre l'équation différentielle : (E_0) : $y'=2y$.

   c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-f_0$ est solution de (E_0).

   d. En déduire les solutions de (E).

   e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Exercice 3839

1. Résoudre l'équation différentielle : $2\cdot y'+y=0\quad(E)$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle :
   $$2\cdot y'+y=e^{-\frac{x}{2}}\cdot(x+1)\qquad(E')$$

   a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\big(m\cdot x^2+p\cdot x\big)$ soit solution de (E')

   b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que g est solution de l'équation (E') si, et seulement si, $g-f$ est solution de l'équation (E).
   Résoudre l'équation (E').

3. Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$h(x)=\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\big(x^2+2x\big).$$

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\big)$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x\longmapsto e^{-\frac{x}{2}}$

a. Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ.

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

6. Puissances rationnelles :

Exercice 3913

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}_+^*$:

a. $x^3 = 5$ b. $x^6 = 100$ c. $(x+2)^4 = 5$

d. $x^{\frac{1}{3}} = 2$ e. $x^{\frac{5}{2}} = 6$ f. $(x+1)^{\frac{2}{3}} = 2$

Exercice 3914

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^{\frac{1}{2}} > 5$ b. $x^{\frac{3}{4}} \leqslant 3$ c. $(x+2)^{\frac{2}{3}} \geqslant 1$

Exercice 3915

Ecrire chaque des expressions ci-dessous sous la forme d'une puissance rationnelle :

a. $x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}$ b. $x^{\frac{1}{2}} \cdot x$ c. $\dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}}$

e. $\dfrac{x^2 \cdot x^{\frac{3}{4}}}{x^5} \cdot x^{\frac{1}{4}}$ f. $\sqrt[3]{x^5 \cdot x^{\frac{1}{3}}}$

Exercice 3917

Déterminer les expressions des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 3 \cdot x^{\frac{2}{3}} - 1$ b. $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}$

c. $h(x) = e^x \cdot x^{\frac{1}{4}}$ d. $j(x) = \sqrt[3]{x+1} \cdot (x+1)^3$

Exercice 3916

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n non-nul :
$x^n - 1 = \big(x-1\big) \cdot \big(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\big)$

2. On considère le nombre A définie par : $A = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5} - 1}$

Déterminer une expression du nombre A définie par un quotient dont le dénominateur est un nombre entier.

7. Suite : passage à la limite :

Exercice 3413

La suite u est définie par :

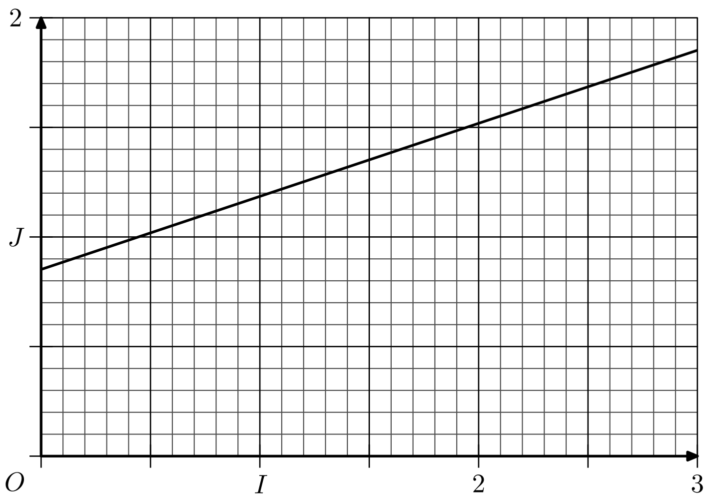
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3} \cdot u_n + \dfrac{23}{27} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan en annexe, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2\,;0)$.
Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers terms de la suite u.

2. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \dfrac{23}{18}$.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$.

4. Etudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.



Exercice 3426

On considère la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de montrer que la suite $\big(u_n\big)$ est divergente ; pour cela, effectuons un raisonnement par l'absurde, supposons que la suite $\big(u_n\big)$ converge vers ℓ :

1. Déterminer la valeur de ℓ.

On considère la suite $\big(v_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$v_n = u_n - \ell \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Etablir que la suite $\big(v_n\big)$ est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.

3. En déduire que la suite $\big(u_n\big)$ est divergente.

Exercice 3427

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}\cdot u_n - 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Dans cette question on suppose que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa valeur de convergence.

   Déterminer, par un passage à la limite, la valeur de ℓ.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n + 3$

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.

   b. En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n.

   c. Etablir la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3456

1. Si une suite (u_n) converge vers ℓ, vers quelle valeur converge l'expression $\frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}$.

2. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

   $$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\cdot u_n + \dfrac{1}{3} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

   On admet que la suite (u_n) converge vers un nombre noté ℓ.

   a. Déterminer la valeur exacte des huits premiers termes de la suite (u_n).

   b. A l'aide de la calculatrice compléter le tableau suivant en y inscrivant les valeurs approchées à 10^{-2} près.

n	u_n	$\frac{1}{3}\cdot u_n+\frac{1}{3}$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

   c. Emettre une conjecture sur les deux limites suivantes :

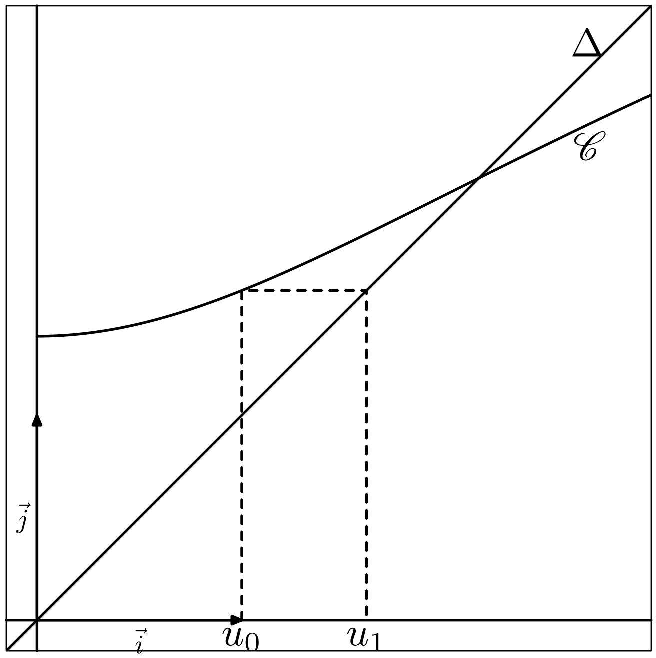
   $$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}$$

   d. Résoudre l'équation : $x = \frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{3}$

   e. En déduire la valeur de la limite ℓ.

Exercice 3471

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite Δ sont tracés sur le graphique donné ci-dessous :



On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = f(x) - x$

On admet les propriétés suivantes :
- La fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
- Il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$; le nombre α appartient à l'intervalle $[2\,;3]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n par :
$u_{n+1} = f(u_n)$

1. A partir de u_0, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abcisses en laissant apparents les traits de constructions.

2. Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse α.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$

   b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

   c. Déterminer sa limite.

8. Intégrale : intégration par parties :

Exercice 3124

L'objectif est d'étudier quelques propriétés de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-1\,;+\infty\right[$ par :
$f(x) = (1-x^2)\cdot e^{-x}$

Partie A : Variations de f et tracé de la courbe (F)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-1\,;+\infty\right[$ par :
$f(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x}$

Dans le plan (P) muni du repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ *(unité graphique : 2 cm)* la représentation graphique de la fonction f est noté (F).

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de f : interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Déterminer, suivant les valeurs de x de l'intervalle $\left[-1\,;+\infty\right[$, le signe de x^2-2x-1 et celui de $f(x)$.

   b. Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations ; préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum.

3. Déterminer une équation de la tangente noté (T) à la courbe (F) au point A de (F) dont l'abscisse est 0.

4. a. Déterminer la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 0,1 près de chacun des coefficients directeurs des tangentes à la courbe (F) en $(1\,;0)$ et $C(-1\,;0)$.

   b. Tracer les trois tangentes à la courbe (F) en A, $B(A\,;0)$ et $C(-1\,;0)$ et la courbe (F).

Partie B : Intégrales et aires

Les surfaces S et $S_1(u)$ du plan (P), où u est un réel donné de l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$ sont définies par :

- S est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :
  $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant f(x)$
- $S_1(u)$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :
  $1\leqslant x\leqslant u$ et $f(x)\leqslant y\leqslant 0$

Les aires respectives de ces surfaces sont notées $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1(u)$. Leurs valeurs exactes seront exprimées en unités d'aire.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où x est un réel positif.

   En procédant par deux intégrations par parties successives, déterminer cette intégrale.

2. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$

3. Déterminer, en fonction de u où $u\geqslant 1$, l'aire $\mathcal{A}_1(u)$ puis la limite, lorsque u tend vers $+\infty$, de $\mathcal{A}_1(u)$.

   Interpréter graphiquement ce résultat.

4. L'objectif est de déterminer le réel α supérieur ou égal à 1 pour lequel :
   $\mathcal{A}_1(\alpha)=\mathcal{A}$

   a. Démontrer que, sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$, l'équation $\mathcal{A}_1(x)=\mathcal{A}$ est équivalente à : $x=2\cdot\ln(1+x)$

   b. Etudier le sensede variations de la fonction h définie sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$ par : $h(x)=x-2\cdot\ln(1+x)$.
   Démontrer que, sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$, l'équation $x=2\cdot\ln(1+x)$ admet exactement une solution et que celle-ci, noté α, vérifie la condition : $2<\alpha<3$.

   c. Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.
   Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α puis l'encadrement de $f(\alpha)$, que vous pouvez déduire du pécédent, d'amplitude 2×10^{-4}

☐ **Exercice 3125**

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle :
   $$y''-4y'+4y=0$$

2. Déterminer la solution ϕ de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions :
   $\phi(0)=0\quad;\quad\phi'(0)=-e$

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x)=-x\cdot e^{2x+1}$

   a. Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?

   b. Etudier le sens de variation de f.

   c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   d. Dresser le tableau de variations de f.

   e. On appelle $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans une repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ *(unité graphique : 4 cm)*
   Quelle est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point O ?
   Ecrire une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $(-A)$.

   f. On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $g(x)=e^x$
   Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse $(-A)$?

2. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $h(x)=1+e\cdot x\cdot e^x$

   a. Etudier le sens de variation de h.
   En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

   b. Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Γ).

   c. Tracer, sur le même graphique, les courbes T, $(\mathscr{C})$ et (Γ).

3. Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse M.

   a. Ecrire une équation de la tangente D à (Γ) en M.

   b. La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B.
   Calculer, en fonction de m ; les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.

   c. Prouver que J appartient à $(\mathscr{C})$.

   d. Tracer (D) et J pour $m=0$.

Partie C

1. Soit x un réel quelconque.
   A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :
   $$I(x)=\int_0^x t\cdot e^{2t}\,\mathrm{d}t$$

2. Soit x un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$, exprimée en cm^2, de l'ensemble des points N dont les coordonnées $(u\,;v)$ vérifient :

$$\begin{cases} x \leqslant u \leqslant 0 \\ 0 \leqslant v \leqslant f(x) \end{cases}$$

3. Calculer $\mathcal{A}(-1)$.

4. $\mathcal{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini ? Si oui, laquelle ?

Exercice 3177

1. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$$

On donne ci-dessous le tableau de variations de g :

x	0	$2,3$	x_0	$2,4$	$+\infty$
Variation de g	$-\infty$		0		$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5\ln x}{x}$$

a. Montrer que $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b. Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\displaystyle\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a.

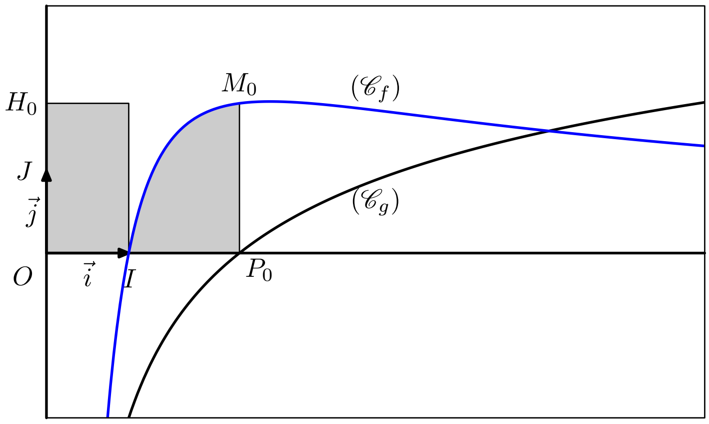
3. On a tracé dans le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

On appelle I le point de coordonnées $(1\,;0)$, P_0 le point d'intersection de $(\mathscr{C}_g)$ et de l'axe des abscisses, M_0 le point de $(\mathscr{C}_f)$ ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme $(\mathscr{D}_1)$ le domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$.

On nomme $(\mathscr{D}_2)$ le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.

Démontrer que les deux domaines $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



Exercice 3189

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E) :\ y' + y = e^{-x}$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle :
$$(E_0) :\ y' + y = 0$$

3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si, et seulement si, $v-u$ est solution de (E_0).

4. En déduire toutes les solutions de (E).

5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x+k)\cdot e^{-x}$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1. Déterminer les limites f_k en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x.

3. En déduire le tableau de variations de f_k.

Partie C

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par :
$$I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :
$$I_n = \int_{-2}^{0} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0.

b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :
$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\cdot e^2 + (n+1)\cdot I_n$$

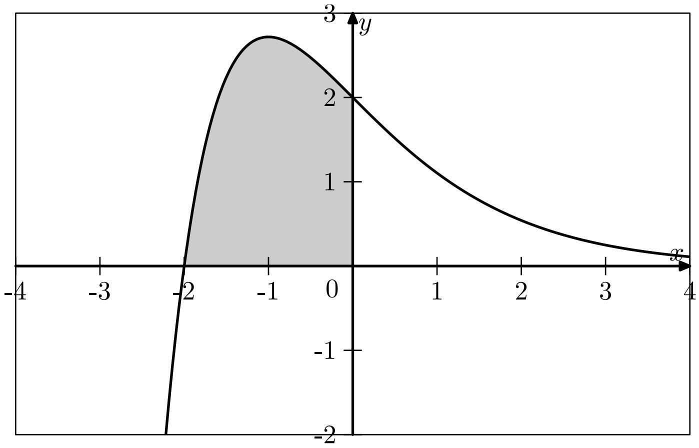
c. En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2.

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe $\mathscr{C}_k$ qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la

partie **B**.

a. A l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.

b. Soit $\mathscr{S}$ l'aire de la partie hachurée *(en unité d'aire)*; exprimer $\mathscr{S}$ en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.



Exercice 3196

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{1-x}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ d'unité graphique $2\,cm$.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer ?

b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,\mathrm{d}x$$

a. Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n.

b. Calculer I_1, puis I_2.

c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c..

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e$$

b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3205

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1)$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ est donnée en annexe.

1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O ?

2. On pose : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq 1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

b. Calculer I.

3. A l'aide d'un intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2., calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\,;1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3211

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2+x}$

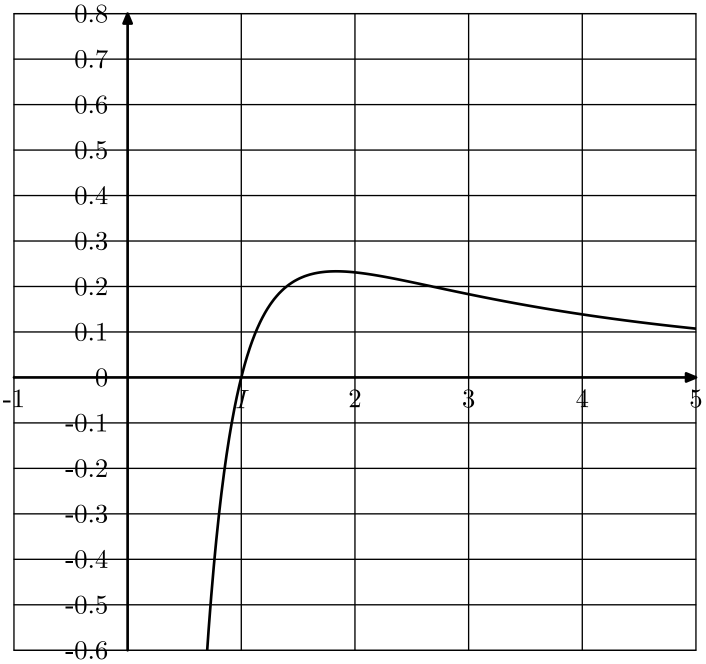
1. Montrer que pour tout $x>1$: $\dfrac{\ln x}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x}$

2. a. Calculer $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ *(on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière)*

b. En déduire un encadrement de $K = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. la figure ci-dessous représente la courbe représentative de f *(unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité)*. On considère l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

$$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$ et on note $\mathscr{A}$ son aire.



A l'aide de l'encadrement trouvé au 2. b. , donner un encadrement $\mathscr{A}$ en cm^2.

☐ **Exercice 3214**

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \left(20x+10\right)e^{\frac{1}{2}x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ *(unité graphique 1 cm)*

1. Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

3. Etablir que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5. Calculer l'intégrale : $\quad I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie **A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

   a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, de l'équation différentielle :

   $$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$$

   b. Résoudre l'équation différentielle (E').

   c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique resdescent-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;3\right]$.

   Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

☐ **Exercice 3216**

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par : $\quad f(x)=x\cdot e^{-x+2}$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $[0\,;+\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.

2. a. Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien ; on notera $\mathscr{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

   $$f(x) = \ln(x)$$

   sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

   b. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

   $$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

   est strictement croissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$.
   En déduire que l'équation $f(x)=\ln(x)$ admet une unique solution α sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

   c. Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

Partie B

1. A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

   $$I = \int_0^3 x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

2. On définit le solide $\mathscr{S}$ obtenu par révolution autour de l'axe (Ox) de la courbe déquation $y=f(x)$ pour $0\leqslant x\leqslant 3$ dans le plan (xOy) *(repère orthonormal d'unité 4 cm)*.
   On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ du solide est donné par :

   $$\mathscr{V} = \pi\int_0^3 \left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

   a. Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de I.

   b. Déterminer alors une valeur approchée à $1\,cm^3$ près du volume du solide.

☐ **Exercice 3220**

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left]1\,;+\infty\right[$ par :

   $$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

   a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$:

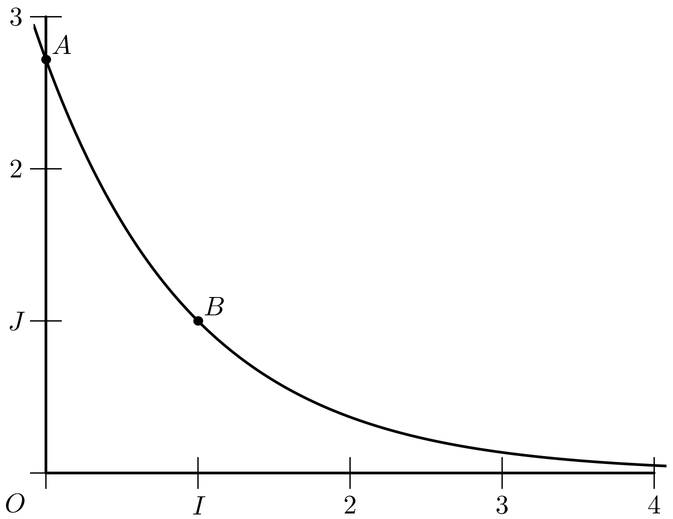
$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$
Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :
$$I = \int_2^3 \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} \ln x \, \mathrm{d}x$$
On donnera le résultat exact sous la forme $p{\cdot}\ln 2 + q{\cdot}\ln 3$, avec p et q rationnels.

Exercice 3229



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

(E) : $y' + y = 0$ et telle que $f(0) = e$

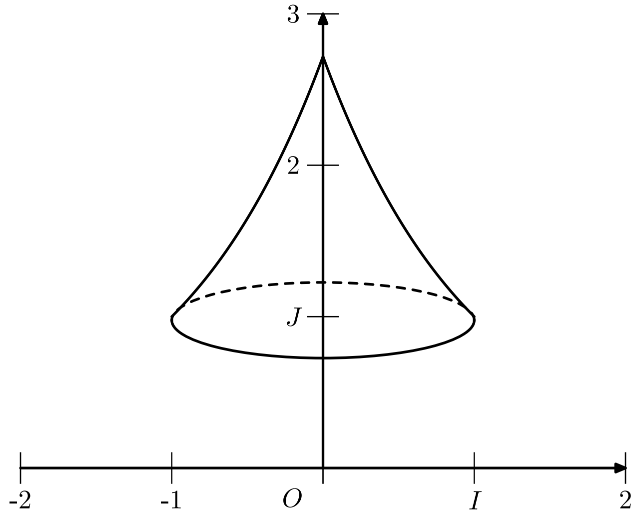
1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1\,;e]$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x.

3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\widehat{AB}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume.

On admet que : $V = \pi \cdot \displaystyle\int_1^e (1 - \ln t)^2 \, \mathrm{d}t$

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



Exercice 3236

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = (x-1)\left(2 - e^{-x}\right)$$
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous *(unité graphique 2 cm)*

1. a. Etudier la limite de f en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

   c. Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que :
   $f'(x) = xe^{-x} + 2{\cdot}\left(1 - e^{-x}\right)$

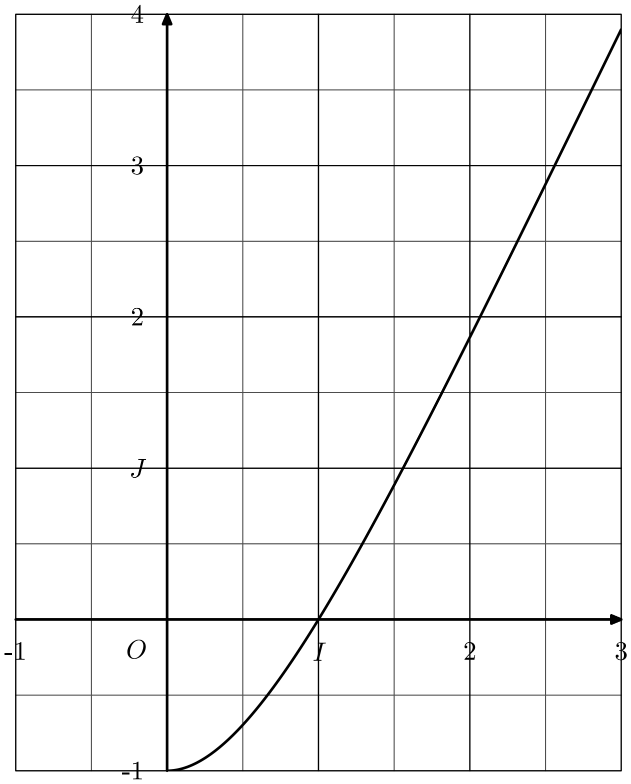
   b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.

   c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

4. a. Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

   b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.



Exercice 3239

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2. On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_1.
2. Etablir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right)$$
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$
4. Démontrer par récurrence que :
$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$$
5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.
   a. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:
   $$u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n.$$
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:
   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$
6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).
7. Justifier enfin que :
$$e^2 = \lim_{n \mapsto +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right)$$

Exercice 3249

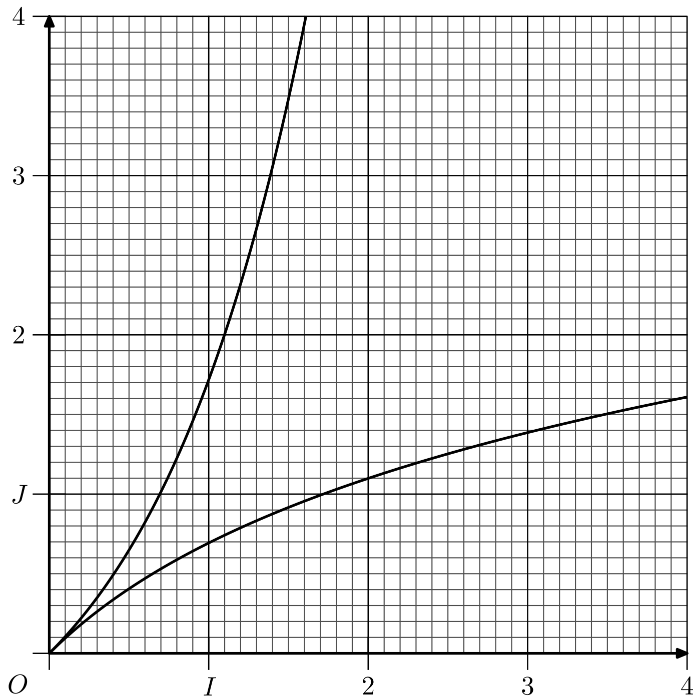
L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad ; \quad g(x) = e^x - 1$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans une repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par la candidat.

1. Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point $O(0\,;0)$. Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.
2. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $I(a) = \displaystyle\int_0^a \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.
   a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que :
   $$I(a) = a \cdot \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} \left(e^x - 1\right)\mathrm{d}x$$
   b. En déduire la valeur de $I(a)$.
   c. Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.



Exercice 3272

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Soit $a \in [0\,;+\infty[$. On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.

2. A l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a.

3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrez que :
$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}^*$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$:
$$P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x.$$
Démontrer en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que :
$$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$$

5. Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculez $J(a)$.

6. a. Démontrez que pour tout $t\in[0\,;a]$:
$$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$$
b. Démontrez que pour tout $a\in[0\,;+\infty[$:
$$J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$$

7. En déduire que pour tout $a\in[0\,;+\infty[$:
$$\big|\ln(1+a) - P(a)\big| \leqslant \frac{a^6}{6}.$$

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 3297

Soit f la fonction définie sur $\big[0\,;+\infty\big[$ par :
$$f(x) = x\cdot\ln\big(x+1\big)$$

1. On pose : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$
   a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x\neq 1$:
   $$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$
   b. Calculer I.

2. Déterminer par une intégration par parties l'intégrale suivante :
$$\int_0^1 x\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3959

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-1}^{4} x\cdot e^x\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_0^5 t\cdot e^{2\cdot t}\,\mathrm{d}t$

c. $\displaystyle\int_e^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ d. $\displaystyle\int_0^1 (2\cdot x+1)\cdot\ln\big(x+1\big)\,\mathrm{d}x$

e. $\displaystyle\int_1^e \frac{5\cdot\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ f. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$

Exercice 3960

A l'aide d'une double intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2\cdot e^x\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_1^5 \big(1-t^2\big)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3961

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_1^{\ln 3} e^t\cdot(t-1)\,\mathrm{d}t$

c. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cdot\sin 3x\,\mathrm{d}x$ d. $\displaystyle\int_1^e x\cdot(1-\ln x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 3982

Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_2.

2. Une relation de récurrence :
   a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n\geqslant 2$:
   $$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)\cdot I_n$$
   b. Calculer I_3.

Exercice 3983

On considère la fonction f définie sur $\big[1\,;+\infty\big[$ par :
$$f(x) = \big(x-1\big)\cdot e^{1-x}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\big)$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :
$$F(x) = \int_1^x f(x)\,\mathrm{d}t = \int_1^x (t-1)\cdot e^{1-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la fonction F est croissante sur $\big[1\,;+\infty\big[$.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x appartenant à $\big[1\,;+\infty\big[$:
$$F(x) = -x\cdot e^{1-x} + 1$$

3. Démontrer que sur $\big[1\,;+\infty\big[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation :
$$\ln(2x) + 1 = x$$

Exercice 3986

On considère la suite numérique $\big(J_n\big)$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par :
$$J_n = \int_1^n e^{-t}\cdot\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la suite $\big(J_n\big)$ est croissante.

2. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

   On définit la suite $\big(I_n\big)$, pour tout entier naturel n non nul, par :
   $$I_n = \int_1^n (t+1)\cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
   a. Justifier que, pour tout $t\geqslant 1$, on a :
   $$\sqrt{t+1} \leqslant t+1$$
   b. En déduire que : $J_n \leqslant I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel *(indépendant de n)*.

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 3988

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par :
$f(x) = (1+x)\cdot e^{-x}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité graphique $1\,cm$.

1. a. Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
$$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$
Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (-2-b)\cdot e^{-b} + (2+a)\cdot e^{-a}$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $a\in\mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\int_{-1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = e$
Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

Exercice 3999

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non-nul par :
$$x_n = \int_0^1 t^n\cdot\cos t\,\mathrm{d}t \quad ; \quad y_n = \int_0^1 t^n\cdot\sin t\,\mathrm{d}t$$

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

b. Etudier les variations de la suite (x_n).

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :
$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b. En déduire la limite de la suite (x_n).

3. a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :
$$x_{n+1} = -(n+1)\cdot y_n + \sin(1).$$

b. En déduire que : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} y_n = 0$

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul :
$y_{n+1} = (n+1)\cdot x_n - \cos(1)$
Déterminer : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n\cdot x_n$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n\cdot y_n$

Exercice 4000

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous *(unité graphique $2\,cm$)*

1. a. Etudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

c. Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que :
$f'(x) = x\cdot e^{-x} + 2\cdot(1-e^{-x})$.

b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif :
$f'(x) > 0$

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

4. a. Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.

Exercice 4004

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$; l'unité graphique est $4\,cm$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. Montrer que $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$; en déduire une primitive de f.

2. Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ, la droite d'équation $y=x$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$?
Hachurer cette surface sur la représentation graphique.

3. Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x$

4. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$\int_0^1 x\cdot\Big[1-\big[f(x)\big]\Big]\,\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{e^2+1} - \ln\Big(\frac{e^2+1}{2\cdot e}\Big).$$
En déduire : $\displaystyle\int_0^1 x\cdot\big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x$

Exercice 4005

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cdot \cos(n \cdot x)\,\mathrm{d}x$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n :
$\cos(n \cdot x) = (-1)^n \quad ; \quad \sin(n \cdot \pi) = 0$

2. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :
$$I_n = \frac{(-1)^n \cdot e^{\pi} - 1}{1+n^2}$$

Exercice 4006

On pose : $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln x\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_1.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$I_2 = \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$$

Exercice 4016

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = (20 \cdot x + 10) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$$
Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$.

Exercice 4128

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :
$$I = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{2-x}\right)\mathrm{d}x$$

1. a. Etudier les variations de la fonction :
$$f : x \longmapsto f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$$
sur l'intervalle $[0\,;1]$.

   b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, on a :
$$\frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

2. Soit J et K les intégrales définies par :
$$J = \int_0^1 (2+x) \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

   a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que :
$$J = 3 - \frac{4}{e}$$

   b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que :
$$\frac{1}{3 \cdot e} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}.$$

   c. Démontrer que : $J + K = 4 \cdot I$.

   d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.

Exercice 4222

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_2.

2. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que tout entier naturel $n \geqslant 2$:
$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$

Exercice 4269

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité pour un client d'attendre moins de t minutes est définie par :
$$\mathcal{P}(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x$$
Le temps moyen d'attente est donné par :
$$\lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de t.

2. En déduire que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$

3. Le temps moyen d'attente étant de $5\,min$, quelle est la probabilité d'attendre plus de $10\,min$? plus de $5\,min$?

Exercice 4294

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \ln x - \frac{1}{2} \cdot x + 1$$

1. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra utiliser une intégration par parties.

2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par :
   - la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses ;
   - les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

   (on admettra que la fonction f est positive sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$)

Exercice 4295

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{e}$$

Exercice 4296

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;1]$ par : $f(x) = 1 + x \cdot \ln x$

Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose :
$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 [1 - f(x)]\,\mathrm{d}x$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$I(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$

2. Déterminer $\lim_{\alpha \mapsto 0} I(\alpha)$

3. On admet que la fonction f est postive sur $]0\,;1]$. Inter-

préter graphiquement le résultat précédente.

Exercice 4298

Le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^2{\cdot}e^{-x}$

On note f' la fonction dérivée de f.

Pour tout nombre réel a, on considère l'intégrale :

$$I(a)=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.
2. A l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :

$$I(a)=2-2{\cdot}e^{-a}{\cdot}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right)$$

Exercice 4303

Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n=\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}{\cdot}e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_2
2. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n\geqslant 2$:

$$I_{n+1}=e-\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}+(1-n){\cdot}I_n$$

3. Calculer I_3.

9. Intégrale : calcul de volumes :

Exercice 4018

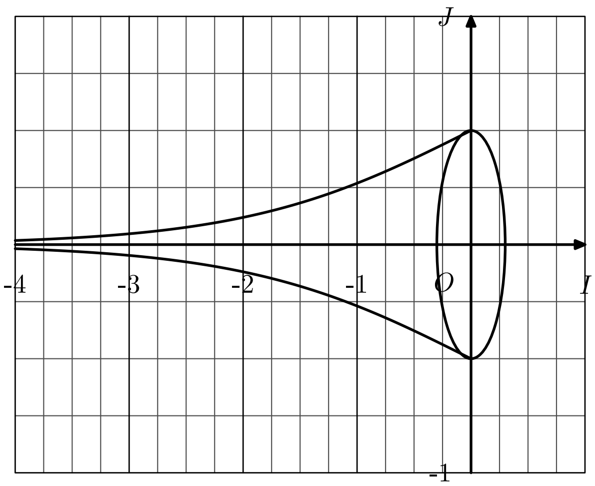
On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

Soit λ un réel positif, on note $\mathscr{V}(\lambda)$ l'intégrale :

$$\int_{-\lambda}^0 \pi{\cdot}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

On admet que $\mathscr{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue pour $-\lambda\leqslant x\leqslant 0$.



1. Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel x :

$$\frac{e^{2\cdot x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{a{\cdot}e^x}{e^x+1}+\frac{b{\cdot}e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

2. Exprimer $\mathscr{V}(\lambda)$ en fonction de λ.
3. Déterminer la limite de $\mathscr{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice 4328

On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :

$f(x)=x^2{\cdot}\ln x$

La courbe $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe (Ox) de la région plane délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe (Ox) et les droites d'équations :

$$x=\frac{1}{e}\quad;\quad x=1$$

On note V un mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que :

$$V=\int_{\frac{1}{e}}^1 \pi{\cdot}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

1. Montrer qu'une primitive de la fonction :

$x\longmapsto x^4{\cdot}\ln x$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$

est la fonction : $x\longmapsto \dfrac{x^5}{25}{\cdot}\left(5{\cdot}\ln x-1\right)$.

2. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$V=\frac{\pi}{125}{\cdot}\left(2-\frac{37}{e^5}\right)$$

10. Vecteurs coplanaires :

Exercice 2780

Au fil de cet exercice, nous considérons les deux systèmes suivants de trois équations à trois inconnues :

$$(S):\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5a & - & 2b & 3 & 11c & = & 0\\ -a & + & 3b & + & 2c & = & 0\\ -a & + & b & - & c & = & 0\end{array}\right.$$

$$(T):\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2a & + & b & - & 5c & = & 0\\ a & - & 3b & - & 5c & = & 0\\ 5a & - & 2b & + & 14c & = & 0\end{array}\right.$$

On se place dans un repère $(O\,;I\,;J\,;K)$ pour étudier la coplanarité de vecteurs dans l'espace :

1. a. Montrer que le système $\big(S\big)$ n'admet que le triplet $\big(0\,;0\,;0\big)$ pour solution.

b. En déduire que les vecteurs :
$\vec{p}\left(5\,;\,-1\,;\,-1\right)$; $\vec{q}\left(-2\,;\,3\,;\,1\right)$; $\vec{s}\left(11\,;\,2\,;\,-1\right)$
sont non-coplanaires.

2. On considère les trois vecteurs suivants :
$\vec{u}\left(-2\,;\,1\,;\,5\right)$; $\vec{v}\left(1\,;\,-3\,;\,-2\right)$; $\vec{w}\left(-5\,;\,-5\,;\,14\right)$

a. Justifier que la coplanarité de ces trois vecteurs est équivalent à la condition :
$$\mathcal{S}_{(T)} \neq \left\{\left(0\,;\,0\,;\,0\right)\right\}$$

b. En déduire que les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 2791

On munit l'espace d'un repère $\left(O\,;I\,;J\,;K\right)$:

1. On considère les quatres points suivants :
$A\left(-5\,;-2\,;3\right)$; $B\left(0\,;0\,;6\right)$
$C\left(-7\,;-1\,;7\right)$; $D\left(-21\,;-3\,;9\right)$
Montrer que les points A, B, C, D sont coplanaires.

2. On considère les 5 points suivants :
$E\left(-2\,;1\,;-1\right)$; $F\left(-4\,;3\,;-2\right)$
$G\left(-3\,;4\,;-4\right)$; $H\left(-5\,;6\,;2\right)$; $L\left(-11\,;8\,;5\right)$
Monter que la droite (HL) n'est pas parallèle au plan (EFG).

Exercice 2800

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\;K\right)$, on considère les quatres points suivants :
$A\left(5\,;-4\,;3\right)$; $B\left(7\,;-5\,;6\right)$
$C\left(10\,;-2\,;1\right)$; $D\left(-11\,;-14\,;17\right)$
Montrer que les points A, B, C, D sont coplanaires.

Exercice 2815

On considère dans l'espace muni d'un repère les deux vecteurs suivants définis par leurs coordonnées :
$\vec{u} = \left(3\,;\,2\,;1\right)$; $\vec{v} = \left(-1\,;\,3\,;\,1\right)$

On considère le vecteur $\vec{w}$ définit en fonction de x un nombre réel par ses coordonnées :
$\vec{w}\,(2\,;\,16\,;\,x)$

Déterminer le*(s)* valeur*(s)* de x tel*(les)* que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont colinéaires.

Exercice 5437

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\,;K\right)$ orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :
$A\left(3\,;-1\,;5\right)$; $B\left(-2\,;2\,;3\right)$; $C\left(-1\,;-2\,;4\right)$; $D\left(5\,;8\,;4\right)$
Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?

Exercice 6316

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\,;K\right)$ orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :
$A\left(3\,;-1\,;5\right)$; $B\left(-2\,;2\,;3\right)$; $C\left(-1\,;-2\,;4\right)$; $D\left(5\,;8\,;4\right)$
Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?

11. Espace et barycentre :

Exercice 4084

On munit l'espace d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
On considère les points :
$P\,(1\,;2\,;3)$; $Q(4\,;2\,;-1)$; $R\,(-2\,;3\,;0)$

Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane.

1. Montrer que le tétraèdre $OPQR$ n'est pas régulier.

2. On nomme P' le centre de gravité du triangle OQR. Calculer les coordonnées de P', centre de gravité du triangle OQR.

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est :
$3{\cdot}x + 2{\cdot}y + 16{\cdot}z = 0$

4. On considère la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :
$\mathcal{P}$: *Dans un tétraèdre, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.*
La propriété $(\mathcal{P})$ est-elle vraie dans un tétraèdre quelconque ?

Exercice 4252

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on donne les trois points :
$A\left(1\,;2\,;-1\right)$; $B\left(-3\,;-2\,;3\right)$; $C\left(0\,;-2\,;-3\right)$

On appelle G le barycentre du système pondéré :
$\left\{\left(A\,;1\right)\,;\left(B\,;-1\right);\left(C\,;2\right)\right\}$

1. Démontrer que le point G a pour coordonnées $\left(2\,;0\,;-5\right)$.

2. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan $(\mathcal{P})$ avec la droite (CG).

12. Distance à un plan :

Exercice 4034

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

La sphère de centre $A(1\,;1\,;1)$ et de rayon 10 est tangente au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=0$.

Exercice 4082

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormal direct.
On considère les points :
$A(-2\,;0\,;1)$; $B(1\,;2\,;-1)$; $C(-2\,;2\,;2)$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
2. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
3. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Exercice 3858

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère :
- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $B(1\,;-2\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(-2\,;1\,;5)$;
- le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne : $x+2y-7=0$.

1. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.
2. Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point $C(-1\,;4\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;-1\,;1)$.
3. Soit le point $A(5\,;-2\,;-1)$. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.
4. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

Exercice 4089

Le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x-y+z-11=0$ est tangent à une sphère $\mathcal{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1\,;-1\,;3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère $\mathcal{S}$.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathcal{Q}$.
3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{Q}$.

Exercice 4100

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :
$A(1\,;-2\,;4)$; $B(-2\,;-6\,;5)$; $C(-4\,;0\,;-3)$

On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).
Soit t le réel tel que : $\overrightarrow{BH}=t\cdot\overrightarrow{BC}$

1. Démontrer que : $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$
2. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

Exercice 4106

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on donne les points :
$A(3\,;2\,;-1)$; $B(-6\,;1\,;1)$
$C(4\,;-3\,;3)$; $D(-1\,;-5\,;-1)$

1. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :
$-2\cdot x-3\cdot y+4\cdot z-13=0$
2. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}$.

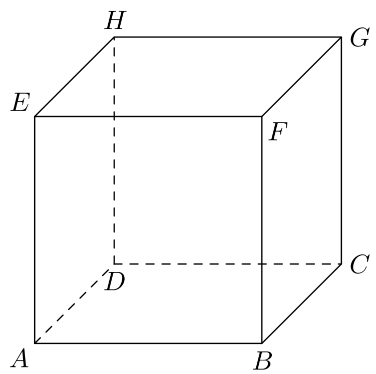
Exercice 4134

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation :
$3\cdot x+2\cdot y=29$

1. Démontrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\vec{k}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
3. Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois plans de coordonnées.
4. Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (xOy), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

Exercice 4329

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous :



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$.

On note K le barycentre des points pondérés $(D\,;1)$ et $(f\,;2)$

Partie A

1. Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.
2. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
3. Calculer la distance EK.

Partie B

Soit M un point du segment $[HG]$.
On note $m=HM$ *(m est donc un réel appartenant à $[0\,;1]$).*

1. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle

$[0\,;1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est :
$(-1+m)\cdot x+y-m\cdot z=0$.

3. On note d_m la distance du point E au plan (MFD).

a. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$:
$d_m = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot m^2-2\cdot m+2}}$

b. Déterminer la position de M sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance d_m est maximale.

c. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonale de E sur le plan (MFD)

13. Probabilité combinatoire :

Exercice 4254

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

On extrait simulanément et au hasard deux boules de l'urne.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

1. Vérifier que $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)=\frac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

3. Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
A : "*les deux boules tirées sont de même couleur*"

Exercice 4259

Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher.

On tire deux boules au hasard simultanément.

1. On considère l'évènement :
A : "*les deux boules tirées sont de la même couleur*".

Déterminer la probabilité de l'évènement A.

2. On considère l'évènement :
A : "*une seule des deux boules tirées est rouge*".

Déterminer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 4263

Pour chacune des questions suivantes, une ou deux des réponses proposées sont correctes. Aucune justification n'est attendue :

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

a. $\frac{5}{8}$ b. $\frac{21}{32}$ c. $\frac{11}{32}$ d. $\frac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes. La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

a. $\frac{105}{248}$ b. $\dfrac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ c. $\frac{21^2}{32^2}$ d. $\frac{5^2}{8^2}$

14. Exponentielles et logarithmes de base a :

Exercice 3918

1. a. Etablir l'égalité suivante : $2^{\ln 15}=e^{\ln 2\cdot\ln 15}$

b. Comparer sans l'aide de la calculatrice, les deux nombres suivants : $2^{\ln 15}$; $4^{\ln 5}$

2. a. Etablir l'égalité suivante :
$9^{\frac{3}{4}}=e^{\frac{3}{2}\cdot\ln 3}$

b. En déduire la comparaison des deux entiers suivants :
$9^{\frac{3}{4}}$; $3^{\frac{4}{3}}$

