

# Hors programme lycée / Vecteurs coplanaires

## 1. Vecteurs coplanaires :

### Exercice 2780

Au fil de cet exercice, nous considérons les deux systèmes suivants de trois équations à trois inconnues :

$$(S) : \begin{cases} 5a - 2b + 3c = 0 \\ -a + 3b + 2c = 0 \\ -a + b - c = 0 \end{cases}$$

$$(T) : \begin{cases} -2a + b - 5c = 0 \\ a - 3b - 5c = 0 \\ 5a - 2b + 14c = 0 \end{cases}$$

On se place dans un repère  $(O; I; J; K)$  pour étudier la coplanarité de vecteurs dans l'espace :

1. a. Montrer que le système  $(S)$  n'admet que le triplet  $(0; 0; 0)$  pour solution.

b. En déduire que les vecteurs :

$$\vec{p}(5; -1; -1) ; \vec{q}(-2; 3; 1) ; \vec{s}(11; 2; -1)$$

sont non-coplanaires.

2. On considère les trois vecteurs suivants :

$$\vec{u}(-2; 1; 5) ; \vec{v}(1; -3; -2) ; \vec{w}(-5; -5; 14)$$

a. Justifier que la coplanarité de ces trois vecteurs est équivalente à la condition :

$$\mathcal{S}(x) \neq \{(0; 0; 0)\}$$

b. En déduire que les trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont coplanaires.

### Exercice 2791

On munit l'espace d'un repère  $(O; I; J; K)$  :

1. On considère les quatre points suivants :

$$A(-5; -2; 3) ; B(0; 0; 6)$$

$$C(-7; -1; 7) ; D(-21; -3; 9)$$

Montrer que les points  $A, B, C, D$  sont coplanaires.

2. On considère les 5 points suivants :

$$E(-2; 1; -1) ; F(-4; 3; -2)$$

$$G(-3; 4; -4) ; H(-5; 6; 2) ; L(-11; 8; 5)$$

Montrer que la droite  $(HL)$  n'est pas parallèle au plan  $(EFG)$ .

### Exercice 2800

Dans l'espace muni d'un repère  $(O; I; J; K)$ , on considère les quatre points suivants :

$$A(5; -4; 3) ; B(7; -5; 6)$$

$$C(10; -2; 1) ; D(-11; -14; 17)$$

Montrer que les points  $A, B, C, D$  sont coplanaires.

### Exercice 2815

On considère dans l'espace muni d'un repère les deux vecteurs suivants définis par leurs coordonnées :

$$\vec{u} = (3; 2; 1) ; \vec{v} = (-1; 3; 1)$$

On considère le vecteur  $\vec{w}$  défini en fonction de  $x$  un nombre réel par ses coordonnées :

$$\vec{w}(2; 16; x)$$

Déterminer le(s) valeur(s) de  $x$  tel(les) que les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont colinéaires.

### Exercice 5437

Dans l'espace muni d'un repère  $(O; I; J; K)$  orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :

$$A(3; -1; 5) ; B(-2; 2; 3) ; C(-1; -2; 4) ; D(5; 8; 4)$$

Les points  $A, B, C, D$  sont-ils coplanaires?

### Exercice 6316

Dans l'espace muni d'un repère  $(O; I; J; K)$  orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :

$$A(3; -1; 5) ; B(-2; 2; 3) ; C(-1; -2; 4) ; D(5; 8; 4)$$

Les points  $A, B, C, D$  sont-ils coplanaires?

## 255. Exercices non-classés :

**Exercice 3123**

Dans l'espace muni du repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormal direct, nous considérons les points  $A$  de coordonnées  $(0; 0; 8)$ ,  $B$  de coordonnées  $(0; 0; 8)$ ,  $C$  de coordonnées  $(4; 0; 8)$ .

1.
  - a. Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice (*unité graphique*: 1 cm).
  - b. Démontrer que :
    - Les droites  $(BC)$  et  $(BA)$  sont orthogonales ;
    - Les droites  $(CO)$  et  $(OA)$  sont orthogonales ;
    - La droite  $(BC)$  est orthogonale au plan  $(OAB)$ .
  - c. Déterminer le volume, en  $cm^3$ , du tétraèdre  $OABC$ .

d. Démontrer que les quatre points  $O, A, B, C$  se trouvent sur une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

2. A tout réel  $k$  de l'intervalle ouvert  $]0; 8[$ , est associé le point  $M(0; 0; k)$ .

Le plan  $(\pi)$  qui contient  $M$  et est orthogonal la droite  $(OB)$  rencontre les droites  $(OC)$ ,  $(AC)$ ,  $(AB)$  respectivement en  $N, P, Q$ .

- a. Déterminer la nature du quadrilatère  $(MNPQ)$ .
- b. La droite  $(PM)$  est-elle orthogonale à la droite  $(OB)$ ? Pour quelle valeur de  $k$ , la droite  $(MP)$  est-elle orthogonale à la droite  $(AC)$ ?
- c. Déterminer  $MP^2$  en fonction de  $k$ . Pour quelle valeur de  $k$ , la distance  $PM$  est-elle minimale?