ompilerles exercic | mpilerles correctic | Plusd options

Term L spé/Les suites

1. Revisions :

Exercice 49

Une entreprise vous propose de vous employer. Voici les deux contrats qu'elle vous propose :

- *Formule 1* : vous toucherez au départ 1200 € et une augmentation chaque année de 50 €.
- *Formule 2* : vous commencerez avec 1100 € par mois et l'augmentation sera de 5 %

On note u_n votre salaire du premier type n année après votre commencement, u_n votre salaire avec la formule 1 et v_n avec la formule 2.

1. Déterminer la valeur de u_n et v_n en fonction de l'indice n.
2. Que pouvez-vous dire de la croissance de ces deux suites.
3. a. Remplisser le tableau ci-dessous à l'aide des 10 premiers termes de chacune des suites.
   b. Déterminer à partir de quand il est préférable de choisir la seconde formule.
4. A l'aide d'un logiciel tableur, tracer les courbes de ces deux suites et retrouver votre résultat
5. Toujours à l'aide du même logiciel, dîtes avec quelle formule vous avez le plus gagné après 10 ans ? 15 ans ? 20 ans ?

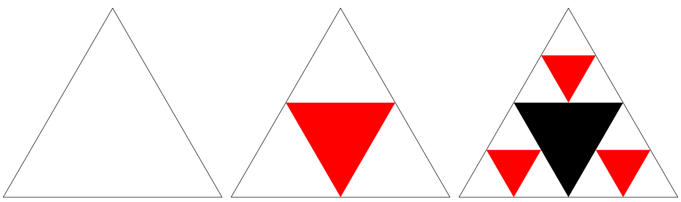
	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		

2. Etude de suites :

Exercice 39

On divise un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux obtenus en traçant les segments joignant les milieux des côtés et on noircit le triangle central.

Chaque triangle non noirci est alors divisé en quatre triangles équilatéraux selon le même procédé et on noircit le triangle central comme précédemment.



1. a. Réaliser la 3$^{\text{ème}}$ étape en partant d'un triangle équilatéral de côté 16 *cm*. Combien de triangles noircis ont-ils été rajouté ?
   b. Combien de triangles noircis seront-ils rajoutés à la quatrième étape ?
2. On note T_n le nombre de triangles noircis rajoutés à la n-ième étape où n est un entier supérieur ou égal à 1. La suite (T_n) ainsi définie, est une suite géométrique de raison 3.
   a. Donner la valeur de T_1, T_2, T_3.
   b. Exprimer T_n en fonction de n. Vérifier les résultats trouvés à la question 1..
3. Calculer le nombre total de triangles noircis après la dixième étape.

4. Suite arithméticoGéométrique :

Exercice 61

On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5$$

On souhaite déterminer l'expression de (u_n) en fonction de son rang :

1. a. On défini la suite (v_n) par : $v_n = u_n + 10$.
   Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.
   b. Etablir l'expression du terme v_n en fonction du rang

n.

2. En déduire une expression du terme u_n en fonction de n.

Exercice 59

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5.$$

1. a. Calculer les termes u_1 et u_2

   b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? On justifiera les réponses.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n + 10$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et calculer le premier terme v_0.

   b. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n)

Exercice 42

Partie A : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 800$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0{,}6u_n + 400.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On définit une autre suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ en posant pour tout entier naturel n, : $v_n = 1000 - u_n$.

   a. Calculer les trois premiers termes de cette suite (v_n).

   b. Montrer que cette suite (v_n) est géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3. a. Déduire des résultats précédents que : $u_n = 1000 - 200 \times (0{,}6)^n$.

   b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Partie B : application

Le président d'une association culturelle constate que chaque année l'association garde 60 % de ses anciens adhérents et que 400 personnes nouvelles adhèrent. On suppose que ces données chiffrées restent les mêmes au fil des ans.
A la création de cette association, en janvier 2001, il y avait 800 adhérents.

1. Calculer le nombre des adhérents en janvier 2002.

2. Quel sera le nombre d'adhérents en janvier 2003 ?

3. En quelle année verra-t-on pour la première fois l'effectif de l'association dépasser 990 ?

Exercice 40

Un directeur de société engage un jeune technicien et lui propose deux types de rémunération à partir du premier janvier 2000.

1. **Premier type de rémunération.**

   Pour cette première année 2000, il percevra 22 400 euros, puis une augmentation annuelle constante de 750 euros. On note u_0 le salaire en euros pour l'année 2000, u_1 le salaire en euros pour l'année 2001, et d'une manière général u_n le salaire en euros pour l'année $2000+n$ *(pour n entier naturel)*

   a. Calculer les salaires annuels u_1 pour l'année 2001 et u_2 pour l'année 2002.

   b. Préciser la nature de la suite (u_n) en indiquant sa raison

   c. Montrer que : $u_n = 22400 + 750n$

2. **Deuxième type de numération**

   Pour l'année 2000, il percevra aussi 22 400 euros, mais ensuite chaque année une augmentation de 3% par rapport à l'année précédente. Dans ce cas, on note v_n le montant en euros de la rémulération pour l'année $2000+n$ *(pour n entier naturel)*

   a. Calculer les salaires annuels v_1 pour l'année 2001 et v_2 pour l'année 20002.

   b. Montrer que $v_{n+1} = 1{,}03 \cdot v_n$ pour tout n. En déduire la nature de la suite (v_n).

   c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3. **Comparaison**

   a. Calculer dans chacun des deux cas le salaire annuel pour l'année 2008.

   b. Pour cette année 2008, préciser le type de rénumération le plus avantageux.

Exercice 41

Partie A : Etude d'une suite

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1\,500\,000 \\ u_{n+1} &= 1{,}013u_n + 1\,300 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2

2. On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n + 100\,000$

   a. Calculer v_0.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n ;
   $v_{n+1} = 1{,}013v_n$.
   En déduire la nature de la suite (v_n).

   c. Déterminer v_n en fonction de n.
   En déduire que : $u_n = 1\,600\,000 \cdot (1{,}013)^n - 100\,000$.

   d. Calculer u_{18}. Le résultat sera arrondi à l'entier le plus proche.

Partie B : Application

Pour cette partie, tous les résultats numériques seront arrondis à l'entier le plus proche

Une étude de la population d'un département laisse apparaître les indormations suivantes :

- la population est estimée à 1 500 000 habitants en 2002
- le taux d'accroissement naturel est de 1,3% par an,
- le flux migratoire *(différence entre le nombre de personnes entrant dans le département et le nombre de personnes en sortant)* est estimé à 1300 habitants par an.

On estime que ces données resteront constantes au fil des ans

1. Déterminer la population estimée de ce département en 2003 et 2004

2. On pose $w_0 = 1\,500\,000$. Pour tout entier naturel n, on désigne par w_n une estimation du nombre d'habitants de ce département durant l'année $(2002+n)$

   a. Vérifier que $w_{n+1} = 1{,}013 w_n + 1300$ pour tout entier naturel n.

   b. En utilisant la partie A, déduire une estimation de la population de ce département en 2020.

Exercice 64

Deux amis, Agnès et bénédicte gagnent 2 000 € à un jeu. Elles partagent cette somme en deux parts égales.

Partie A

Agnès, qui a déjà 3 000 € d'économies, ajoute ses 1 000 € à ses économies et place le total sur un livret d'épargne qui rapporte 3,5% d'intérêt par an *(intérêt composés)*.

On note u_0 le capital placé $(u_0 = 4000)$, u_1 le capital acquis au bout d'un an, et plus généralement u_n le capital acquis au bout de n années.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

3. Exprimer le terme général u_n en fonction de n.

4. Quel sera le capital obtenu au bout de 6 ans ? *(On arrondira le résultat au centime)*

Partie B

Bénédicte choisit un compte épargne dont le taux mensuel est de 0,25 % et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 50 €. Les intérêts acquis sont capitalisés à la fin de chaque mois.

On note v_0 le capital placé $(v_0 = 1000)$, v_1 le capital acquis au bout d'un mois, et plus généralement v_n le capital acquis au bout de n mois.

1. Calculer v_1 et v_2 *(on arrondira le résultat au centime)*. Vérifier que : $v_3 = 1157{,}89$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n + 20000$.

   a. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 1,0025. Préciser w_0 et exprimer le terme général w_n en fonction de n. En déduire v_n en fonction de n.

   b. Calculer le capital acquis par Bénédicte au bout de 6 ans *(soit 72 mois)*. *(On arrondira le résultat au centime)*

Exercice 52

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 0{,}7$ et par la relation de récurrence :

$u_{n+1} = 2u_n - 0{,}4 \qquad$ *(n entier naturel)*

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout n entier naturel par : $v_n = u_n - 0{,}4$.

   a. Calculer v_0.

   b. Montrer que : $v_{n+1} = 2 \cdot v_n$

   c. En déduire la nature de la suite.

   d. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Partie B

La règle de Titius-Bose *(connue vers 1770)* permet de retrouver approximativement la distance au Soleil de la plupart des planètes du système solaire. Pour cela, on prend comme unité la distance de la Terre au Soleil qui vaut environ 150 millions de kilomètres. Cette distance est appelée unité astronomique *(u.a.)*. Ainsi, $1\, u.a. \simeq 15 \times 10^7\, km$. En écriture moderne, la loi de Titius-Bode s'exprime par la formule suivante :

$u_n = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^n$

où pour un planète donnée u_n est la distance au Soleil de cette planète (en u.a.) et n est le rang de la planète, défini dans le tableau ci-dessous :

Planète	Vénus	Terre	Mars	(Cérès)*	Jupiter	Saturne	Uranus
Rang n	0	1	2	3	4	5	6

(*) La lacune observée entre les orbites de Mars et Jupiter fut comblée en 1801 par la découverte de la planète Cérès, puis plus tard de milliers d'astéroïdes

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							

2. a. Calculer la distance approximative au Soleil de la planète Uranus *(on donnera le résultat en millions de kilomètres)*.

   b. Calculer le rang de la planète dont la distance approximative au Soleil est 780 millions de kilomètres. De quelle planète s'agit-il ?

5. Somme des termes et limites de suites :

Exercice 60

Gaston hésite entre deux contrats d'embauche pour lesquels le salaire du premier mois est de 1600 euros.

- Contrat n°1 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire mensuel augmente de 10 euros.
- Contrat n°2 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire augmente de 0,6% par rapport au mois précédent.

1. Pour chacun des deux contrats, déterminer la nature de la suite des salaires mensuels, préciser le premier terme et la raison.

2. Pour chacun des deux contrats, calculer le total des salaires perçus pendant la première année.

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel mois le salaire mensuel correspondant au contrat $n^o 2$ devient supérieur à celui du contrat $n^o 1$. Justifier correctement la réponse.

On rappelle :

- La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q $(q \neq 1)$ est :
$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$
- La somme S' des n premiers termes d'une suite arithmétique (v_n) de raison r :
$$S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = n \cdot v_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 44

Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes.
Les résultats demandés seront arrondis au centième.

Pour effectuer un achat dont le coût s'élève à 1 600 € un client a le choix entre deux formes de paiement.

1. Dans cette question, le premier versement s'élève à 150 € et on effectue une suite de versement notée (a_n) qui vérifie $a_0 = 150$ et, pour tout entier n :
$$a_{n+1} = 0{,}95 a_n + 100$$
   a. Calculer le deuxième versement a_1 et le troisième a_2.
   b. Montrer qu'avec cinq versement, la somme de 1 600 € est remboursée.

2. Dans cette question, le premier versement s'élève à 200 €, puis chaque versement est égal au précédent diminué de 5%

   On note (b_n) la suite des versements avec $b_0 = 200$.
   a. Vérifier que $b_1 = 190$ et calculer b_2 et b_3.
   b. Exprimer le terme b_{n+1} en fonction de b_n.
   En déduire la nature de la suite (b_n) et donner l'expression du terme général b_n en fonction de n
   c. Calculer en fonction de n la somme S_n égale à :
   $$b_0 + b_1 + \cdots + b_n$$
   des $(n+1)$ premiers versements. Calculer les sommes S_8 et S_9 et interpréter le résultats

6. Comportement asymptotique :

Exercice 45

1. On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme 20 et de raison -1.
   a. Exprimer u_n en fonction de n.
   b. Donner l'expression de la somme des n premiers termes.
   c. En déduire la limite suivante :
   $$\lim_{n \mapsto +\infty} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

2. On considère une suite géométrique (v_n) de premier terme 20 et de raison 0,6.
   a. Exprimer v_n en fonction de n.
   b. Donner l'expression de la somme des n premiers termes de la suite (v_n).
   c. En déduire la limite suivante :
   $$\lim_{n \mapsto +\infty} v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

Exercice 54

Il est assez curieux qu'une infinité de termes positifs que l'on ajoute au fur et à mesure puisse donner un résultat fini. Ainsi le Grec Zénon prétendait, au IV^ème^ siècle avant J.C., démontrer qu'il est impossible d'aller d'un point à un autre car "avant d'atteindre le but, il faut arriver au milieu de la route, puis atteindre le milieu du trajet à parcourir, et ainsi de suite : comme il y a une infinité d'étapes à observer, on ne peut arriver au bout de son voyage".

Les nombres et leurs mystères - **A. Warusfel**

I- Construction de la figure

Construire un segment $[AB]$ puis,

1. le milieu A_0 de $[AB]$,
2. le milieu A_1 de $[A_0B]$,
3. le milieu de A_2 de $[A_1B]$.

II- Utilisation d'une suite numérique :

On construit ainsi une suite de points A_n tels que pour tout n entier supérieur ou égal à 1, A_n est le milieu du segment $[A_{n-1}B]$.
On suppose que $AB = 2$. On pose :
$$d_0 = AA_0 \quad ; \quad d_1 = A_0A_1 \quad ; \quad d_2 = A_1A_2$$
et pour tout entier $n \geqslant 1$: $d_n = A_{n-1}A_n$.

1. On a $d_0 = 1$, calculer d_1 et d_2.

2. On admet que, pour tout entier naturel n :
$$d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n.$$
   a. En déduire que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Donner l'expression de d_n en fonction de n.

3. On pose : $S_n = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.
   a. Vérifier que : $S_n = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.
   b. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini ?
   c. En donner une interprétation géométrique.

Formulaire : Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q *(avec $q \neq 1$)* :
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exercice 66

un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied.

Il peut, frais et dispos, parcourir $50\,km$ en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de $1\,\%$ tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n-ième jour.

1. Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.

2. Expliquer pourquoi : $d_{n+1} = 0{,}99d_n$.
En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n.

   a. Calculer, en fonction de n, le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.
   $L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

   b. En déduire la limite de L_n lorsque n tend verse $+\infty$.
   Le globe-trotter peut-il gagner ?

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir $4\,999\,km$

On rappelle que :
- La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :
$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n\cdot\frac{u_1 + u_n}{2}$$
- La somme S' des n premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q $(q \neq 1)$ est :
$$S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\cdot\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exercice 1889

Le service commercial d'un journal a constaté que chaque année, il enregistre $1\,000$ nouveaux abonnés mais $50\,\%$ des anciens abonnés environ ne renouvellent pas leur abonnement.

L'objet de cet exercice est d'étudier l'évolution du nombre d'abonnés si cette situation perdure sachant qu'au cours de l'année écoulée, le journal comptait $4\,000$ abonnés.
Dans ce but, on considère la suite (U_n) définie par :

$u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1$

1. Expliquer pourquoi, pour tout entier $n \geqslant 0$, u_n est une approximation du nombre de milliers d'abonnés au bout de n années.

2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

   Pour tout entier naturel n : $u_n > 2$

4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 2$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}5$.
   Préciser la valeur de v_0.

   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

5. a. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que :
   Pour tout entier naturel n : $u_n = 2\cdot\left(1 + 0{,}5^n\right)$

   b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

   c. Donner une interprétation de cette limite.

7. Utilisation du logarithme :

Exercice 63

Soit (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 6$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \qquad \textit{(n est un entier naturel)}$$

1. On pose : $v_n = u_n - 4$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. Montrer que $v_n = 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

2. On pose : $a_n = \ln v_n$.

   a. Montrer que la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $-2\cdot\ln 2$.

   b. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

   c. Déterminer la valeur de n pour laquelle a_n est égale à $-13\cdot\ln 2$.

Exercice 47

Des chardons envahissent une pelouse de deux façons différentes. Ce dimanche 13 juin, ils couvrent $300\,m^2$ de la pelouse. Chaque semaine l'aire de la surface envahie par les chardons augmente d'une part de $4\,\%$ par la prolifération des racines, d'autre part de $13\,m^2$ dus aux graines envolées des jardins voisins.

On appelle u_n, l'aire de pelouse, en m^2, envahie par les chardons au bout de n semaines.

On a donc : $u_0 = 300$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Justifier que pour tout entier naturel n :

   $u_{n+1} = 1{,}04\times u_n + 13$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par $v_n = u_n + 325$.

   a. Démontrer que : $v_{n+1} = 1{,}04v_n$.

   b. En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

4. Exprimer v_n en fonction de n, en déduire que :

   $u_n = 625\times(1{,}04)^n - 325$.

5. Au bout de combien de semaines les chardons auront-ils envahi plus de $700\,m2$ de la pelouse ?

Exercice 31

La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an. En 2000, elle était de 8000 habitants.

1. on désigne par u_n le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2000+n)$. On a donc $u_0=8000$.
   a. Calculer les termes u_1 et u_2.
   b. Exprimer le terme u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n.
   c. Calculer le nombre d'habitants prévu pour l'année 2006.
   d. Déterminer en quelle année la population aura doublé
2. On note v_n l'augmentation par rapport à l'année précédente du nombre d'habitants constatée l'année $(2000+n)$. On a donc, pour tout entier naturel n non nul :
   $v_n = u_n - u_{n-1}$.
   a. Calculer les termes v_1 et v_2.
   b. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.
   c. Calculer la somme $v_1+v_2+\cdots+v_n$ en fonction de n. Vérifier, pour le cas particulier n égal à 6, le résultat obtenu en 1. c.

Exercice 33

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration du carbone 14, corps radioactif, et de son utilisation pour la datation des fossiles ou des squelettes.

Partie A

Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t=0$

Soit N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après

Soit N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles, k un entier naturel.

On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps, d'environ 1,24 % par siècle.

1. Justifier que la suite (N_k) est une sutie géométrique de raison 0,9876
2. Exprimer N_k en fonction de N_0 et de l'entier k
3. Quelle est la limite de la suite (N_k) ? Justifier.

Partie B

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement, ce qui fait que le taux de carbone 14 dans l'atmosphère reste constant.

Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmoshère ; à leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse et celui-ci se désintègre dans les conditions vues dans la partie **A**.

1. Un squelette d'homme préhistorique contient 5 % de carbone 14 initial.
   Justifier que l'on peut estimer son âge à 24 000 ans.
2. On admet que l'on peut ainsi estimer l'âge des fossiles qui contiennent au moins 1% du carbone initial.
   En utilisant des propriétés de la fonction logarithme népérien, déterminer l'âge maximum que l'on peut calculer.

Exercice 38

Pierre opère un placement dans sa banque en versant sur un compte 200 euros, chaque premier janvier à paritr du 01/01/2003. La banque rémunère ce compte au taux annuel de 4 %. On note u_0 le montant initial du compte, donc u_0 et u_n le nmontant au 1^er^ janvier de l'année $(2003+n)$, n étant un entier naturel.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On arrondira au centime d'euro.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On définit une nouvelle suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $\quad v_n=u_n+5000$.
   a. Calculer les trois premiers termes de la sutie (v_n).
   b. Prouver que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
   c. Exprimer alors v_n en fonction de n, puis en déduire que $u_n = 5200\times(1{,}04)^n - 5000$.
4. Combien d'années Pierre devra-t-il attendre, pour disposer d'au moins 3000 euros sur ce compte ?
   Pour cette question, on pourra faire appel à la fonction logarithme népérien notée ln.

8. Raisonnement par récurrence :

Exercice 1838

Soit a un nombre réel, avec $a\neq 1$.
Montrer par récurrence que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$1+a+a^2+\cdot+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Exercice 35

1. Montrer la relation suivante pour $n\in\mathbb{N}$:
   $9\cdot(9^n-2^n)+7\times 2^n$
2. Montrer par récurrence que 9^n-2^n est un multiple de 7 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 36

1. En remarquant que $10x=9x+x$, montrer que la propriété "10^n+1 *est multiple de 9*", dépendant de n, est héréditaire.
2. Pour autant, justifier que cette propriété est toujours fausse ?

Exercice 65

Montrer que $3n^2+3n+6$ est un multiple de 6 pour tout $n\in\mathbb{N}$

Exercice 1847

Montrer par récurrence la propriété :

"n^2+n+2 est pair" $\quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

255. Exercices non-classés :

Exercice 86

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0=6$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3 \quad \textit{(n entier naturel)}$$

1. On pose : $v_n=u_n-4$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Montrer que $v_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n)
2. On pose : $a_n=\ln v_n$
   a. Montrer que la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $-2\ln 2$.
   b. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
   c. Déterminer la valeur de n pour laquelle a_n est égale à $-13\cdot\ln 2$.

