Quatrième / Autres

1. Les triplets pythagoriciens :

Exercice 1951

Le triplet $(a\,;b\,;c)$ de nombres entiers est dit pythagoricien si : $a^2+b^2=c^2$

Voici, l'étude de plusieurs manières d'obtenir des triplets de Pythagore :

1. **La formule de Pythagore :**
   a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	$2n{+}1$	$2n^2{+}2n$	$2n^2{+}2n{+}1$
1			
2			
5			

   b. Montrer, à l'aide de la calculatrice, que pour :
   $n=1$; $n=2$; $n=5$
   Les triplets de nombres :
   $\big(2n{+}1\,;n^2{+}2n\,;2n^2{+}2n{+}1\big)$
   sont des triplets pythagoriciens.

2. **La formule de Platon :**
   a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	$2n$	$n^2{-}1$	$n^2{+}1$
1			
2			
6			

   b. Montrer, à l'aide de la calculatrice, que pour :
   $n=1$; $n=2$; $n=6$
   les triplets de nombres $\big(2n\,;n^2{-}1\,;n^2{+}1\big)$ sont des triplets pythagoriciens.

3. **La formule d'Eculide :**
   a. Compléter le tableau ci-dessous :

m	n	$2mn$	$m^2{-}n^2$	$m^2{+}n^2$
2	1			
3	2			
5	2			

   b. Montrer, à l'aide de la calculatrice, que les trois triplets de nombres $\big(2mn\,;m^2{-}n^2\,;m^2{+}n^2\big)$ sont des triplets pythagoriciens.

Exercice 1345

1. En utilisant la double distributivité, montrer l'égalité suivante :
   $(2n^2+2n)(2n^2+2n)=4n^4+8n^3+4n^2$
2. Donner la forme développée et réduite de l'expression suivante :
   $(2n+1)^2$
   (utiliser la double distributivité avec $(2n{+}1)(2n{+}1)$*)*
3. Etablir l'égalité suivante :
   $(2n^2+2n+1)^2=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1$
4. Montrer que le triplet $\big(2n{+}1\ ;\ 2n^2{+}2n\ ;\ 2n^2{+}2n{+}1\big)$ est un triplet pythagoricien pour tout n entier positif.

2. Les racines carrés :

Exercice 1956

> ***Définition :*** *(provisoire)*
> *Soit a un nombre positif. On appelle racine carré du nombre a le nombre positif tel que son carré vale a.*

Commençons par montrer qu'il n'existe qu'un seul nombre faisant commuter le diagramme ci-dessous :

1. Supposons l'existence de deux nombres a et b positif tel que $a^2=b^2$
   a. Développer et réduire l'expression : $(a{+}b)(a{-}b)$.
   b. Que pouvez-vous dire de deux nombres x et y vérifiant :
   $x{\times}y=0$
   c. En déduire que : $a{-}b{=}0$.

Nous venons de montrer l'unicité de la racine carré. La définition précédente se transforme en :

> ***Définition :***
> *Soit a un nombre positif. On appelle racine carré du nombre a l'***unique*** nombre positif tel que son carré vale a. On note ce nombre $\sqrt{a}$*

Etude de quelques propriétés algébriques :

2. a. Calculer le carré du nombre $\sqrt{5}{\times}\sqrt{3}$.
   b. Comparez $\sqrt{5}{\times}\sqrt{3}$ et $\sqrt{15}$

c. De la même méthode, montrer l'égalité suivante pour tout nombre a et b positif :
$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

3. a. Simplifier le calcul suivant : $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

b. Compléter la phrase suivante :
$\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ est un nombre dont le carré vaut ......

c. De même, montrer que pour tous nombres positifs a et b, avec $b \neq 0$, on a :
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Quelques simplifications de fractions :

4. a. Quel nombre élevé au carré vaut 5^2 ?

b. En déduire la valeur de $\sqrt{5^2}$.

c. De la même manière, pour tout nombre réel positif a, déterminer la valeur de $\sqrt{a^2}$

5. a. Etablir l'égalité $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ en élévant chaque membre au carré.
(établissez l'égalité par utilisation de l'égalité)

b. Déterminer deux entiers a et b tel que :
$50 = a^2 \times b$

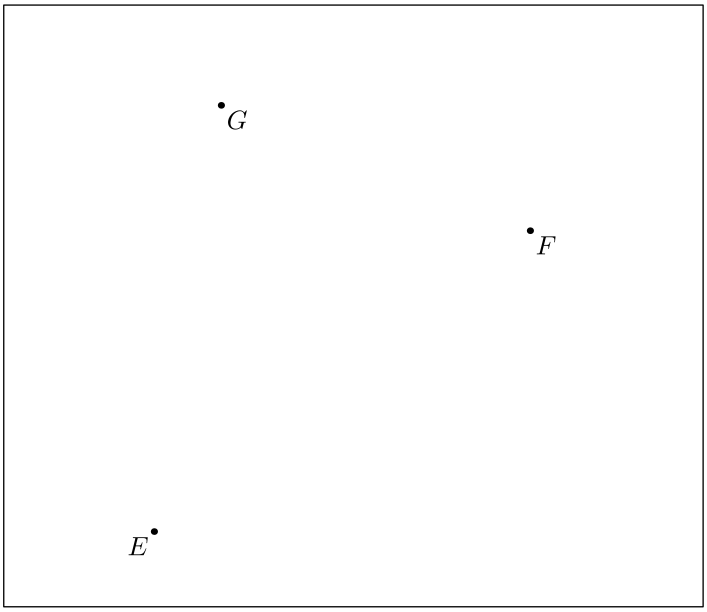
c. Servez-vous des questions 2. et 4. pour établir d'une autre manière l'égalité :
$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

3. Le système GPS et la triangulation :

Exercice 1344

Les seuls instruments autorisés sont le compas et la règle non-graduée :

1. Dans la figure ci-dessous, placer le point R vérifiant les conditions suivantes :
$ER = 5\,cm \quad ; \quad FR = 4\,cm \quad ; \quad GR = 7\,cm$



2. Est-ce que deux points suffisent pour repérer parfaitement la position d'un troisième point dans le plan ? Justifier votre réponse.

La **triangularisation par relevé des distances** *(ou trilatération)* permet de connaître la position exacte d'un point par connaissance de sa distance par rapport à d'autres points.

Dans le plan, à la surface de la terre, il faut au minimum trois points de repère pour repèrer exactement un point.

Exercice 1346

C'est un minéral, le quartz, qui permet de cadencer toutes les montres actuelles. Le quartz est obtenu à partir de la silice qui possède l'effet piézo-électrique découvert par Pierre et Jacques Curie en 1880. Voici une brève description de l'effet piézo-électrique :

- soumit à des contraintes mécaniques *(pression, étirement)*, il développe un champ électrique ;
- soumit à un champ électrique, le quartz va subir des déformations.

La première propriété est utilisée notamment dans les allume-gaz : par pression d'un bouton, l'allume gaz va créer un arc électrique.
La seconde propriété est utilisée dans de mini-moteur *(nanotechnologie)*.

Dans les montres, un système électronique permet d'alterner ces deux propriétés et de stabiliser cette alternance à une fréquence de $32\,768\,Hz$: le quartz va ainsi vibrer de manière régulière 32 768 fois par seconde.

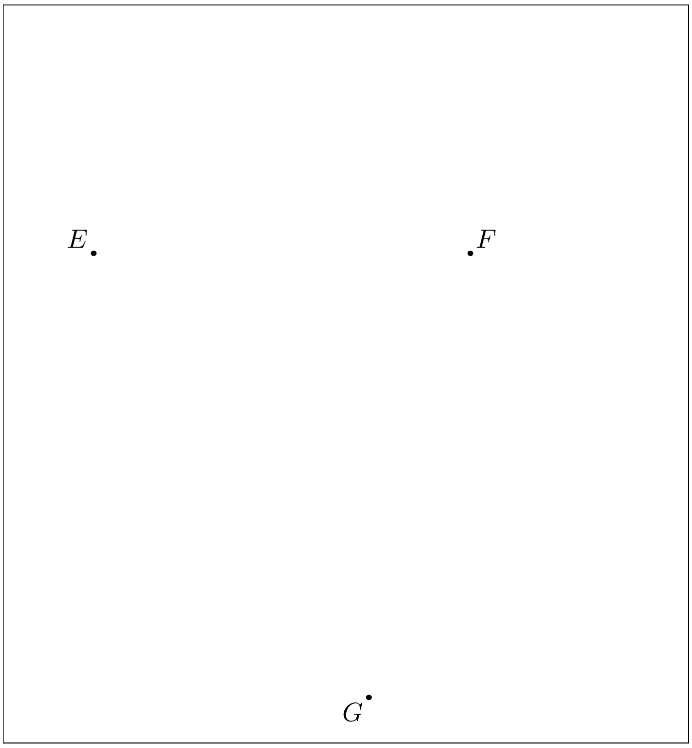
On suppose quatre objets possédant une horloge interne réglée sur la même heure : 3 émetteurs (E, F, G) et 1 recepteur (R).
On suppose que les ondes émises par les 3 émetteurs se propagent à la lumière dont la valeur est $3 \times 10^8\,{}^{m}\!/_{s}$ *(en fait de $299\,792\,458\,{}^{m}\!/_{s}$)*.

Le récepteur R étant réglé sur la même heure, il peut mesurer le temps parcouru par le signal de chaque émetteur. Voici un de ses relevés :

	Temps de parcours du signal	Distance réelle *(en cm)*	Distance à l'échelle *(en cm)*
de E vers R	$0{,}0004\,s$		
de F vers R	$0{,}001\,s$		
de G vers R	$0{,}0017\,s$		

1. Calculer la distance séparant le point M de chacun des recepteurs.

2. Voici les points E, F, G représentés sur une carte à l'échelle ${}^{1}\!/_{6\,000\,000}$

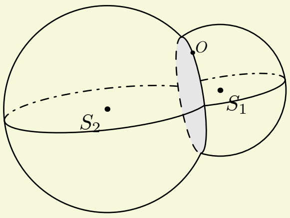


Placer le point R *(les traits de constructions doivent rester apparent)*.

Le système de positionnement GPS *(Global Positioning System)* est composée de 29 satellites en orbite. Chacun de ces satellites embarquent une horloge atomique *(voir encadré)* et envoie un signal à intervalle régulier comprenant la position du satellite et la date et l'heure d'émission du message.

Les systèmes d'horloge à quartz possèdent une marge d'erreur de quelques secondes par an alors que les horloges atomiques, basées sur les propriétés vibratoires de l'atome de césium, possèdent une précision de quelques secondes par million d'années.

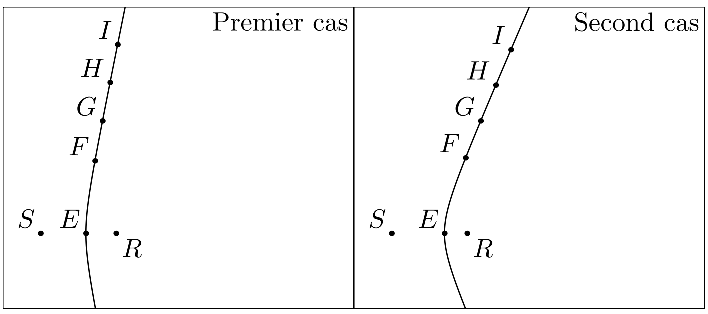
Un observateur O situé sur la terre et recevant le signal de deux satellites et capable de mesurer la distance le séparant de ces satellites. Ceci est insuffisant pour connaître sa position exacte : l'intersection de deux sphères peut être un cercle.

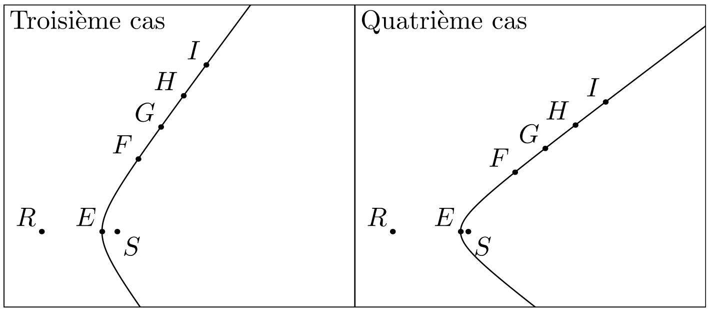


Pour qu'un recepteur GPS fonctionne correctement, il est nécessaire de recevoir au minimum les signaux de 4 satellites pour déterminer sa position sur la terre.

Exercice 1347

Voici quatre figures représentant les mêmes points R et S et une courbe de niveau entre ces deux points.





1. Compléter le tableau suivant :

Dans chacun des cas, remplissez le tableau suivant :

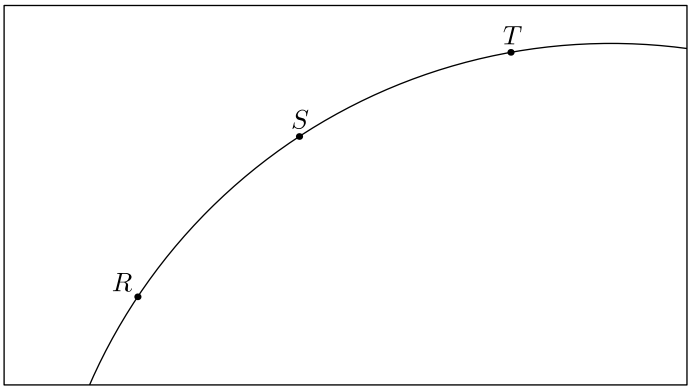
	RF	SF	$RF-SF$	RI	SI	$RI-SI$
1^o						
2^o						
3^o						
4^o						

Chacune de ces courbes représentent l'ensemble des points tel que la différence de distance les séparant des points R et S soit constante.

Ces courbes s'appellent des hyperboles et les points R et S s'appellent les foyers de l'hyperbole.

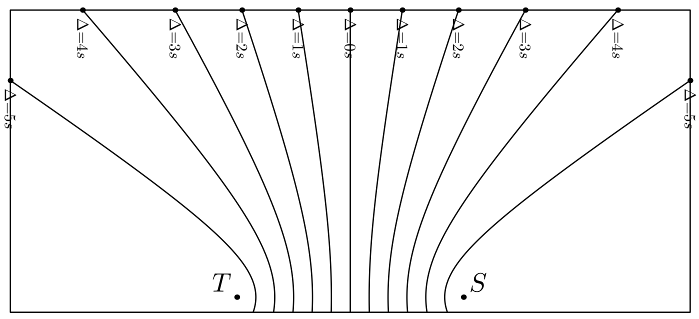
Ces courbes sont notamment utilisées pour connaître l'épicentre d'un tremblement de terre : on ne connait pas l'heure d'émission des ondes sysmiques mais on repère la différence d'arriver du signal entre deux recepteurs.
Dans ce cas, il faut également trois recepteurs pour connaître la position exacte de la source d'émission.

3. Ci-dessous est donné une coupe de la terre, où les points R, S et T représentent des récepteurs placés à la surface de la terre :



On sait que :
- les ondes sysmiques sont arrivés en même temps au recepteur R et S
- alors que le signal est arrivé avec $\Delta = 4s$ secondes d'avance sur le recepteur S en comparaison avec le recepteur T.

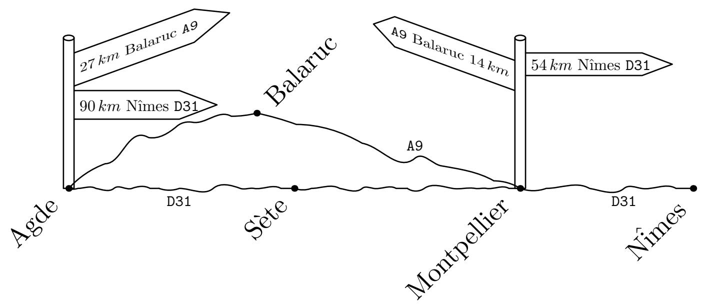
Déterminer la position exacte du foyer F du tremblement de terre.



4. Exercices non-classés :

Exercice 6336

Paul souhaite aller d'Agde à Montpellier. Deux choix s'offrent à lui : soit il prend l'autoroute `A9`, soit il emprunte la route départementale `D31`. Voici, schématisées, les informations qu'il récupère sur une carte :



1. Il estime qu'il roule en moyenne à $110\,{}^{km}\!/_{h}$ sur l'autoroute et à $75\,{}^{km}\!/_{h}$ sur les routes départementales.

   Quel trajet doit-il emprunter pour relier le plus rapidement la ville de Montpellier ?

2. Sur le même trajet, Adeline part à $9h$ en empruntant la route départementale alors que juliette par à $9h15$. Qu'elle est la conductrice qui arrivera à Montpellier le plus tôt.

