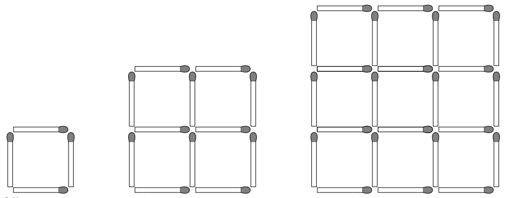
Terminale ES spé/Introduction aux matrices

1. Rappes sur les suites :

Exercice 6144

On considère les constructions suivantes :



1^{er} étape $2^{ième}$ étape $3^{ième}$ étape

On note (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ où u_n représente le nombre d'allumettes nécessaire à la construction de la $n^{ième}$ étape.

Parmi les définitions proposées ci-dessous, laquelle permet de définir la suite (u_n) présentée ci-dessus :

a. $\left\{\begin{array}{rcl} u_1 &=& 4 \\ u_{n+1} &=& 4{\cdot}u_n \end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{rcl} u_1 &=& 4 \\ u_{n+1} &=& u_n+4{\cdot}n \end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{rcl} u_1 &=& 4 \\ u_{n+1} &=& u_n+4{\cdot}(n+1) \end{array}\right.$

d. $\left\{\begin{array}{rcl} u_1 &=& 4 \\ u_{n+1} &=& 4{\cdot}u_n+n \end{array}\right.$

Exercice 6125

On considère les suites numériques, ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$ par récurrence : c'est à dire en fonction de leur valeur initiale et d'une relation avec les termes précédents.

1. $u_0=5$; $u_{n+1}=u_n+2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. $v_0=3$; $v_{n+1}=2{\cdot}v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. $w_0=2$; $w_{n+1}=-w_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. $x_0=4$; $x_{n+1}=2{\cdot}x_n-2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
5. $x_0=1$; $x_1=1$; $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Déterminer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Exercice 6127

1. On considère la suite (u_n) définie explicitement par la relation en fonction du rang n :

   $u_n=3{\cdot}n+2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   Justifier que la suite (u_n) est une suite arithmétique. Donner la raison de cette suite.

2. On considère la suite (v_n) définie explicitement par la relation en fonction du rang n :

   $v_n=2\times3^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique. Donner la raison de cette suite.

2. Rappels sur les systèmes :

Exercice 6118

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :

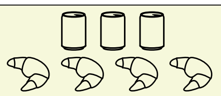
Facture : 4,5 €.

Facture : 10,8 €

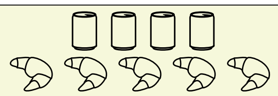
Dans ce café, quels sont les prix d'un croissant et d'un café ?

Exercice 6119

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :



Facture : 11 €.



Facture : 14,3 €

Dans ce café, quels sont les prix d'un croissant et d'une canette ?

Exercice 6120

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :

Facture : 15,2 €.

Facture : 10 €

Quels sont les prix, dans ce café, d'un café et d'une canette ?

Exercice 6121

1. Résoudre par la méthode de combinaisons linéaires le système suivant :

   $$(S):\ \left\{\begin{array}{rcrcl} 3x &+& 2y &=& 5 \\ 4x &+& 3y &=& 3 \end{array}\right.$$

2. Résoudre par la méthode de la substitution le système suivant :

$$(T) : \begin{cases} 3x + y = 16 \\ 8x - 5y = 12 \end{cases}$$

3. Introduction aux matrices :

Exercice 6123

Une entreprise recense le prix en euros des produits qu'elle utilise en lien avec ses différents fournisseurs. Il obtient le tableau à double entrée suivant :

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Fournisseur 1	3,50	2,80	1,75
Fournisseur 2	3,25	3	1,70

Il note l'ensemble de ces valeurs dans la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 3{,}50 & 2{,}80 & 1{,}75 \\ 3{,}25 & 3 & 1{,}70 \end{pmatrix}$$

Les différents nombres placés dans la matrice s'appellent "*les coefficients de la matrice*". On note de manière générale, on note m_{ij} les coefficients de la matrice où i et j sont deux entiers permettant de situer la place du coefficient dans la matrice.

Plus précisement, le coefficient m_{ij} est le prix du "*Produit j*" chez le "*Fournisseur i*".

1. a. Donner les valeurs des coefficients suivant :
   m_{12} ; m_{22} ; m_{13}

   b. Compléter la phrase suivante :
   "*Le coefficient m_{ij} se situe dans la matrice à l'intersection de la ligne ... et de la colonne ...*"

2. Ecrire la nouvelle matrice N exprimant le prix des mêmes produits en francs de l'Afrique de l'Ouest. On utilisera la conversion $1\,€ = 655\,FCFA$ et on arrondira les valeurs à l'unité près.

Exercice 6143

Trois tri-athlètes participent à une course. Les temps de parcours de chacune des épreuves sont données dans le tableau ci-dessous exprimées en minutes :

	Jacques 1er athlète	Henry 2e athlète	Paul 3e athlète
Course à pied *(épreuve 1)*	45	62	34
Natation *(épreuve 2)*	35	24	28
Cyclisme *(épreuve 3)*	92	95	104

On souhaite représenter les données de ce tableau à double entrée par une matrice $A = (a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} est le temps de parcours, exprimé en minutes, de l'athlète i lors de l'épreuve j.

1. Donner les valeurs des coefficients suivants :
   a_{13} ; a_{32}

2. Ecrire la matrice A.

3. On considère la matrice $B = (b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} est la durée, exprimé en heure et arrondie au centième près, du temps de parcours effectué par le participant i lors de l'épreuve j.

   a. Ecrire la matrice B

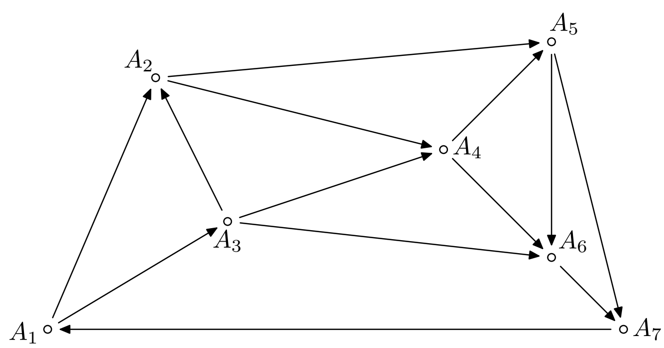
   b. Quel mécanisme simple permet de passer de la matrice A à la matrice B ?

Exercice 6170

Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways*.

Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation *(les "taxiways")* et les sommets du graphe sont les intersections.

Ce graphe est orienté pour indiquer le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies :



Ecrire la matrice $M = (m_{ij})$ associée à ce graphe où le coefficient m_{ij} représentent le nombre de chemin pour aller de l'intersection A_i à l'intersection A_j.
On admet que pour toute valeur de i : $m_{ii} = 0$.

4. Première manipulation de matrices :

Exercice 6141

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Pour mettre en évidence les coefficients de la matrice, on note : $A = (a_{ij})$

1. Donner la valeur des coefficients de la matrice suivants :
   a. a_{23} b. a_{34} c. a_{11} d. a_{31}

2. Déterminer la valeur des calculs suivants :

a. $a_{11}+a_{21}$ b. $a_{32}\times a_{14}$ c. $(a_{24})^2$

3. Citer l'ensemble des couples de coefficients de la matrice opposés entre eux.

☐ **Exercice 6142**

On appelle "*matrice magique*" toute matrice où les sommes des coefficients par ligne, par colonne , par la diagonale principale et par la seconde diagonale donnent toutes le même résultat.

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont des matrices magiques :

a. $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

5. Multiplication par un réel et addition :

☐ **Exercice 6154**

Effectuer les opérations suivantes :

a. $2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b. $4\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

☐ **Exercice 6155**

Effectuer les opérations suivantes :

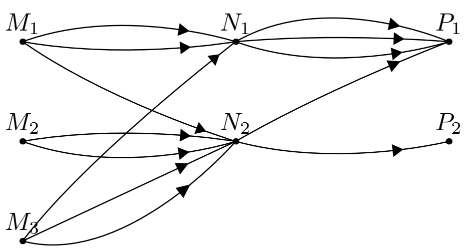
a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. Multiplication de matrices :

☐ **Exercice 6156**

Ci-dessous sont représentés des liaisons routières entre des villes :



1. a. On considère la matrice $A=(a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} représente "*le nombre de route reliant la ville M_i avec la ville N_j*".
Ecrire la matrice A.

   b. On considère la matrice $B=(b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} représente "*le nombre de route reliant la ville N_i avec la ville P_j*".
Ecrire la matrice B.

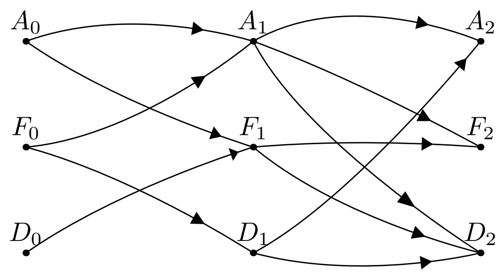
   c. On considère la matrice $C=(c_{ij})$ de dimension 3×2 où le coefficient c_{ij} est définie par :
$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}$
Ecrire la matrice C.

2. a. Combien de trajets permettent de passer de la ville M_1 à P_1 ? de la ville M_1 à P_2 ? de la ville M_2 à la ville P_1 ?

   b. Que remarque-t-on ? Comment peut-on interpréter les coefficient de la matrice C.

☐ **Exercice 6164**

Trois amies Abondance, Fortune et Désirée *(on les considèrera dans cet ordre tout au long de l'exercice)* s'échangent chaque semaine leur shampoing colorant. Ci-dessous, dans le graphe est représenté les différents échanges possibles sur deux semaines



1. On note M la matrice représentant les échanges au cours de la première semaine. Plus précisément, le coefficient m_{ij} représente le nombre de possibilité d'échanges au cours de la première semaine entre la $i^{\text{ième}}$ amies et la $j^{\text{ième}}$ amies.

2. On note N la matrice représentant les échanges au cours de la seconde semaine. Plus précisément, le coefficient n_{ij} représente le nombre déchange au cours de la seconde semaine entre la $i^{\text{ième}}$ amies et la $j^{\text{ième}}$ amies.

3. a. Effectuer le produit matriciel $M\cdot N$.

   b. A l'aide du graphe, déterminer le nombre de possibilités d'échanges pour que le shampoing d'Abondance se retrouve en fin de deuxième semaine entre les mains de Désirée.

☐ **Exercice 6165**

Vérifier les égalités suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5\\13&6\end{pmatrix}$

Exercice 6157

Effectuer les produits de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&4\\1&-1\\2&1\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}5&2\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}$

7. Quelques propriétés de la multiplication :

Exercice 6166

1. Effectuer les produits matriciels suivants :

a. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

2. Que peux-t-on donner comme caractéristique à une matrice ne comportant que des 1 sur sa diagonale principale et des zéros ailleurs ?

Exercice 6167

1. Effectuer les deux produits matriciels suivants :

a. $\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&3\\2&3\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}3&3\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$

2. Effectuer les deux produits matriciels suivants :

a. $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3\\2&3\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}0&3\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

3. Peut-on obtenir une règle sur les produits $A\cdot B$ et $B\cdot A$ de deux matrices ?

8. Inverse de matrices :

Exercice 6173

On souhaite résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S}):\ \begin{cases} x+2y+z=8\\ x+2z=7\\ x+3y=7\end{cases}$$

1. a. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

b. Que peut-on dire des solutions de l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\7\\7\end{pmatrix}$$

2. a. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix}-6&3&4\\2&-1&-1\\3&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\1&3&0\end{pmatrix}$$

b. En utilisant la question précédente, simplifier l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix}-6&3&4\\2&-1&-1\\3&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&3&4\\2&-1&-1\\3&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\7\\7\end{pmatrix}$$

c. Donner le triplet $(x\,;y\,;z)$ solution du système $(\mathcal{S})$ d'équations.

9. Résolution de systèmes sans calculatrice :

Exercice 6183

1. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix}9&3&4\\4&1&2\\6&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&2\\-2&0&3\end{pmatrix}$$

2. On considère le système ci-dessous de trois équations à trois inconnues :

$$(\mathcal{S}):\ \begin{cases} x+y-2z=1\\ -3y+2z=-1\\ -2x+3z=-1\end{cases}$$

a. Déterminer l'expression des deux matrices A et B telles que l'équation matricielle ci-dessous ait les mêmes solutions que le système $(\mathcal{S})$:

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=B$$

b. Résoudre l'équation matricielle précédente.

10. Résolution de systèmes avec calculatrice :

Exercice 6185

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'inverse de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & -4 \\ 3x & - & y & - & z & = & -5 \end{array} \right.$$

11. Etude et résolution de contraintes :

Exercice 6207

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x) = a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x + 10 \qquad \text{où } \left\{ \begin{array}{l} a,\ b \text{ et } c \text{ sont des} \\ \text{nombres réels.} \end{array} \right.$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

Justifier que le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution du système $(\mathcal{S})$.

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 1 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & = & 17{,}4 \\ 125a & + & 25b & + & 5c & = & 73 \end{array} \right.$$

Exercice 6215

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x) = a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x + 10 \qquad \text{où } \left\{ \begin{array}{l} a,\ b \text{ et } c \text{ sont des} \\ \text{nombres réels.} \end{array} \right.$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution du système $(\mathcal{S})$.

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 1 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & = & 17{,}4 \\ 125a & + & 25b & + & 5c & = & 73 \end{array} \right.$$

On pose : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

1. a. Ecrire ce système sous la forme $M{\cdot}X = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

   b. On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet $(a\,;b\,;c)$ solution du système $(\mathcal{S})$.

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

Exercice 6216

On considère la fonction f définie par le polynôme du troisième degré :

$f(x) = a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x + 2$ où $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$

La fonction f admet les images suivantes :

$f(-1) = -8$; $f(1) = 8$; $f(2) = 28$

1. Ecrire un système $(\mathcal{S})$ de trois équations et de trois inconnues dont le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution.

2. On note X la matrice colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   a. Exprimer deux matrices A et Y tel que l'équation $(\mathcal{E})$ matrice ci-dessous admet le même triplet solution du système $(\mathcal{S})$ d'équations :
   $(\mathcal{E})$: $A \cdot X = Y$.

   b. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée du triplet solution de $(\mathcal{S})$ au centième près.

255. Exercices non-classés :

Exercice 6712

Une entreprise recense le prix en euros des produits qu'elle utilise en lien avec ses différents fournisseurs. Il obtient le tableau à double entrée suivant :

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Fournisseur 1	3,50	2,80	1,75
Fournisseur 2	3,25	3	1,70

On note $A = (a_{ij})$ la matrice où les coefficients a_{ij} représentent le prix du "*Produit j*" chez le "*Fournisseur i*".

1. Ecrire la matrice A.
2. Les fournisseurs d'écident d'une augmentation sur leur produit qui sont données dans le tableau ci-dessous

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Fournisseur 1	0,50	0,20	0,25
Fournisseur 2	0,25	0	0,3

Ecrire la matrice B correspond aux augmentations.

3. Ecrire la matrice C correspond aux nouveaux prix.

