Terminale S/Annales (hors programme)

1. Suite : passage à la limite :

Exercice 5142

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par :
$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la coube $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
3. En déduire que si $x\geqslant e$ alors $f(x)\geqslant e$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la sutie (u_n) définie par :
$u_0=5$; $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera appartens les traits de construction.

   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant e$.

   b. Déterminer les variations de la suite (u_n).

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

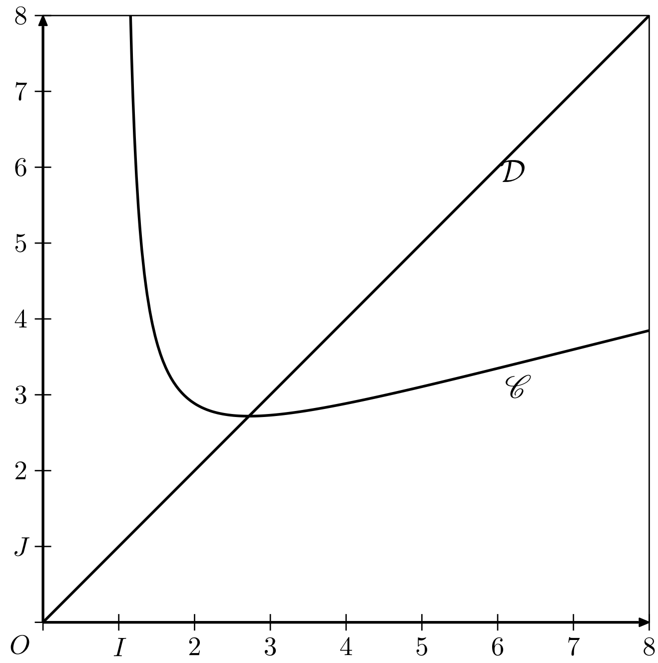
   d. Déterminer sa limite ℓ.

3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle
Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y.
Tant que    X > 2,72
   Faire
      Affecter (X/ ln X) à X
      Affecter Y+1 à Y
   Fin de Tant que
Afficher Y
```

A l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme :

n	u_n
0	5
1	3,106 674 672 8
2	2,740 652 532 3
3	2,718 372 634 6
4	2,718 281 830 01
5	2,718 281 828



Exercice 3964

On considère l'équation notée : (E): $\ln x=-x$

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x)=x+\ln x$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. Vérifier que : $\dfrac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$

 (cc) BY-NC

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{4{\cdot}x - \ln x}{5}$$

1. Etude de quelques propriétés de la fonction g.

   a. Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   b. En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

   c. Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $g(x)=x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par :

   $$u_{n+1} = g(u_n)$$

   a. En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

   $$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

3. Recherche d'une valeur approchée de α :

   a. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.

   b. On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à $5{\times}10^{-4}$ près de α.

   En déduire un encadrement de α sous la forme :

   $$u \leqslant \alpha \leqslant v$$

   où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

Exercice 5152

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 5{\cdot}\ln(x+3) - x$

1. a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;+\infty[$.

   b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   c. Montrer que, pour tout x strictement positif, on a :

   $$f(x) = x{\cdot}\left(5{\cdot}\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5{\cdot}\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

   d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

   e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On notera α cette solution.

   b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\,;15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

   c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Partie B

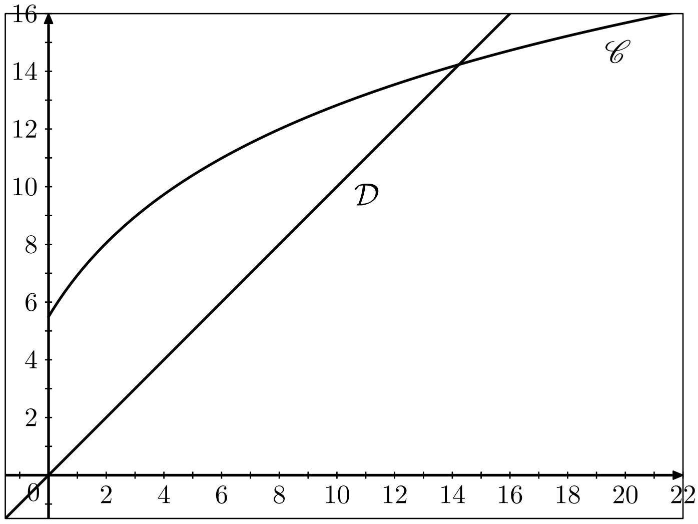
Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1}=5{\cdot}\ln(u_n+3) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 5\ln(x+3)$$

Ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$ et la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction g.



1. a. Construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

   b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n).

2. a. Etudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   b. Vérifier que $g(\alpha)=\alpha$ où α est défini dans la partie **A** question 2. a..

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

   $$0 \leqslant u_n \leqslant a$$

   d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie **B**.

   e. En utilisant la question 2. a. de la partie **A**, justifier que :

   $$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \alpha$$

3. On considère l'algorithme suivant

```
u prend la valeur 4.
Répéter Tant que (u−14,2<0)
      u prend la valeur de 5·ln(u+3)
Fin du Tant que
Afficher u
```

   a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Justifier que cet algorithme se termine.

   b. Donner la valeur que cet algorithme affiche *(on arrondira à 5 décimales)*.

Exercice 3200

 BY-NC

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=\frac{x}{\ln x}$$

1. a. Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

   b. Etudier les variations de la fonction f.

2. Soit (u_n) la suite définie par :
   $u_0=5 \quad ; \quad u_{n+1}=f(u_n) \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   a. On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y=x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n\geqslant e$ *(on pourra utiliser la question 1. b.)*

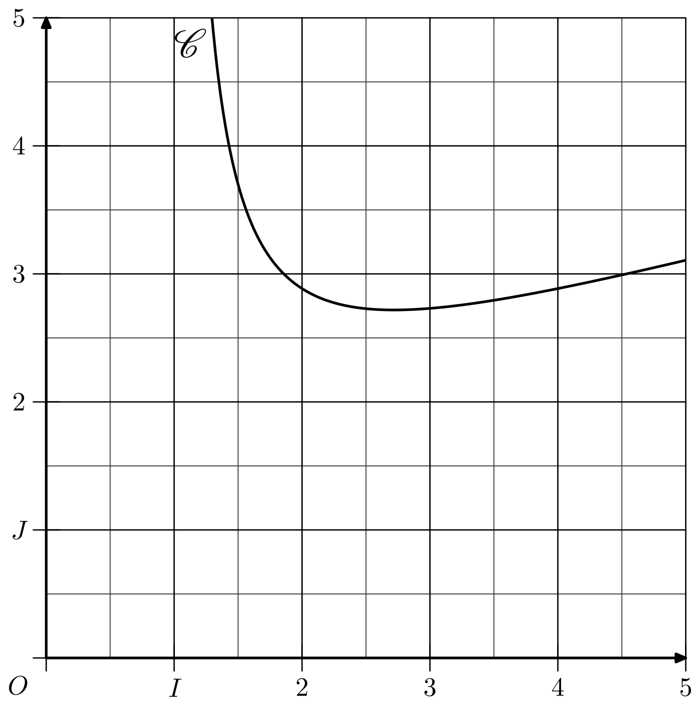
   c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[e\,;+\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$:

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $\big(f(u_n)\big)$, démontrer que : $\quad f(\ell)=\ell$.

2. En déduire la valeur de ℓ.



2. Intégration : par parties :

Exercice 3138

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x)=\left(2x^3-4x^2\right)\cdot e^{-x}$

   a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

   b. Calculer $f'(x)$ et montrer que :
   $f'(x)=2x\left(-x^2+5x-4\right)\cdot e^{-x}$.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

   d. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$ *(unité graphique : 1 cm)*.

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $\quad I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\cdot e^{-x}dx$

   a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

   b. On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2 :
   $I_n=n\cdot I_{n-1}-\dfrac{1}{e}$.
   Détermienr I_2 et I_3.

   c. Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimé en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. Calculer $\mathcal{A}$.

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   On définit la fonction v sur $]0\,;+\infty[$ par $v(x)=u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   a. On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\,;b]$ *(où $0<a<b$)*.

   Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\,;\dfrac{1}{a}\right]$.

   b. On définit maintenant la fonction g par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\,;+\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
   Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

   c. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

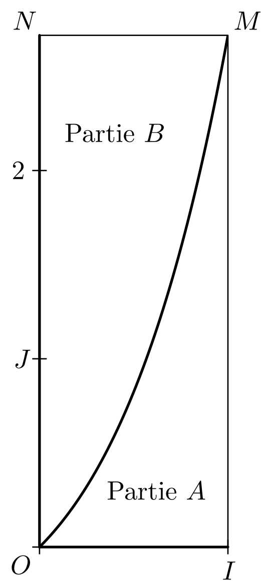
Exercice 3201

Première partie

Calculer l'intégrale : $\quad\displaystyle\int_0^1 x\cdot e^x\,dx$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire $OIMN$ telle que, dans le repère orhonormal $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$, la ligne courbe $\mathscr{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\cdot e^x$. Cette courbe partage la cible $OIMN$ en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.



Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontière de la cible, ni la courbe $\mathscr{C}$.

Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à

 (cc) BY-NC

leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\dfrac{1}{2e}$.
Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes :

   a. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de $\mathcal{X}$. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

   b. Soit E l'évènement : "*Exactement deux fléchettes atteignent la partie A*".
   Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

   c. Soit F l'évènement : "*les trois fléchettes atteignent la partie B*". Calculer la probabilité de F *(on donnera la valeur exacte)*.
   Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans partie B ?

3. On lance cette fois de manières indépendante n fléchettes.

   a. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

   b. Déterminer le plus petit entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $p_n \geqslant 0{,}99$.

Exercice 3222

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$$

1. a. Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de :
$$N(x) = -\Big[2\big(x\cdot\sqrt{x} - 1\big) + \ln x\Big]$$

   b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0<x<1$ et $x>1$.

   c. En déduire le sens de variation de f sur $\big]0\,;+\infty\big[$ et les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.

2. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $\big]0\,;1\big]$.

   a. Exprimer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α *(on pourra utiliser une intégration par parties)*.

   b. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

On définit une suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $\big[1\,;2\big]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel } n : \quad u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$$

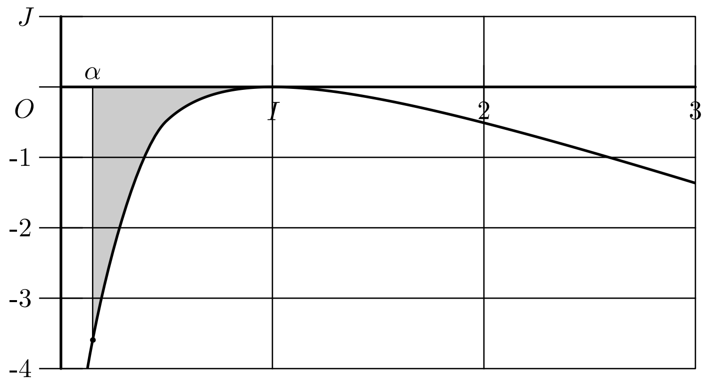
3. a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1\,;2]$, la double inégalité :
$$0 \leqslant \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant 1$$

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $\big[1\,;2\big]$.

4. En remarquant que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)+u_n$, déterminer le sens de variation de la suite $\big(u_n\big)$.

5. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

   b. Déterminer la valeur exacte de ℓ.



Exercice 3262

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ par :

$$\begin{cases} f(0) \;=\; 1 \\[2mm] f(x) \;=\; \dfrac{1}{2}\cdot x^2\cdot\big(3-2\ln x\big)+1 \quad \text{si } x>0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,\big)$.

Partie A

1. a. Calculer $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. a. Etudier la dérivabilité de f en 0.

   b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$, f' désignant la fonction dérivée de f.

3. Etudier le sens de variations de f sur $[0\,;+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x=1$.

2. On considère la fonction $g: x\mapsto f(x)-2x-\dfrac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $\big]0\,;+\infty\big[$.

   a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g. Etudier le sens de variations de g'. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $\big]0\,;+\infty\big[$.

   b. Etudier le sens de variations de g.
   En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}$.

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{D}$ *(unité graphique 2 cm)*

 BY-NC

Partie C

n est un entier naturel non nul.

1. Exprimer en fonction de n le réel : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \cdot \ln x \, dx$

   (on pourra utiliser une intégration par parties)

2. En déduire en fonction de l'entier n, l'aire $\mathscr{A}_n$ exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{D}$ et les deux droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.

3. calculer $\lim_{n \mapsto +\infty} \mathscr{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.

4. Nombres complexes :

Exercice 3156

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ *(unité graphique : 1 cm).*

Partie A

Dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère la courbe $\mathscr{H}$ d'équation : $y^2 - x^2 = 16$.

1. Montrer que $\mathscr{H}$ est la réunion de deux coubes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ et où $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par une transformation simple que l'on précisera.

2. a. Etudier la fonction f *(limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).*

   b. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptot de $\mathscr{C}$.

   c. Tracer $\mathscr{H}$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

   On nomme A et B les points de la courbe d'abscisses respectives -3 et 3. On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan constitué des points $M(x\,;y)$ vérifiant :

   $$-3 \leqslant x \leqslant 3 \quad ; \quad \sqrt{x^2+16} \leqslant y \leqslant 5$$

   Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ et exprimer l'aire de $\mathscr{D}$ à l'aide d'un intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

1. a. Donner l'écriture complexe de r.

   b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image du point $M(x\,;y)$ du plan.

   Vérifier que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x+y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x+y) \end{cases}$

   Déterminer les coordonnées des points A' et B', images respectives de A et B par la rotation r. Placer les points A' et B' dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

2. Soit $\mathscr{H}'$ l'hyperbole d'équation : $x \cdot y = 8$.

   a. Tracer $\mathscr{H}'$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

   b. Montrer que $\mathscr{H}'$ est l'image de $\mathscr{H}$ par la rotation r.

3. Soit $\mathscr{D}'$ l'image de $\mathscr{D}$ par la rotation r. On admet que $\mathscr{D}'$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan vérifiant :

   $$\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 4 \cdot \sqrt{2} \quad ; \quad \frac{8}{x} \leqslant y \leqslant 5 \cdot \sqrt{2} - x.$$

   a. Hachurer $\mathscr{D}'$.

   b. Calculer l'aire de $\mathscr{D}'$, exprimée en cm^2.

   En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de $\mathscr{D}$.

5. Probabilité : adéquations :

Exercice 3154

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleu, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.

Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé. A chaque lancer, on note la couleur de la face cachée.

On considère les évènements suivants :

- E est l'évènement "*à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes*" ;
- F est l'évènement "*à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur*".

1. Calculer les probabilités des évènements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.

2. On effectue dix parties identiques et indépendantes. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties *(on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près)*

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré. Pour cela, on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance, ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est caché ; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d^2_{obs} le réel $\sum_{i=1}^{4} \left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$.

On simule ensuite 1000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble $\{1\,;2\,;3\,;4\}$ puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(F_i - \frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le $9^{\text{ième}}$ décile de la série statistique des 1000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098.

 (cc) BY-NC

Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?

☐ Exercice 3199

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. A chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

- a. Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?
- b. Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?
- c. Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?
- d. Pour quelles valeurs de n a-t-on : $p_n > 0{,}99$?

2. Ce tireur participe au jeu suivant :

Dans un premier temps, il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 *(la face obtenue avec un tel dé est la face cachée)* ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.
Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,4096 *(on pourra utiliser un arbre pondéré)*.

3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela, il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

- a. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.
- b. On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.
- c. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Min.	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Max.
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé ?

☐ Exercice 3219

Pour chacune des trois questions, la totalité des points sera donnée si la réponse est correctement justifiée .
Les trois questions sont indépendantes.

1. La probabilité pour un individu d'une population d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,003. Un test de dépistage, pour cette maladie, a été réalisé ; avec ce test, on peut dire que :

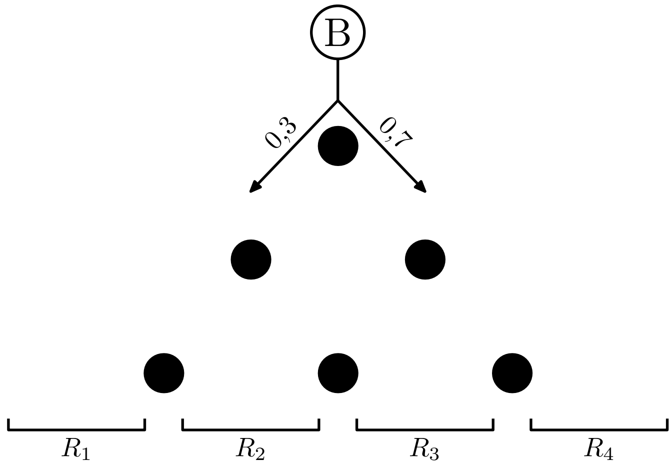
- si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 50 % des cas ;
- le teste est positif pour 3 % des personnes saines.

Quelle est à 0,01 près la probabilité d'avoir la maladie M lorsque le test est positif ?

a. 0,95 b. 0,9 c. 0,15 d. 0,05

2. On considère une planche à clous de ce type.

On lance une boule B du haut de la planche, elle tombe alors dans l'un des quatres récipients notés R_1, R_2, R_3 et R_4. A chaque étape, la bille a une probabilité de 0,3 d'aller vers la gauche et 0,7 d'aller vers la droite *(gauche et droite relatives à l'observateur)*.



On note p_1 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_1 ou dans le bac R_3 et p_2 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_2 ou dans le bac R_4.
Que valent p_1 et p_2 ?

- a. $p_1 = p_2 = 0{,}5$
- b. $p_1 = 0{,}216$ et $p_2 = 0{,}784$
- c. $p_1 = 0{,}468$ et $p_2 = 0{,}532$
- d. $p_1 = 0{,}468$ et $p_2 = 0{,}432$

3. Les 1000 premières décimales de π sont données ici par un ordinateur :

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3233066470 9384460959 0582235725 3594085234
8111745028 4102701930 5211055596 4462294895 4930301964
4288109756 6593344612 8475648233 7867831652 7120190914
5648566923 4603486534 5432664825 3393607260 2491412737
2450700660 6315580574 8815209209 6282925409 1715364367
8925903600 1133053054 8820466525 3841469519 4151160943
3057270365 7595919530 9218611738 1932611793 1051185480
7446297996 2749567355 8857527240 9122793318 3011949129
8336733624 4065664308 6025394946 3952247371 9070217986
0943702770 5392171762 9317675238 4674818467 6691051320
0056812714 5263560827 7857753427 9778900917 3637178721
4684409012 2495343054 6549585371 0507922796 8925892354
2019956112 1290219608 6403441815 9813629774 7713099605
1870721134 9999998372 9780499510 5973173281 6096318599
0244594553 4690830264 2522300253 3446850352 6193110017
1010003137 8387528865 8753320830 1420617177 6691473035
9825349042 8755460731 1595620633 8235378759 3751957781
8577805321 7122600661 3001927876 6111959092 1642019894

En groupant par valeurs entre 0 et 9 ces décimales, on obtient le tableau suivant :

 (cc) BY-NC

Valeurs	0	1	2	3	4
Occurences	93	116	102	102	94

Valeurs	5	6	7	8	9
Occurences	97	94	95	101	106

Avec un tableau, on a simulé 1000 expériences de 1000 tirages aléatoire d'un chiffre compris entre 0 et 9.

Pour chaque expérience, on a calculé $d^2 = \sum_{k=0}^{k=9} \Big(f_k - 0{,}1\Big)^2$ où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k.

On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et neuvième décile *(d_1 et d_9)*, le premier et troisième quartile *(A_1 et Q_3)* et la médiane *(Me))* :

$d_1 = 000\,422$; $Q_1 = 0{,}000\,582$; $M_e = 0{,}000\,822$

$Q_3 = 0{,}00\,1136$; $d_9 = 0{,}00145$

En effectuant le calcul de d_2 sur la série des 1000 premières décimales de π, on obtient :

a. 0,000 456 b. 0,004 56 c. 0,000 314

4. Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π, fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypotès quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse ?

a. Oui b. Non c. Il ne peut pas conclure

6. Probabilités : Dénombrements, combinatoires, factorielles :

Exercice 3119

Un meuble est composé de 10 tiroirs T_1, T_2, ..., T_{10}.
Une personne place au hasard une boule dans des tiroirs et une autre est chargée de *trouver le tiroir contenant la boule* à l'aide de la stratégie suivante :

La personne ouvre le tiroir T_1. Si la boule est dans le tiroir T_1, la recherche est achevée, sinon la personne ouvre le tiroir T_2, et ainsi de suite... en respectant l'ordre des numéros de tiroirs.

On remarquera qu'avec cette stratégie, le tiroir T_{10} n'est jamais ouvert.
Pour i entier compris entre 1 et 10 $(1 \leqslant i \leqslant 10)$, on appelle B_i l'évènement "*la boule se trouve dans le tiroir T_i*".

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs qui ont été ouverts afin de localiser la boule avec cette stratégie.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de X.

2. a. Montrer que, pour i entier compris entre 1 et 8 $(1 \leqslant i \leqslant 8)$, l'événement $[X = i]$ est l'évènement B_i.

   b. Justifier que l'évènement $[X = 9]$ est la réunion des évènements B_9 et B_{10}.

   c. Déterminer la loi de probabilité de X.

   d. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 3230

On note $p_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.

Un urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
On note A_0 l'évènement : "*on n'a obtenu aucune boule noire*"

On note A_1 l'évènement : "*on a obtenu une seule boule noire*" ;

On note A_2 l'évènement : "*on a obtenu deux boules noires*"

Calculer les probabilités A_0, A_1 et A_2.

2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.

On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note B_0 l'évènement : "*on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2*"

On note B_1 l'évènement : "*on a obtenu une sule boule noire au tirage n°2*"

On note B_2 l'évènement : "*on a obtenu deux boules noires au tirage n°2*"

   a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.

   b. En déduire $p(B_0)$.

   c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.

   d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage ; Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?

3. On considère l'évènement R : "*il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'urne*".

Montrer que $p(R) = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 4162

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I, X.

Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivantes :

- A chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;

 CC BY-NC

- on tient pas compte des passages par O.

Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\dfrac{1}{5}$.

2. On note E l'évènement : "*au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre*".

   Démontrer que la probabilité de E est égale à $\dfrac{4}{125}$.

3. On note F l'évènement : "*au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque*".

   Déterminer la probabilité de F.

Partie B - Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il avoir pour que la probabilité de l'évènement : "*au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre*" soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 4198

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année *(n étant un grand nombre inconnu)*, on admet que la variable aléatoire $\mathcal{S}_n$ qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de $\mathcal{S}_n$ notée $E(\mathcal{S}_n)$ est égale à 10.

Soit p la probabilité pour qu'un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité :
$$\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k)=\binom{n}{k}\cdot\Big(\frac{10}{n}\Big)^k\cdot\Big(1-\frac{10}{n}\Big)^{n-k}$$
   où k est un entier naturel tel que $0\leqslant k\leqslant n$.

2. a. Etablir l'égalité :
$$\ln\big[\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}0)\big]=-10\times\frac{\ln\Big(1-\dfrac{10}{n}\Big)}{\dfrac{-10}{n}}$$
   où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}0)=e^{-10}$

   b. Démontrer que :
$$\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k{+}1)=\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k)\times\frac{n-k}{n-10}\times\frac{10}{k+1}$$
   où k est un entier naturel tel que $0\leqslant k\leqslant n{-}1$

   c. Démontrer que si :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k)=e^{-10}\cdot\frac{10^k}{k!}\quad\text{pour } 0\leqslant k\leqslant n,$$
   alors on a également :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k{+}1)=e^{-10}\cdot\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}$$
   pour $0\leqslant k{+}1\leqslant n$.

   d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k)=e^{-10}\cdot\frac{10^k}{k!}$$
   où k est un entier naturel tel que $0\leqslant k\leqslant n$.

3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $e^{-10}\cdot\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $\mathcal{P}(\mathcal{S}_n{=}k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité qu'au cours de cette année, il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

7. Barycentres :

Exercice 3223

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.

Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres -2, -1, 0, 1, 2 et 3.

Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le carton de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés $(A\,;a)$, $(B\,;b)$ et $(C\,;4)$ admettent un barycentre. On le note G.

2. a. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   - E_1 : "*G appartient à la droite (BC)*" ;
   - E_2 : "*G appartient au segment $[BC]$*".

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement E_3 : "*G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés*" est égale à $\dfrac{2}{5}$. On pourra faire appel des considérations de signe.

3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question 1.

   On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement E_3.

   a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ soit égale à 4.

   b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à 0,999.

Exercice 3233

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\,;1\,;1)$.

 BY-NC

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;4\,;-2)$.
Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives :
$$2x+y+2z+1=0 \quad ; \quad x-2y+6z=0$$

a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.

b. Montre que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privée du point C.
Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment $[IC]$ coïncide-t-il avec G ?

Exercice 3194

$ABCDEFGH$ est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

Partie A. Un triangle et son centre de gravité

1. Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.

2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE.

a. Calculer les coordonnées de I.

b. Démontrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?

3. Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B. Une droite particulière

Pour tout nombre réel k, on définit deux points M_k et N_k, ainsi qu'un plan $\mathcal{P}_k$ de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{AM_k}=k\cdot\overrightarrow{AG}$;
- $\mathcal{P}_k$ est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}_k$ et de la droite (BC).

1. Identifier $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.

2. Calcul des coordonnées de N_k.

a. Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

b. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_k$ dans ce repère.

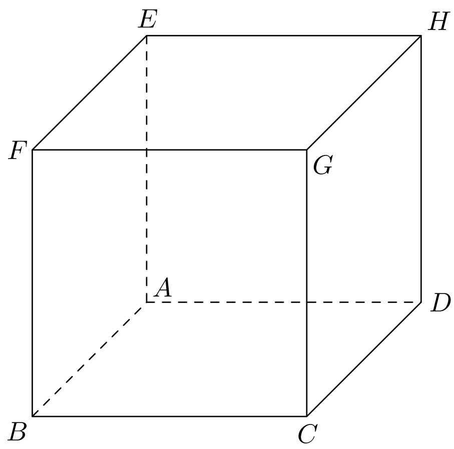
c. En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1\,;3\cdot k-1\,;0)$.

3. Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC) ?

4. Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?

5. Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$.

Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}\right)$ sur la même figure.



8. Produit scalaire (distance d'une point à un plan) :

Exercice 3153

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

1. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $B(1\,;-2\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2\,;1\,;5)$ et le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne $x+2y-7=0$

a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

b. Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point $C(-1\,;4\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;-1\,;1)$.

c. Soit le point $A(5\,;-2\,;-1)$. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.

d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2. **a.** Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2\cdot t\,;3-t\,;t)$.
Déterminer en fonction de t la longueur AM_t.

On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

 CC BY-NC

a. Etudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.

b. Interpréter géométrique la valeur de ce minimum.

255. Exercices non-classés :

Exercice 3123

Dans l'espace muni du repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormal direct, nous considérons les points A de coordonnées $(0\,;0\,;8)$, B de coordonnées $(0\,;0\,;8)$, C de coordonnées $(4\,;0\,;8)$.

1. a. Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice *(unité graphique : 1 cm)*.

b. Démontrer que :
- Les droites (BC) et (BA) sont orthogonales ;
- Les droites (CO) et (OA) sont orthogonales ;
- La droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).

c. Déterminer le volume, en cm^3, du tétraèdre $OABC$.

d. Démontrer que les quatres points O, A, B, C se trouvent sur une sphère dont vous déterminerez le centre et le rayon.

2. A tout réel k de l'intervalle ouvert $]0\,;8[$, est associé le point $M\,(0\,;0\,;k)$.
Le plan (π) qui contient M et est orthogonal la droite (OB) rencotnre les droites (OC), (AC), (AB) respectivement en N, P, Q.

a. Déterminer la nature du quadrilatère $(MNPQ)$.

b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ? Pour quelle valeur de k, la droite (MP) est-elle orthogonale à la droite (AC) ?

c. Déterminer MP^2 en fonction de k. Pour quelle valeur de k, la distance PM est-elle minimale ?

Exercice 3228

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=xe^{-x}$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ *(unité graphique 10 cm)*

Partie A

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c. Construire Γ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

2. a. Montrer que, pour tout réel m de $\left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions.

b. Dans le cas où $m=\dfrac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions *(avec $\alpha<\beta$)*.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Résoudre l'équation $f(x)=m$ dans le cas où $m=0$ et $m=\dfrac{1}{e}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

où α est le réel défini à la question **A** 2. b.

a. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n>0$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n=\ln u_n$.

a. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a :
$u_n = w_n - w_{n+1}$

b. On pose : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.
Montrer que : $S_n=w_0-w_{n+1}$.

c. En déduire : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 *($v_0>0$)* et, pour tout entier naturel n :
$v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$

Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n\geqslant 1$, on ait : $u_n=v_n$?
Si oui, préciser laquelle.

Exercice 3250

Pour chacune des huit affirmations *(entre guillemets)* ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention "vrai" ou "faux".

Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.
Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. "*Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=-\infty$*"

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$, g ne s'annulant pas :

"*Si $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=-\infty$ et si $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$*"

3. "*Si f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que $0\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$ alors $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$*"

4. On considère un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ du plan.

"*Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$*"

5. "*La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2+3x+1)e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :*

 BY-NC

$y'-y=(2x+3)e^{x}$"

6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2

   "*Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients* 3, -2 *et* 1 *alors G est le milieu du segment* $[CI]$"

7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1.

   "*L'ensemble des points M du plan tels que :*
   $\left\|3\cdot\overrightarrow{MA}-2\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$
   est le cercle de centre G et de rayon 1".

8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.

   "*Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est nul si, et seulement si, $M=A$ ou $M=B$*".

Exercice 3126

L'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ orthonormal direct.

Il n'est pas demandé de faire de figure.

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.

On considère les quatre poinrs A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\quad;\quad B\begin{pmatrix}1\\-6\\-1\end{pmatrix}\quad;\quad C\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\quad;\quad I\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

1. a. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, b, C.

2. Soit (Q) le plan d'équation : $x+y-3z+2=0$ et (Q') le plan de repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

   a. Pourquoi (Q) et (Q') sont-ils sécants ?

   b. Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q').

3. Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :
   $$\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\quad;\quad\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$
   Déterminer avec soin l'interesction de la sphère (S) et de la droite (JK).

Exercice 3251

Partie A

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n=\int_0^1(1-t)^n\cdot e^t\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f: t\mapsto(2-t)\cdot e^t$ est une primitive de g: $(1-t)\cdot e^t$ sur $[0\,;1]$.
   En déduire la valeur de u_1.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul :
   $$u_{n+1}=(n+1)\cdot u_n-1\qquad(R)$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par	
	la première calculatrice	la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,0969097075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,9115648000E-01
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*:\quad u_n=\int_0^1(1-t)^n\cdot e^t\,\mathrm{d}t$$

 BY-NC

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant 0$.

2. a. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(1-t)^n e^t \leqslant e \times (1-t)^n$

   b. En déduire que pour tout n non nul : $u_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) :

$$u_{n+1} = (n+1) \cdot u_n - 1$$

Etant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \quad ; \quad v_{n+1} = (n+1) \cdot v_n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n :
   $$v_n = u_n + (n!) \cdot (a + 2 - e)$$
   où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

2. Etudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a. *(On rappelle que* $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} n! = +\infty$*)*

3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

 BY-NC