Terminale S/Derivées

1. Nombres dérivés à gauche et à droite :

Exercice 3483

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x)=\Big(\frac{1}{2}\cdot x+2\Big)\cdot\sqrt{x^2+2x+1}+1$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

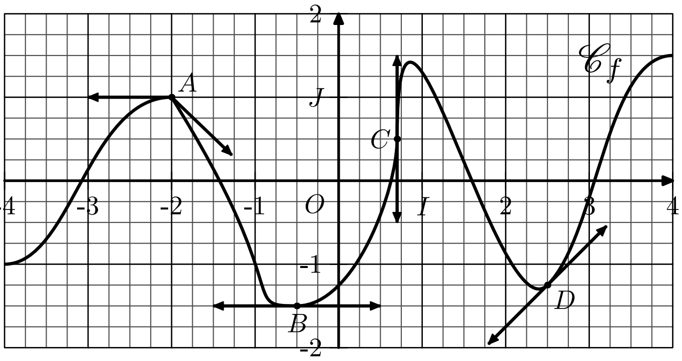
2. a. Etablir l'égalité suivante pour tout nombre réel h :
$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{(h+3)\cdot\sqrt{h^2}}{2\cdot h}$$

   b. En déduire la valeur des deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

3. Que pouvez-vous dire sur l'aspect de la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 ? *(tracer la courbe à l'aide d'une calculatrice)*

Exercice 3484

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f. Voici sa représentation :



1. Justifier que la fonction f n'est pas dérivable pour l'abscisse du point C.

2. a. Graphiquement, déterminer les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}\quad;\quad\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

   b. La fonction f est-elle dérivable en -2 ?

3. Déterminer, graphiquement, la valeur des nombres dérivées de la fonction f aux abscisses des points B et D.

Exercice 3485

On note f la fonction racine carrée ; cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Considérons $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $h\in\mathbb{R}$ tel que $\big[x-h\,;x+h\big]\subset\mathbb{R}_+$

   a. Etablir la limite suivante :
$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

   b. En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f en $x\in\mathbb{R}_+^*$.

2. a. Déterminer la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}$$

   b. Que peut-on dire de la dérivabilité de la fonction f en 0 ?

Exercice 3508

1. Justifier la non-dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

   a. $f(x)=\sqrt{x}$ b. $g(x)=|x|$

   c. $h(x)=\sqrt{x^2+x}$

2. Considérons la fonction j définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $j(x)=x\cdot|x|$

   Justifier que la fonction j est dérivable en 0.

Exercice 3533

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos(2\cdot x)$$

1. a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   b. Justifier que (T) est également la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse π.

   c. Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (T)

2. On considère la droite (d) d'équation :
$$y=-\frac{1}{2}\cdot x.$$

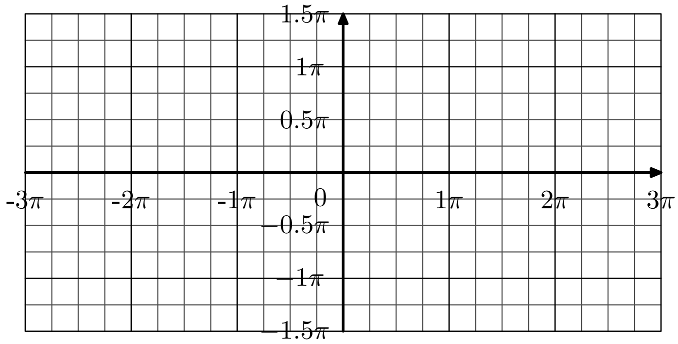
   a. Justifier que la droite (d) est tangente à la courbe en plusieurs points.

   b. Etudier la position relative de (d) et $\mathscr{C}_f$.

3. a. Compléter le tableau de valeur suivant :

x	π	2π	3π	4π
$f(x)$				

b. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}_+$



4. a. Etudier la parité de la fonction f.

b. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}_-$

2. Développement limité :

Exercice 3504

1. Soit f une fonction définie en 0 telle que :
   $f(x) = a{\cdot}x + b + x{\cdot}\varepsilon(x)$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = 0$

   Montrer que la fonction f est dérivable en 0.

2. Soit g une fonction définie en 0 dont l'image de x est définie par :
   $g(x) = 3 - 2x + x^2$

   a. Justifier, sans effectuer aucun calcul, que la fonction g est dérivable en 0.

   b. Donner la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 0.

3. Soit h une fonction définie en 0 dont l'image de x est définie par :
   $$h(x) = \frac{-3x^3 + 3x^2 + x - 2}{x + 1}$$

   a. Etablir l'égalité suivante : $h(x) = 3x - 2 - \dfrac{3{\cdot}x^3}{x+1}$

   b. En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0.