

Terminales S - Spécialité/Annales sur les nombres

255. Exercices non-classés :

Exercice 5302



Le but de cet exercice est de démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n-1$, où n est un élément de \mathbb{N}^* (ensemble des entiers naturels non nuls).

1. Soit E l'ensemble des nombres premiers de la forme $4n-1$ où n est un élément de \mathbb{N}^* .
Montrer que E a au moins deux éléments.
2. On suppose E fini. Soit P le produit de tous les éléments de E et $X=4P-1$.

- a. Trouver un minorant de X .
 - b. Montrer que X n'est pas divisible par 2, et en déduire que tout facteur premier de X est soit de la forme $4n+1$, soit de la forme $4n-1$ où n est un élément de \mathbb{N}^* .
 - c. Montrer que X possède au moins un facteur premier de la forme $4n-1$ où n est un élément de \mathbb{N}^* .
3. En considérant un facteur premier p de X de la forme $4n-1$, la définition de P et la relation $X=4P-1$, achever la démonstration par l'absurde.