Compiler exercice

Compiler correction

Plus d'option

Hors programme lycée/Suites

1. Suite homographique :

Exercice 2416

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{8u_n+1}{-u_n+10}$$

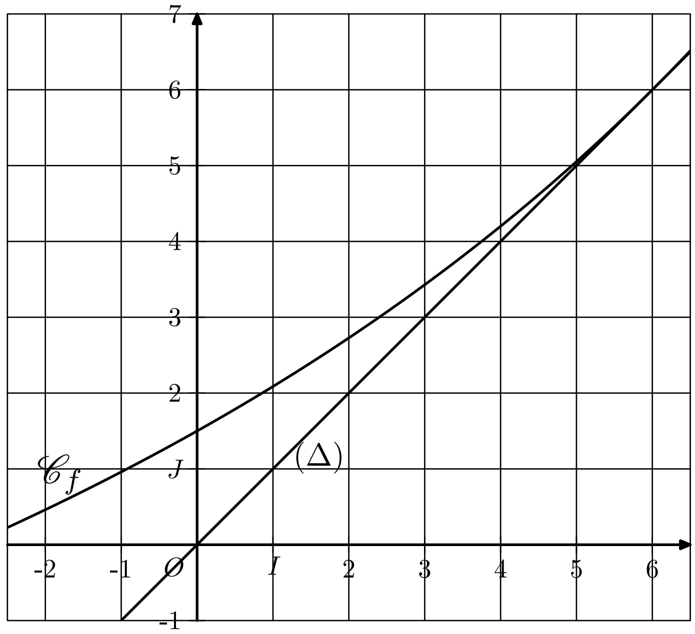
dont le premier terme a pour valeur : $u_0 = -5$

1. Donner la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n).
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :
$$v_n = \frac{1}{u_n-1}$$
   a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (v_n).
   b. Etablir la relation suivante :
$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{9}$$
   c. Donner la nature de la suite (v_n) et donner l'expression du terme v_n en fonction de n.
3. a. Etablir la relation suivante :
$$u_n = \frac{1+v_n}{v_n}$$
   b. Exprimer le terme u_n en fonction de n.
4. Donner la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2983

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = -\frac{12x+36}{x-24}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad u_0 = -2$$

1. Graphiquement, placer sur l'axe des abscisses les cinq premières valeurs de la suite (u_n).
2. Déterminer, par le calcul, la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n).
3. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$w_n = \frac{1}{u_n-6}$$
   a. Etablir l'égalité suivante : $w_{n+1} - w_n = -\dfrac{1}{18}$
   b. Donner la ntaure et les caractéristiques de la suite (w_n) ainsi que l'expression du terme w_n en fonction de n.
   c. Déterminer l'expression du terme u_n en fonction de n.
4. En déduire la limite de la suite (u_n)

2. Suites adjacentes :

Exercice 654

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n)

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on déduire?

Exercice 3464

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. a. Etablir que la suite (u_n) est décroissante.
   b. Etablir que la suite (v_n) est croissante.

2. a. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
   b. Que peut-on dire de la convergence de ces deux suites?

Exercice 3466

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{3x-2}{x}$$

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   b. En déduire que pour tout nombre $x \in \left[\dfrac{3}{2}\,;4\right]$, on a :
   $$f(x) \in \left[\frac{3}{2}\,;4\right]$$

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{3\cdot u_n - 2}{u_n} \end{cases} \;;\; \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{3\cdot v_n - 2}{v_n} \end{cases}$$

2. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
   $$u_n \in \left[\frac{3}{2}\,;\,4\right]$$
   De même, on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n \in \left[\dfrac{3}{2}\,;4\right]$

3. Déterminer la valeur des trois premiers termes de chacune de ces suites.

4. a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   c. Etablir l'encadrement suivant, par un raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n :
   $$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant 3\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n$$
   d. Etablir que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

5. a. Justifier que la limite ℓ vérifie : $\quad \ell = \dfrac{3\cdot\ell - 2}{\ell}$
   b. Justifier que la limite des deux suites (u_n) et (v_n) est 2.

Exercice 3467

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot u_n + 2 \end{cases} \;;\; \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot v_n + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est croissante.

2. Montrer que (v_n) est décroissante.

3. Montrer que, pour tout entier naturel, on a l'encadrement :
   $$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4. Etablir que les deux suites (u_n) sont adjacentes.

5. En déduire que ces deux suites convergent vers un même nombre ℓ ; déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 3516

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3\cdot u_n + 1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \;;\; \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3\cdot v_n + 1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 d'une part et v_1, v_2, v_3 d'autre part.

2. Dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ *(unité graphique : 5 cm)* tracer les droites D et Δ d'équations respectives :
   $$y = \frac{3\cdot x + 1}{4} \quad ; \quad y = x$$
   Utiliser D et Δ pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 ainsi que les points B_1, B_2, B_3 d'abscisses respectives v_1, v_2, v_3.
   Les tracés seront effectués sur une feuille de papier millimétré.

3. On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :
   $$s_n = u_n + v_n$$
   a. Calculer s_0, s_1, s_2, s_3. A partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n)?
   b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (s_n) est une suite constante.

4. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par :

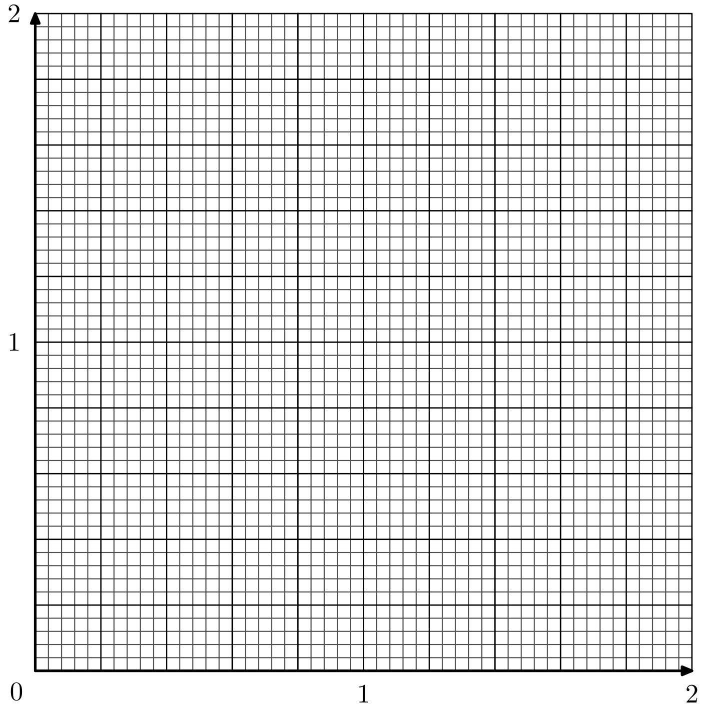
$d_n = v_n - u_n$

a. Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique.

b. Donner l'expression de d_n en fonction de n.

5. En utilisant les résultats des questions 3. b. et 4. b. donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

6. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergente. Préciser leurs limites.

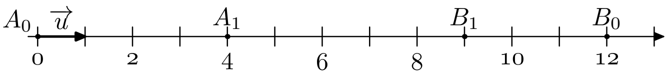


3. Suites adjacentes - Annales :

Exercice 3184

Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O\,;\overrightarrow{u})$ donné ci-dessous, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.



Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n\,;2)$ et $(B_n\,;1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n\,;1)$ et $(B_n\,;3)$.

1. Sur le graphique, placer les points A_2, B_2.

2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n. Montrer que :

$$a_{n+1} = \frac{2{\cdot}a_n + b_n}{3}$$

On admet de même que : $b_{n+1} = \dfrac{a_n+3b_n}{4}$

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$u_n = b_n - a_n$

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

c. Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.

2. a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante *(on pourra utiliser le signe de u_n).*

b. Etudier les variations de la suite (b_n).

3. Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence de suites (a_n) et (b_n)?

Partie C

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$v_n = 3a_n + 4b_n$

Montrer que la suite (v_n) est constante.

2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 3227

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n)

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on déduire?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 3235

Le graphique de l'annexe sera complétée et remis avec la copie.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$. Montrer que si $x\in[1\,;2]$ alors $f(x)\in[1\,;2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
   - $u_0=1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=f(u_n)$.
   - $v_0=2$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1}=f(v_n)$.

   a. Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
   A partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n)?

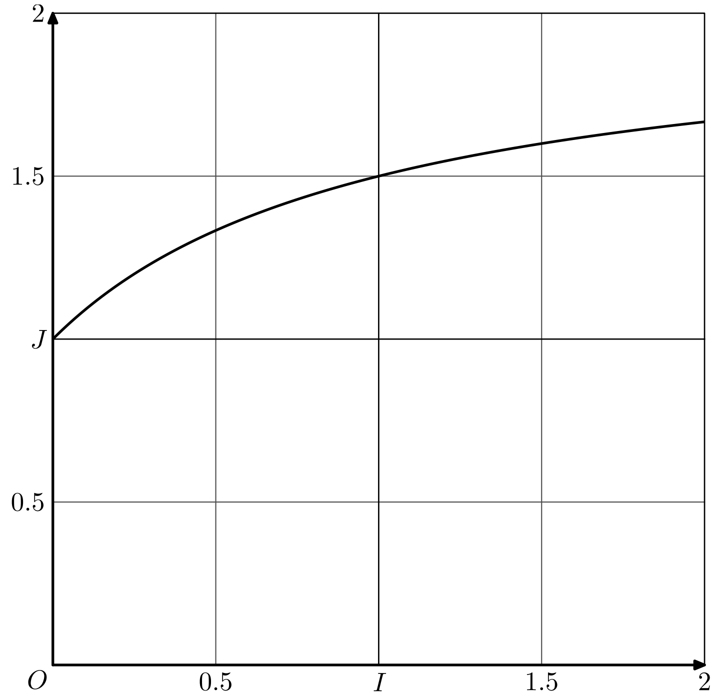
   b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   - Pour tout entier naturel n : $1\leqslant v_n\leqslant 2$.
   - Pour tout entier naturel n : $v_{n+1}\leqslant v_n$.

   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
   - Pour tout entier naturel n : $1\leqslant u_n\leqslant 2$.
   - Pour tout entier naturel n : $u_n\leqslant u_{n+1}$.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}.$$
   En déduire que pour tout entier naturel n :
   $$v_n-u_n\geqslant 0 \quad ; \quad v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant \frac{1}{4}(v_n-u_n)$$

   d. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n-u_n\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

   e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
   Déterminer la valeur exacte de α.



Exercice 3270

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0=1$, $b_0=7$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot(2\cdot a_n+b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot(a_n+2\cdot b_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Soit D une droite munie d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\right)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n=b_n-a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   Exprimer u_n en fonction de n.

3. Comparer a_n et b_n. Etudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interpréter géométriquement ces résultats.

4. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n=a_n+b_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.

6. Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 3243

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et u_n-v_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n

appartenant à $\mathbb{N}$, on a :

$u_n \leqslant v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

"*Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite*".

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Exercice 3997

1. La suite u est définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{23}{27} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

   a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}\cdot x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2\,;0)$.
   Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

   b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \dfrac{23}{18}$.

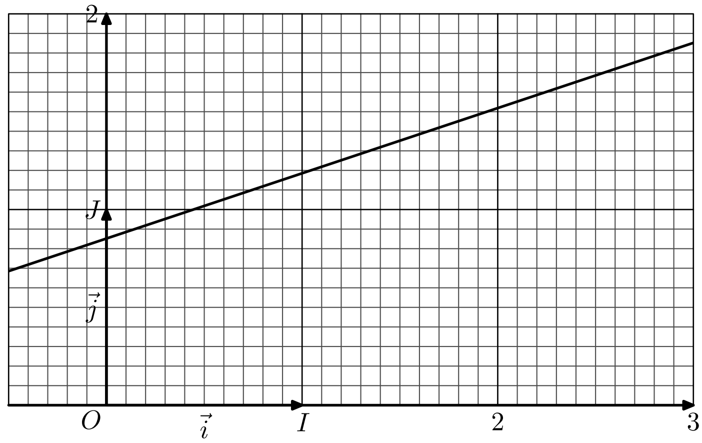
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $$u_n \geqslant \frac{23}{18}$$

   d. Etudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :
   $$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\cdot\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$
   c'est à dire que :
   $$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\cdot\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

   b. La suite v est définie par $v_n = 1{,}2777...7$ avec n décimales consécutives égales à 7. Ainsi :
   $$v_0 = 1{,}2 \quad ; \quad v_1 = 1{,}27 \quad ; \quad v_2 = 1{,}277$$
   En utilisant la question a. démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r *(c'est à dire le quotient de deux entiers.)*.

3. La suite u définie au 1. et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.



Exercice 3245

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.
Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.
Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :

   a. $\left(\dfrac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0}$ b. $\left(\dfrac{2n + (-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

   c. $\left(n\cdot\sin\dfrac{1}{n}\right)_{n>0}$ d. $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

2. On construire trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :
   $$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$
   $$\lim_{n\mapsto+\infty}(u_n) = -1 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty}(w_n) = 1$$
   Alors :

   a. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(v_n) = 0$

   b. La suite (u_n) est minorée.

   c. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$.

   d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3. Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $$\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

   a. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.

   b. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.

   c. La suite (v_n) est majorée.

   d. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes deux croissantes.

b. $x_3 = \frac{19}{20}$ et $y_3 = \frac{37}{60}$.

c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.

d. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

Exercice 3237

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}$$

2. a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}dx$

b. Déduire en utilisant 1., que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

puisque

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

3. On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

Démontrer que U est décroissante *(on pourra utiliser 2. b.)*

4. On désigne par V la suite de terme général :

$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.
Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

4. Suite : passage à la limite :

Exercice 3413

La suite u est définie par :

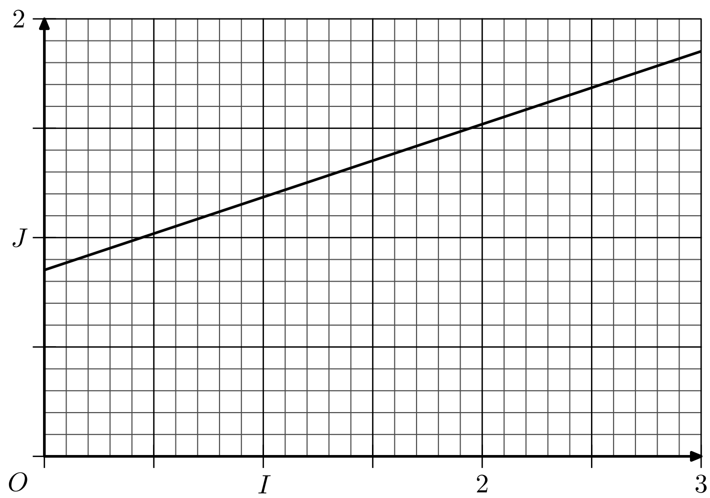
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + \frac{23}{27} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan en annexe, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2\,;0)$.
Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

2. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \geqslant \frac{23}{18}$.

4. Etudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.



Exercice 3426

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de montrer que la suite (u_n) est divergente ; pour cela, effectuons un raisonnement par l'absurde, supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ :

1. Déterminer la valeur de ℓ.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$v_n = u_n - \ell \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Etablir que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.

3. En déduire que la suite (u_n) est divergente.

Exercice 3427

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}\cdot u_n - 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Dans cette question on suppose que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa valeur de convergence.

   Déterminer, par un passage à la limite, la valeur de ℓ.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n + 3$

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.

   b. En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n.

   c. Etablir la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3456

1. Si une suite (u_n) converge vers ℓ, vers quelle valeur converge l'expression $\frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}$.

2. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

   On admet que la suite (u_n) converge vers un nombre noté ℓ.

   a. Déterminer la valeur exacte des huits premiers termes de la suite (u_n).

   b. A l'aide de la calculatrice compléter le tableau suivant en y inscrivant les valeurs approchées à 10^{-2} près.

n	u_n	$\frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

   c. Emettre une conjecture sur les deux limites suivantes :

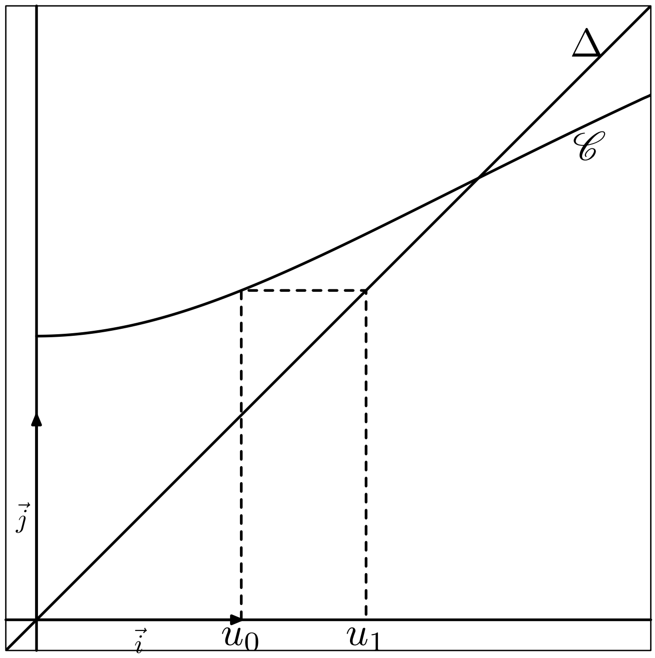
$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}$$

   d. Résoudre l'équation : $x = \frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{3}$

   e. En déduire la valeur de la limite ℓ.

Exercice 3471

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite Δ sont tracés sur le graphique donné ci-dessous :



On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = f(x) - x$

On admet les propriétés suivantes :

- La fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
- Il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$; le nombre α appartient à l'intervalle $[2\,;3]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n par :
$u_{n+1} = f(u_n)$

1. A partir de u_0, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abcisses en laissant apparents les traits de constructions.

2. Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse α.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$

   b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

   c. Déterminer sa limite.

5. Suite et passage à la limite - Annales :

Exercice 3148

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{2}{u_n}\Big)$$

1. a. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{2}{x}\Big)$$
Etudier le sens de variation de f, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\big)$. *(On prendra comme unité 2 cm).*

   b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\big(O\,;\,\vec{i}\big)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

   b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$: $f(x) \leqslant x$.

   c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

   d. Prouver qu'elle converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation : $x = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{2}{x}\Big)$
En déduire sa valeur.

Exercice 3902

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier n par :
$$u_{n+1} = \frac{4\cdot u_n - 1}{u_n + 2}$$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ alors on a, pour tout nombre entier naturel n :
$u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. a. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

   b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n)?

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a :
$u_n - 1 > 0$

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.

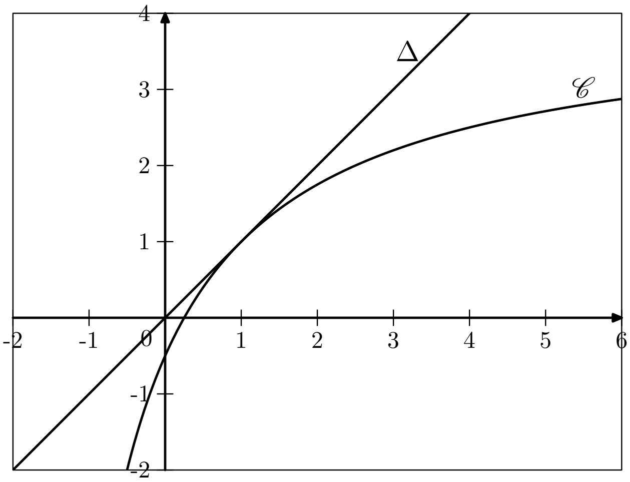
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

   b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

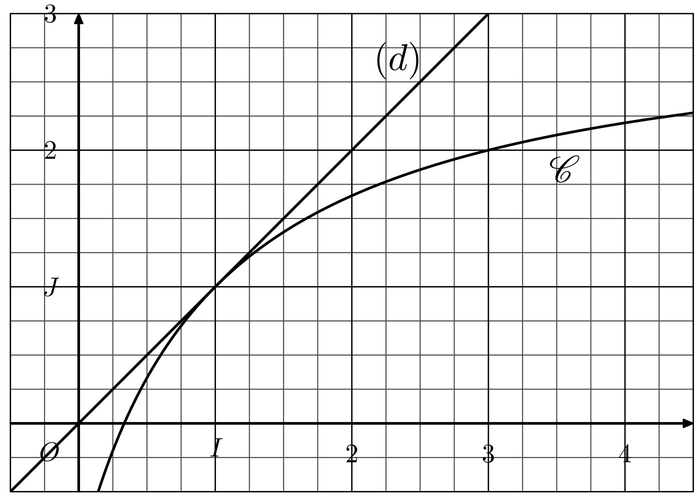
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).



Exercice 5017

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$$
On considère la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On a tracé, ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et la droite (d) d'équation $y = x$.



   a. Sur le graphique, placer sur l'axe des abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.

   b. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n)?

2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1. b. :

   a. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} \leqslant u_n$.

   c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

6. Anciennes annales (avant 2012) :

Exercice 5142

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la coube $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
3. En déduire que si $\quad x\geqslant e \quad$ alors $\quad f(x)\geqslant e$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la sutie (u_n) définie par :

$u_0=5 \quad ; \quad u_{n+1}=f(u_n) \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera appartens les traits de construction.

   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n)?

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant e$.

   b. Déterminer les variations de la suite (u_n).

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

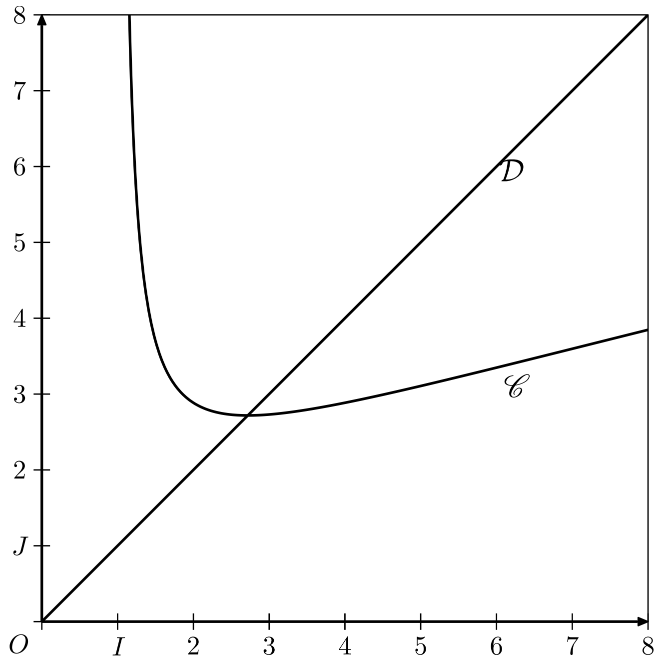
   d. Déterminer sa limite ℓ.

3. On donne l'algorithme suivant :

```
X ← 5
Y ← 0
Tant que X>2,72
    X ← X / ln X
    Y ← Y+1
Fin Tant que
```

A l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur de la variable Y à la fin de l'exécution de cet algorithme :

n	u_n
0	5
1	3,106 674 672 8
2	2,740 652 532 3
3	2,718 372 634 6
4	2,718 281 830 01
5	2,718 281 828



Exercice 3964

On considère l'équation notée : $\quad (E) :\ \ln x=-x$

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x)=x+\ln x$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. Vérifier que : $\quad \dfrac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$g(x)=\dfrac{4\cdot x-\ln x}{5}$

1. Etude de quelques propriétés de la fonction g.

   a. Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   b. En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

   c. Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $g(x)=x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par :

$u_{n+1} = g(u_n)$

a. En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

3. Recherche d'une valeur approchée de α :

a. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.

b. On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à $5{\times}10^{-4}$ près de α.
En déduire un encadrement de α sous la forme :
$u \leqslant \alpha \leqslant v$
où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

Exercice 5152

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 5{\cdot}\ln(x+3) - x$

1. a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;+\infty[$.

b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c. Montrer que, pour tout x strictement positif, on a :
$$f(x) = x{\cdot}\Big(5{\cdot}\frac{\ln x}{x} - 1\Big) + 5{\cdot}\ln\Big(1+\frac{3}{x}\Big)$$

d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

e. Compléter le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On notera α cette solution.

b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\,;15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

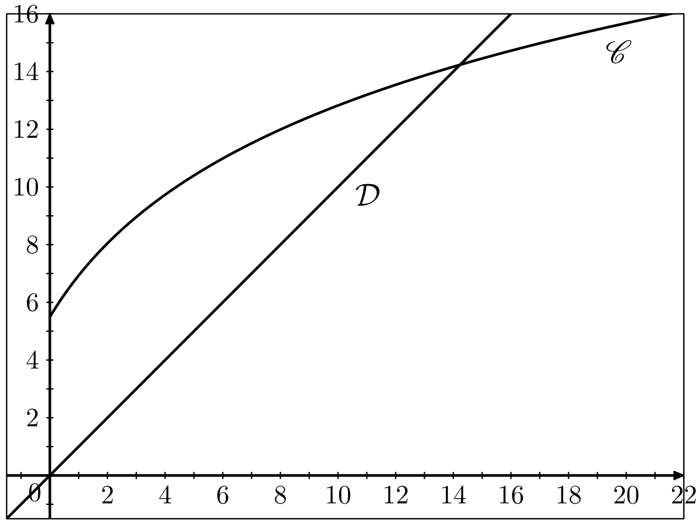
c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par :
$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = 5{\cdot}\ln(u_n+3) \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = 5\ln(x+3)$

Ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$ et la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction g.



1. a. Construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n).

2. a. Etudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Vérifier que $g(\alpha)=\alpha$ où α est défini dans la partie **A** question 2. a..

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$0 \leqslant u_n \leqslant a$

d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie **B**.

e. En utilisant la question 2. a. de la partie **A**, justifier que :
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \alpha$

3. On considère l'algorithme suivant

```
u ← 4
Tant que u−14,2<0
    u ← 5·ln(u+3)
Fin Tant que
```

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Justifier que l'éxécution de cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur de la variable **u** à la fin de l'exécution de cet algorithme *(on arrondira à 5 décimales)*.

Exercice 3200

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :
$f(x) = \frac{x}{\ln x}$

1. a. Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

b. Etudier les variations de la fonction f.

2. Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y=x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant e$ *(on pourra utiliser la question 1. b.)*

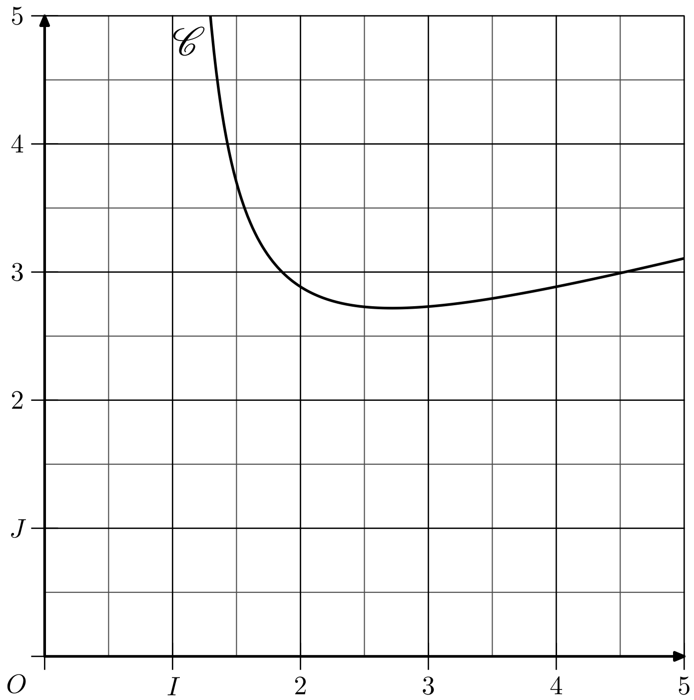
c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[e\,;+\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$:

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $\big(f(u_n)\big)$, démontrer que : $f(\ell)=\ell$.

2. En déduire la valeur de ℓ.



Exercice 3228

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ *(unité graphique 10 cm)*

Partie A

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

   c. Construire Γ dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

2. a. Montrer que, pour tout réel m de $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions.

   b. Dans le cas où $m=\frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions *(avec $\alpha<\beta$)*.
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   c. Résoudre l'équation $f(x)=m$ dans le cas où $m=0$ et $m=\frac{1}{e}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

où α est le réel défini à la question **A** 2. b.

   a. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   c. La suite (u_n) est-elle convergente? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = \ln u_n$.

   a. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a :
   $u_n = w_n - w_{n+1}$

   b. On pose : $S_n = u_0+u_1+\cdots+u_n$.
   Montrer que : $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

   c. En déduire : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 $(v_0>0)$ et, pour tout entier naturel n :
   $v_{n+1} = v_n \cdot \mathrm{e}^{-v_n}$

   Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait : $u_n = v_n$?
   Si oui, préciser laquelle.

