Terminale S/Barycentres et droites

255. Exercices non-classés :

Exercice 3114

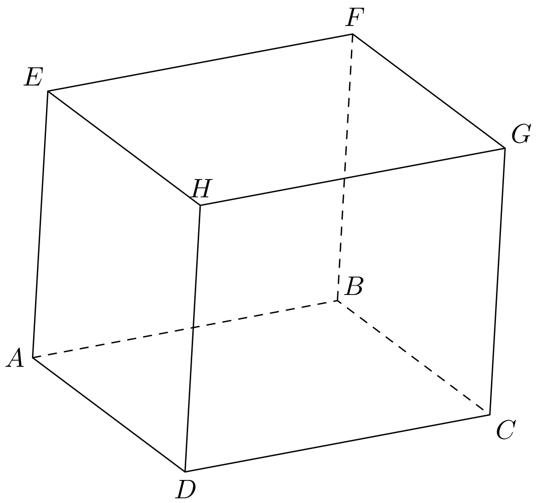
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :
$A\,(-1\,;1\,;3)$; $B\,(2\,;1\,;0)$; $C\,(4\,;-1\,;5)$

Peut-on écrire C comme barycentre des points A et B ?

Exercice 3135

On considère dans l'espace un cube de $3\,cm$ de côté, noté $ABCDEFGH$ et représenté ci-dessous :



Soit I le barycentre des points pondérés $(E\,;2)$ et $(F\,;1)$, J celui de $(F\,;1)$ et $(B\,;2)$ et enfin K celui $(G\,;2)$ et $(C\,;1)$.

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J et K. On note Δ cet ensemble

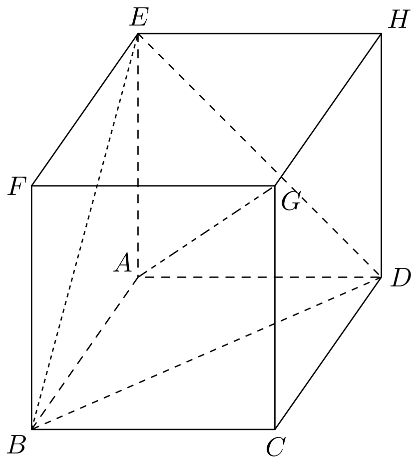
1. Placer les points I, J et K sur la figure ci-dessus.
2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant :
$\left(A\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

3. Donner les coordonnées des points I, J et K.
4. Soit $P\,(2\,;0\,;0)$ et $Q\,(1\,;3\,;3)$ deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.
   a. Démontrer que M appartient à Δ si, et seulement si, le triplet $(x\,;y\,;z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?
   b. Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure.
6. a. Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
   b. Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω

Exercice 3265

On considère le cube $aBCDEFGH$ ci-contre ; O_1 et O_2 sont les centres des carrés $ABCD$ et $EFGH$, et I est le centre de gravité du triangle EBD.



Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\left\{(E\,;1)\,;\,(B\,;1-m)\,;\,(G\,;2m-1)\,;\,(D\,;1-m)\right\}$$

Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m.
2. Préciser la position du point G_1.
3. Vérifier que $G_0=A$. En déduire que les points A, I et G sont alignés.
4. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m}=m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5. a. Vérifier que les points A, G_m, E et O_1 sont coplanaires.
   b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

Partie B

Dans cette question, l'espace est rapportée au repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan ABD.

2. Déterminer les coordonnées du point G_m.

3. Pour quelles valeurs de m, la distance de G_m au plan (EBD) est-elle égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$?

Exercice 3269

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\dfrac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$S_m = \Big\{(A\,;1)\,;\,(B\,;m)\,;\,(C\,;2m)\Big\}$$

Pour tout point M du plan, on note $\overrightarrow{V_M}=3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

Pour chacune des six affirmations suivantes, dite si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse donne 0,5 point, chaque réponse fausse ou illisible enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à 0.

Affirmation	V ou F
G_1 est le milieu du segment $[CI]$	
G_1 est barycentre de $\Big\{(J\,;2)\,;\,(C\,;\frac{2}{3})\Big\}$	
Pour tout point M : $\overrightarrow{V_M}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$	
Pour tout ,, distinct de $-\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$	
$IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle	
Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que $P=G_m$	

Exercice 3271

On considère le tétraèdre $ABCD$; on note I milieu du segment $[AB]$ et J celui de $[CD]$.

1. a. Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés :
$$\Big\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;-1)\,;\,(D\,;1)\Big\}$$
Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placez I, J et G_1 sur la figure *(voir feuille annexe)*.

   b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\Big\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;(D\,;2)\Big\}$.
Démontrez que G_2 est le milieu du segment $[ID]$. Placez G_2.

   c. Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

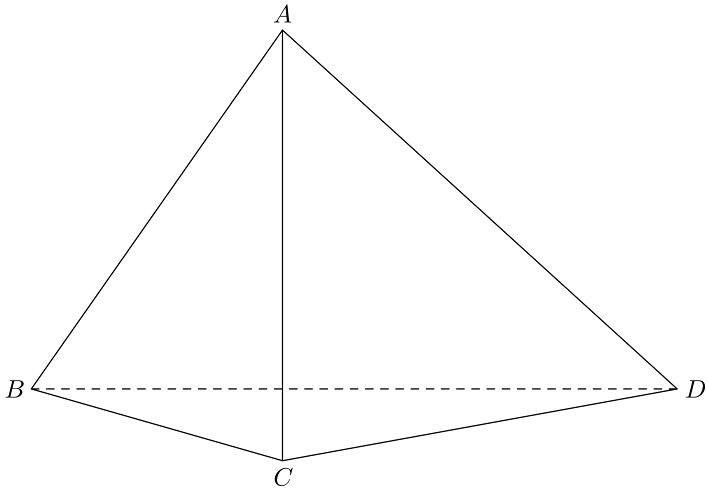
2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés :
$$\Big\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;m{-}2)\,;\,(D\,;m)\Big\}$$

   a. Précisez l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

   b. Démontrez que G_m appartient au plan (ICD).

   c. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

   d. En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathcal{E}$.



Exercice 3432

Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ donné en annexe, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.

Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n\,;2)$ et $(B_n\,;1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n\,;1)$ et $(B_n\,;3)$.

1. Sur le graphique, placer les points A_2, B_2.

2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n. Montrer que :
$$a_{n+1}=\frac{2{\cdot}a_n+b_n}{3}$$
On admet de même que : $\quad b_{n+1}=\dfrac{a_n+3{\cdot}b_n}{4}$

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$u_n=b_n-a_n$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

   b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

   c. Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.

2. a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante *(on pourra utiliser le signe de u_n).*

   b. Etudier les variations de la suite (b_n).

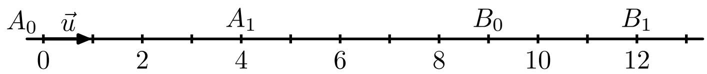
3. Que peut-on dire des résultats précédents quant à la

convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

Partie C

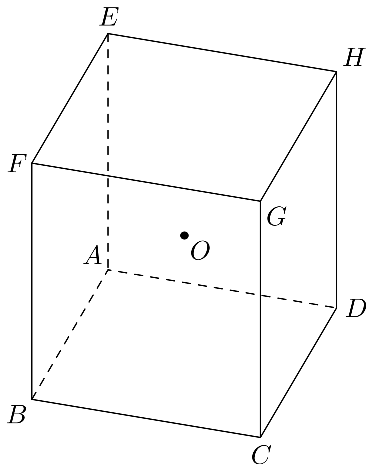
1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$v_n = 3{\cdot}a_n + 4{\cdot}b_n$
Montrer que la suite (v_n) est constante.

2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).



Exercice 4024

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous de centre O.



Déterminer les coordonnées des points de chacun des sommets du cube ainsi que du point O dans chacun des repères suivants :

a. $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BF})$ b. $(A\,;\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$

c. $(O\,;\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OG}\,;\overrightarrow{OE})$

Exercice 4026

On considère l'espace muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$ orthonormé .

Pour tout réel k, on consière le point M_k dont les coordonnées sont définies par :

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 3{\cdot}k \\ z = 2 + k \end{cases}$$

1. a. Déterminer les points coordonnées du point M_k dans les trois cas suivants :
$k=0$; $k=1$; $k=-1$

b. Justifier que les points M_0, M_1 et M_{-1} sont alignés.

2. On considère le point A de coordonnées $(-1\,;9\,;4)$:

a. Le point A appartient-il à l'ensemble des points M_k ?

b. Le point A appartient-il à la droite (M_0M_1) ?

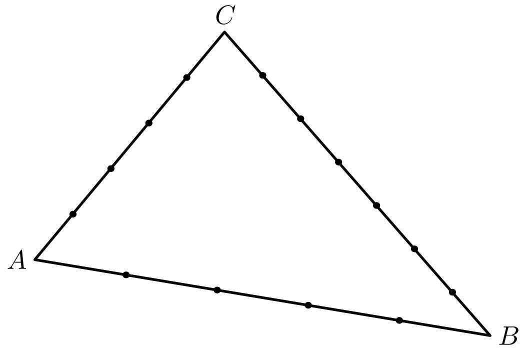
3. a. Montrer que, pour tout k réel, les vecteurs $\overrightarrow{M_0M_k}$ et $\overrightarrow{M_0M_1}$ sont colinéaires.

b. En déduire la nature de l'ensemble des points M_k lorsque k décrit $\mathbb{R}$.

c. Sqns justification, donner la nature de l'ensemble des points M_k lorsque k décrit chacun des trois ensembles suivants :
$]-\infty\,;0]$; $[0\,;1]$; $[1\,;+\infty[$

Exercice 4027

On considère le triangle ABC ci-dessous. Chacun de ses côtés a été partagé en 12 parts égales :



On souhaite déterminer l'emplacement du point G vérifiant la relation vectorielle :
$4{\cdot}\overrightarrow{GA} + 6{\cdot}\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

1. Considèrons le point M vérifiant la relation vectorielle :
$2{\cdot}\overrightarrow{MA} + 3{\cdot}\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

a. A l'aide de la relation de Chasles, montrer que le point M vérifie la relation :
$\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{5}{\cdot}\overrightarrow{BA}$

b. Placer le point M sur la figure.

c. En utilisant la relation de Chasles et la définition du point G, étqblir la relation vectorielle suivante :
$10{\cdot}\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

d. En déduire que le point G appartient à la droite (MC).

2. Considérons le point N barycentre du système partiel :
$\{(B\,;6)\,;\,(C\,;1)\}$

Placer le point N sur la figure.

3. En déduire la position du point G.

Exercice 4035

Indiquer pour la proposition suivante si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

La droite de l'espace passant par le point B de coordonnées $(2\,;3\,;4)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\,(1\,;2\,;3)$ comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 4036

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

On note $\mathcal{D}$ la droite des abscisses et $\mathcal{D}'$, la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

1. Justifier que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Prouver qu'il existe deux rélles b et c tels que le vecteur $\overrightarrow{w}=b\cdot\overrightarrow{j}+c\cdot\overrightarrow{k}$ soit un vecteur directeur de Δ.

Exercice 4037

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k})$.

On note (D) la droite passant par les points $A(1\,;-2\,;-1)$ et $B(3\,;-5\,;-2)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

2. On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases} \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}.$$
Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $4\cdot x+y+5\cdot z+3=0$.
   a. Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ contient la droite (D).
   b. Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les cordonnées.

Exercice 4038

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k})$.

On considère le point A de coordonnées $(-2\,;8\,;4)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1\,;5\,;-1)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Exercice 4040

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k})$. On considère les points $A\,(3\,;1\,;3)$ et $B(-6\,;2\,;1)$.

Déterminer les caractéristiques de l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$$\left\|4\cdot\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2$$

Exercice 4041

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k})$.

On considère les points :
$$A(1\,;-1\,;4) \quad ; \quad B(7\,;-1\,;-2) \quad ; \quad C(1\,;5\,;-2)$$

1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs :
$$\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}$$
   b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
   c. En déduire que $x+y+z-4=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Déterminer les coordonnées du point G isobarycentre des points A, B, C.

Exercice 4042

On considère le cube $OABCDEFG$ d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous. Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.

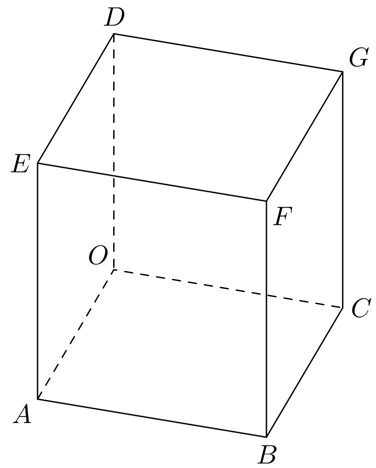
Soient Les points P et Q tels que :
$$\overrightarrow{OP}=2\cdot\overrightarrow{OA} \quad ; \quad \overrightarrow{OQ}=4\cdot\overrightarrow{OC}$$

On appelle R le barycentre des points pondérés $(B\,;-1)$ et $(F\,;2)$.

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right)$.

1. a. Démontrer que le point R a pour coordonnées $(1\,;1\,;2)$.
   b. Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.
   c. Quelle est la nature du triangle PQR ?

2. On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation :
$$4\cdot x+2\cdot y+z-8=0$$
   a. Montrer que les points P, Q, R vérifient l'équation.
   b. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).



Exercice 4043

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k})$.

On considère les points :
$$A(-1\,;1\,;3) \quad ; \quad B(2\,;1\,;0) \quad ; \quad C(4\,;-1\,;5)$$

Peut-on écrire le point C comme barycentre des points A et B.

Exercice 4044

Dans le plan orienté, $ABCD$ est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de $[AI]$.

Déterminer la valeur du nombre réel m afin que le point C soit le barycentre du système pondéré suivant :
$$\left\{(A\,;m)\,;\,(B\,;1)\,;\,(D\,;1)\right\}$$

Exercice 4045

A tout point M du plan, on associe le point M' tel que :
$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\cdot\overrightarrow{MC}$$

Montrer que cette transformation du plan est l'homothétie de rapport -3 et de centre G, où G désigne le barycentre du système :

$$\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;2)\}$$

Exercice 4047

Parmi les trois propositions suivantes, une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.

On considère un triangle ABC et on note I le point tel que :

$$2\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$$

Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

a. $\{(A\,;\,1)\,;\,(C\,;\,2)\}$ b. $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,2)\,;\,(C\,;\,2)\}$

c. $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,2)\,;\,(C\,;\,1)\}$

Exercice 4048

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

On considère les points :

$A(1\,;-1\,;3)$; $B(0\,;3\,;1)$; $C(6\,;-7\,;-1)$

$D(2\,;1\,;3)$; $E(4\,;-6\,;2)$

1. a. Montrer que le barycentre du système :
$\{(A\,;2)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;1)\}$
est le point E.

   b. En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que :
$$\left\|2\cdot\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\cdot\sqrt{21}$$

2. Montrer que les points A, B et D définissent un plan.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

Exercice 4049

Soit A, B et C trois points non-alignés.

1. a. Soit M le point défini par la relation vectorielle :
$\overrightarrow{AM}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$

   Déterminer les valeurs de α pour lesquelles :
   - le point M appartient au segment $[AB]$;
   - le point M appartient à l'ensemble $(AB)\backslash[AB]$

   b. Déterminer les conditions sur les deux nombres réels a et b afin que le barycentre G du système pondéré :
$\{(A\,;a)\,;\,(B\,;b)\}$
appartienne au segment $[AB]$.

2. On considère le barycentre H du système pondéré :
$H\{(A\,;a)\,;\,(B\,;b)\,;\,(C\,;c)\}$

   Déterminer les conditions sur a, b et c afin que le point H appartiennent à l'intérieur du triangle ABC.

Exercice 4057

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$. Soit A le point de coordonnée $(3\,;1\,;3)$.

On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;2\,;-1)$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases}\quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Dire laquelle des trois affirmations suivantes est exacte. Aucune justification n'est demandée :

1. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et parallèles ;
2. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et sécantes ;
3. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non coplanaires.

Exercice 4059

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse :

Soit B et C deux points de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$

est la sphère de diamètre $[BC]$.

Exercice 4060

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$, on les points :

$A\,(0\,;0\,;2)$; $B\,(0\,;4\,;0)$; $C\,(2\,;0\,;0)$

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B et C.

Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse :

La droite (AG) admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2-2t \end{cases}\quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Exercice 4064

Dans le plan $(\mathcal{P})$, on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur $[AH]$ tel que $AH=BC=4$. On prendra le centimètre pour unité.

1. En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés :
$\{(A\,;2)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;1)\}$

2. On désigne le point M un point quelconque de $(\mathcal{P})$.

   a. Montrer que le vecteur $\vec{V}=2\cdot\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.

   b. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que :
$$\|2\cdot\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\vec{V}\|$$

3. On considère le système de points pondérés :
$\{(A\,;2)\,;\,(B\,;n)\,;\,(C\,;n)\}$
où n est un entier naturel fixé.

   a. Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0, G_1, G_2.

   b. Montrer que le point G_n appartient au segment $[AH]$.

   c. Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.

Préciser la position limite de G_n quand n tend vers $+\infty$.

d. Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que :
$\left\|2\cdot\overrightarrow{MA}+n\cdot\overrightarrow{MB}+n\cdot\overrightarrow{MC}\right\|=n\cdot\left\|\overrightarrow{V}\right\|$
Montrer que E_n est un cercle qui passe par le point A. En préciser le centre et le rayon, notée R_n.

e. Construire E_2.

Exercice 4065

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

On considère les droites (d) et (d') admettant respectivement les représentations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x=1+2\cdot t \\ y=-2-3\cdot t \\ z=-1-t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x=2-k \\ y=1+2\cdot k \\ z=k \end{cases} \text{ où } k\in\mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

Exercice 4066

On considère les deux droites de représentation paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=-3+2t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x=7+2u \\ y=2+2u \\ z=-6-u \end{cases} \text{ où } u\in\mathbb{R}$$

Montrer que ces deux droites sont sécantes. Donner les coordonnées du point d'intersection.

Exercice 4067

1. On considère les deux droites (d) et (d') dont les représentations paramétriques sont respectivement :

$$\begin{cases} x=2+4\cdot t \\ y=1-2\cdot t \\ z=-3+t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x=5-2\cdot k \\ y=-1+k \\ z=2-\dfrac{1}{2}\cdot k \end{cases} \text{ où } k\in\mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont coplanaires.

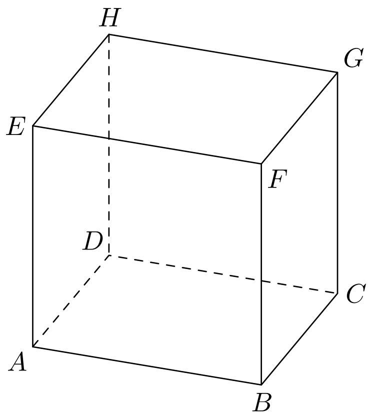
2. On considère les droites (Δ) et (Δ') dont les représentations paramétriques sont respectivement :

$$\begin{cases} x=3+2\cdot t \\ y=-3-t \\ z=6+3\cdot t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x=-1-k \\ y=2+2\cdot k \\ z=1-k \end{cases} \text{ où } k\in\mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (Δ) et (Δ') sont coplanaires.

Exercice 4068

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal $\left(D\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ tel que :

$$\overrightarrow{i}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DA} \quad ; \quad \overrightarrow{j}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DC} \quad ; \quad \overrightarrow{k}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DH}$$

1. Donner les coordonnées des points A, C et E.

2. Déterminer les coordonnées du point I barycentre du système $\{(C\,;2)\,;\,(E\,;1)\}$

3. Déterminer les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DI}$.

Exercice 4069

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique : 2 cm)*.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A=-\frac{3}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad z_B=\overline{z_A} \quad ; \quad z_C=-3$$

Partie A

1. Ecrire les nombres complexes z_1 et z_B sous forme exponentielle.

2. Placer les points A, B et C.

3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{1}{3}\cdot i\cdot z^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

   b. Placer les points A', B' et C'.

   c. Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f.

   a. Déterminer les affixes des points G et G'.

   b. Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C' ?

3. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation :
$y=-\dfrac{1}{3}\cdot x^2+\dfrac{3}{4}$
(On ne demande pas de tracer cette parabole)

Exercice 4070

Pour l'affirmation suivante, une seule des propositions proposées est exacte. Donner la réponse exacte :

Soit $ABCD$ un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{2}\right)$. On note I le centre du carré.

L'ensemble des points M du plan tels que :
$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB$
est :

1. la médiatrice de $[AC]$.

2. le cercle circonscrit au carré $ABCD$.

3. la médiatrice de $[AI]$.

4. le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

Exercice 4073

Dans le plan complexe rapporté au repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ orthonormal direct, le point A a pour affixe i.

A tout point M d'affixe z avec $z \neq i$, on associe le point M' dont l'affixe est définie par :

$$z' = \frac{-z^2}{z-i}$$

On nomme G l'isobarycentre des points A, M et M' et g l'affixe de G :

1. Vérifier l'égalité : $g = \dfrac{1}{3 \cdot (z-i)}$

2. En déduire que : si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3 \cdot r}$.

3. Démontrer que : $\arg(g) = -\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)$

Exercice 4108

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ orthonormal direct. On prendra pour unité graphique $1\,cm$

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives :

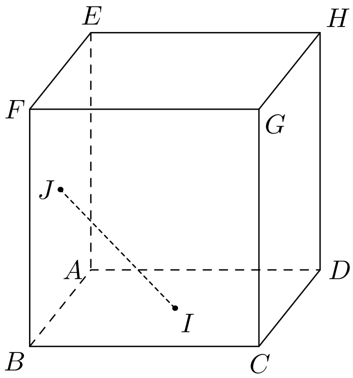
$$z_A = 3 + 2 \cdot i \quad ; \quad z_B = -3 \quad ; \quad z_C = -1 - 6 \cdot i$$

Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

Exercice 4129

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$. Les points I et J représentent respectivement les centres des faces $ABCD$ et $ABFE$.



On munit l'espace du repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Donner les coordonnées des points I et J.

   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. On considère la droite (Δ) admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \dfrac{1}{2} + 2 \cdot t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

   Démontrer que les droites (Δ) et (IJ) sont non-coplonaires.

3. a. Justifier que le plan (AGH) admet pour équation : $y - z = 0$

   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (AGH).

Exercice 4241

On considère un tétraèdre $ABCD$. On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que :

$$AB = CD \quad ; \quad BC = AD \quad ; \quad AC = BD$$

(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques)

1. a. Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

   b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

Exercice 4243

Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant l'égalité :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Exercice 4244

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

1. Exprimer plus simplement le vecteur :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

2. En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$ est nul.

3. Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}$ est nul.

4. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

Exercice 4246

Dans l'espace, on considère trois points A, B et C. On note G le barycentre du système :

$$\left\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;2)\right\}$$

On considère La transformation, qui à tout point M de l'espace associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC}$$

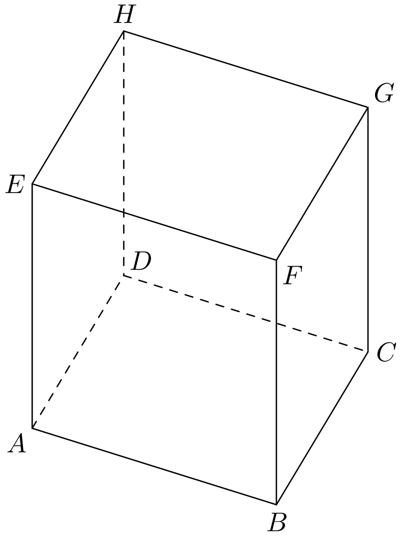
Justifier que cette transformation est l'homothétie de centre G et de rapport 3.

Exercice 4247

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 3

On choisit le repère orthonormal $\left(D\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{i} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{DA} \quad ; \quad \vec{j} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{DC} \quad ; \quad \vec{k} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{DH}$$



1. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C\,;2)\,;\,(E\,;1)\}$.

On admet que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ ont les coordonnées suivantes :

$\overrightarrow{AE}\,(0\,;0\,;3)$; $\overrightarrow{DL}\,(1\,;2\,;1)$

Soit $(a\,;b)$ un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que : $\overrightarrow{AM}=a\cdot\overrightarrow{AE}$
et N le point de la droite (DL) tel que : $\overrightarrow{DN}=b\cdot\overrightarrow{DL}$

2. Montrer que les vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple $(a\,;b)$vérifie le système :
$$\begin{cases} -a+2b=1 \\ 3a-b=0 \end{cases}$$

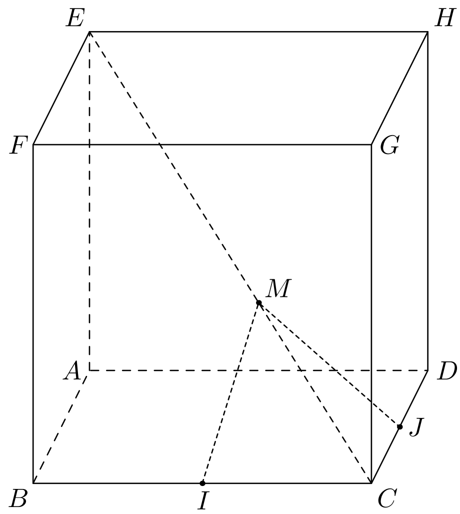
3. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

4. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

Exercice 4313

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$. Soit M un point quelconque du segment $[CE]$.

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.



1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.
   b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\,;1-t\,;t)$.

2. a. Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment $[IJ]$.
   b. En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.
   c. Exprimer IM^2 en fonction de t.

