Terminales S - Spécialité/Congruences

1. Premiers exercices de congruences :

Exercice 3402

Vérifier la véracité de chacune des égalités suivantes :

a. $15 \equiv 27 \pmod{3}$ b. $17 \equiv 11 \pmod{4}$
c. $153 \equiv 237 \pmod{12}$ d. $-5 \equiv 8 \pmod{13}$
e. $-81 \equiv 224 \pmod{6}$ f. $37^4 \equiv 1 \pmod{4}$

Exercice 3365

1. Déterminer une valeur de l'entier $a \in [10\,;20]$ pour laquelle l'égalité est vraie :
   a. $25 \equiv a \pmod{4}$ b. $37 \equiv a \pmod{10}$
   c. $52 \equiv a \pmod{7}$ d. $5 \equiv a \pmod{14}$
   e. $1 \equiv a \pmod{9}$ f. $13 \equiv a \pmod{5}$
2. Déterminer une valeur de n pour laquelle l'égalité est vraie :
   a. $21 \equiv 1 \pmod{n}$ b. $14 \equiv 4 \pmod{n}$
   c. $9 \equiv 14 \pmod{n}$ d. $10 \equiv 25 \pmod{n}$

2. Manipulations algébriques :

Exercice 3468

On considère les entiers :

$$A = 8\,387\,592\,115 \quad ; \quad B = 9\,276\,312\,516$$

1. a. Montrer que $1\,000$ est divisible par 8.
   b. Montrer que A est congru à 3 modulo 8.
   c. Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.
2. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à $A+B$ et à $A \cdot B$
3. a. Montrer que B^2 est divisible par 8.
   b. Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.
   c. Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.

Exercice 3493

Soit n un entier naturel.

1. Développer $(n+3)^4$.
2. Montrer que : $(n+3)^4 \equiv n^4 + 2n^2 + 1 \pmod{4}$
3. Etudier en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4, la divisibilité de $(n+3)^4$ par 4.

Exercice 3278

Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?
2. Démontrer que 7 divise x^2+y^2 si, et seulement si, 7 divise x et 7 divise y.

Exercice 3598

Soit n un entier relatif. Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

$$n^2+n+3 \equiv 0 \pmod{5} \quad \text{si, et seulement si,} \quad n \equiv 1 \pmod{5}.$$

Exercice 3632

1. Montrer que pour tout entier naturel n, 3 divise l'entier $2^{2n}-1$.
2. Soit p un entier naturel. Montrer que parmi les entiers p, $p+10$, $p+20$, un et un seul d'entre eux est divisble par 3.

3. Puissances congru à 0 :

Exercice 738

Soit p une entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un entier naturel non-nul

Montrer que si il existe un entier naturel n tel que $a^n \equiv 0 \pmod{p}$ alors pour tout entier naturel k, on a l'implication : $k \geqslant n \implies a^k \equiv 0 \pmod{p}$

Exercice 5453

 BY-NC

1. Déterminer le plus petit entier k réalisant l'équivalence :
   $6^k \equiv 0 \pmod{4}$

2. Pour tout entier naturel a, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir la congruence ci-dessous pour tout entier naturel n non-nul :
   $(a+6)^n \equiv a^n + 6{\cdot}n{\cdot}a^{n-1} \pmod{4}$

Exercice 5454

1. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n réalisant la congruence :
   $6^n \equiv 0 \pmod{8}$

2. Pour tout entier naturel n, déterminer la valeur du reste de l'entier A défini ci-dessous par la division euclidienne par 8 :
   $A = 6^n + 9^n$

4. Puissances, congruences et cyclicités :

Exercice 3403

1. a. Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 7^n par 4 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

   b. En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{235} par 4.

2. a. Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 12^n par 5 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

   b. Etablir que l'entier $\left(12^{39}-3\right)$ est divisible par 5.

Exercice 5037

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4
Reste de 3^n par 5					

2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a :
   $2008^{4\cdot n} \equiv 1 \pmod{5}$

3. En déduire que $2008^{2008}-31$ est divisible par 5.

Exercice 3571

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2\,009$ par 11.

2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}+2\,009$ par 11.

Exercice 3408

1. a. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers 3^n pour $n\in\mathbb{N}$ où $n \leqslant 6$.
   On complétera le tableau suivant :

Puissance de 3	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
Reste modulo 7							

   b. En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, 3^{6k} est congru à 1 modulo 7.

2. a. Déterminer le plus petit entier naturel congru à 1515 modulo 7.
   b. Après avoir remarqué que $2004=6\times334$, déduire de la question 1. le reste de la division euclidienne de 1515^{2004} par 7.
   c. Montrer que dans la division euclidienne de 1515^{2006} par 7, le reste est 2.

Exercice 4309

On considère l'entier $N=11^{2011}$. Montrer que l'entier N est congru à 4 modulo 7.

5. Equations :

Exercice 3599

On considère l'ensemble : $A_7=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

1. Pour tout élément a de A_7, écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $a{\cdot}y \equiv 1 \pmod{7}$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

2. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation :
   $3x\equiv5 \pmod{7}$ équivaut à $x\equiv4 \pmod{7}$.

3. Soit a un élèment de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a{\cdot}x\equiv0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

Exercice 5455

Soit x un entier relatif.

1. En étudiant les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 7, résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
   a. $4{\cdot}x \equiv 1 \pmod{7}$ b. $6{\cdot}x \equiv 3 \pmod{7}$

2. En étudiant les restes possibles de la division euclidienne de x par 6, résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
   a. $5{\cdot}x \equiv 2 \pmod{6}$ b. $2{\cdot}x \equiv 3 \pmod{6}$

 CC BY-NC

6. Raisonnement par récurrence :

Exercice 3294

On considère la suite $\left(u_n\right)$ d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 14 \quad ; \quad u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.

Exercice 3457

Montrer par un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, l'entier $5^n - 1$ est un multiple de 4.

Exercice 3494

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$x^n - 1 = \left(x-1\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

255. Exercices non-classés :

Exercice 5820

On considère l'algorithme suivant :

A et X sont des nombres entiers.
Saisir un entier positif A.
Affecter à X la valeur de A.
Tant que X supérieur ou égal à 26
Affecter à X la valeur $X-26$.
Fin du tant que.
Afficher X.

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit l'entier 3 ?
2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit l'entier 55 ?
3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

Exercice 5826

Utiliser les congruences pour calculer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers suivants :

a. 5^6 b. 5^{6p}, pour $p \in \mathbb{N}^*$ c. 33^{38}

Exercice 5830

1. Etudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division par 7 de l'entier :
   $A = n^2 - n + 1$
2. En déduire les entiers n tels que l'entier A soit divisible par 7.
3. Déterminer le reste de la division par 7 de l'entier :
   $B = 2\,753^2 - 2\,753 + 1$

Exercice 6804

On considère l'entier de Mersenne $2^{33}-1$.
Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$(2^{33}-1)\div 3$
2863311530
$(2^{33}-1)\div 4$
2147483648
$(2^{33}-1)\div 12$
715827882,6

Il affirme que 3 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 4 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 12 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.

1. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.
2. En remarquant que $2 \equiv -1 \pmod{3}$, montrer que, en réalité, 3, ne divise pas $2^{33}-1$.
3. Calculer la somme :
   $S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{10}$
4. En déduire que 7 divise $2^{33}-1$.

Exercice 6925

Soit p, q, r trois entiers relatifs vérifiant :

$$\begin{cases} -3p + q + 2r \equiv 0 \pmod{6} \\ 3p - 3q \equiv 0 \pmod{6} \\ 6p + 2q - 2r \equiv 0 \pmod{6} \end{cases}$$

En déduire que ces entiers vérifient le système :

$$\begin{cases} q - r \equiv 0 \pmod{3} \\ p - q \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

 BY-NC