Compiler exercice | Compiler correction | Plus d'option

Hors programme lycée/Produit scalaire et plan

1. Produit scalaire et relation vectorielle :

Exercice 3808

Soient A, B deux points distincts fixés d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre I et M un point quelconque de ce cercle $\mathscr{C}$.

Le point D est défini par : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{ID}$

1. Prouver que les produits scalaires $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AM}$ sont nuls.

   En déduire à quelles droites particulières du triangle ABM le point D appartient puis préciser la nature du point D pour le triangle AMB.

2. Soit G l'isobarycentre des points A, B, M. Exprimer $\overrightarrow{ID}$ en fonction de $\overrightarrow{IG}$.

Exercice 4094

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre $ABCD$ issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

2. Produit scalaire et coordonnées :

Exercice 4091

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{j}\big)$, on donne les points :

$A(2\,;1\,;3)\quad ;\quad B(-3\,;-1\,;7)\quad ;\quad C(3\,;2\,;4)$

1. Déterminer les coordonnées du point H barycentre du système :
   $\Big\{(A\,;-2)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;2)\Big\}$

2. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1, des points M de l'espace tels que :
   $$\Big(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\Big)\cdot\Big(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\Big)=0$$
   En préciser les éléments caractéristiques.

3. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2, des points M de l'espace tels que :
   $$\Big\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\Big\|=\sqrt{29}$$
   En préciser les éléments caractéristiques.

3. Ensemble de points :

Exercice 4104

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment $[AD]$.

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace :
   $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$

2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que :
   $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=0$

Exercice 4107

Soit A et B deux points distincts du plan.

1. Caractériser l'ensemble des points tels que :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=AB^2$

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-AB^2$

2. On suppose que $AB=6$. Caractériser l'ensemble des points tels que :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=18$ b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$

Exercice 4109

Dans l'espace, on considère deux points A et B distincts tels que $AB=4$. On note I le milieu du segment $[AB]$:

1. Démontrer que pour tout point M de l'espace, on a l'égalité :
$MA^2-MB^2=2\cdot\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$

2. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant :
$MA^2-MB^2=16$

4. Distance à un plan :

Exercice 4034

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

La sphère de centre $A(1\,;1\,;1)$ et de rayon 10 est tangente au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=0$.

Exercice 4082

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ orthonormal direct.
On considère les points :
$A(-2\,;0\,;1)$; $B(1\,;2\,;-1)$; $C(-2\,;2\,;2)$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.

2. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

3. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Exercice 3858

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

On considère :
- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $B(1\,;-2\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(-2\,;1\,;5)$;
- le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne : $x+2y-7=0$.

1. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

2. Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point $C(-1\,;4\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;-1\,;1)$.

3. Soit le point $A(5\,;-2\,;-1)$. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.

4. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

Exercice 4089

Le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $x-y+z-11=0$ est tangent à une sphère $\mathscr{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1\,;-1\,;3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathscr{Q}$.

3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{Q}$.

Exercice 4100

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :
$A(1\,;-2\,;4)$; $B(-2\,;-6\,;5)$; $C(-4\,;0\,;-3)$

On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).
Soit t le réel tel que : $\overrightarrow{BH}=t\cdot\overrightarrow{BC}$

1. Démontrer que : $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$

2. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

Exercice 4106

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, on donne les points :
$A(3\,;2\,;-1)$; $B(-6\,;1\,;1)$
$C(4\,;-3\,;3)$; $D(-1\,;-5\,;-1)$

1. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :
$-2\cdot x-3\cdot y+4\cdot z-13=0$

2. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}$.

Exercice 4134

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation :
$3\cdot x+2\cdot y=29$

1. Démontrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\vec{k}$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

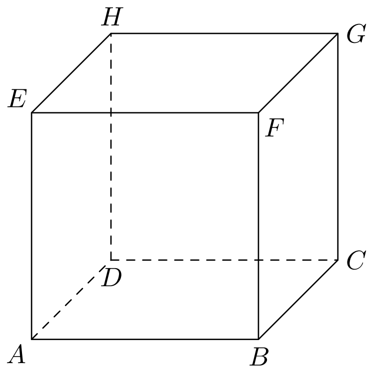
3. Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois plans de coordonnées.

4. Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (xOy), les points dont les

coordonnées sont à la fois entières et positives.

Exercice 4329

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous :



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$.

On note K le barycentre des points pondérés $(D\,;1)$ et $(f\,;2)$

Partie A

1. Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

2. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3. Calculer la distance EK.

Partie B

Soit M un point du segment $[HG]$.
On note $m=HM$ *(m est donc un réel appartenant à $[0\,;1]$).*

1. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est :
$(-1+m)\cdot x+y-m\cdot z=0$.

3. On note d_m la distance du point E au plan (MFD).
   a. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$:
   $$d_m=\frac{1}{\sqrt{2\cdot m^2-2\cdot m+2}}$$
   b. Déterminer la position de M sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance d_m est maximale.
   c. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonale de E sur le plan (MFD)

5. Ancienne annales (avant 2012) :

Exercice 3153

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

1. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $B(1\,;-2\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(-2\,;1\,;5)$ et le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne $x+2y-7=0$
   a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.
   b. Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point $C(-1\,;4\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;-1\,;1)$.
   c. Soit le point $A(5\,;-2\,;-1)$. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.
   d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2. a. Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2\cdot t\,;3-t\,;t)$.
   Déterminer en fonction de t la longueur AM_t.

On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   a. Etudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.
   b. Interpréter géométrique la valeur de ce minimum.

Exercice 3126

L'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormal direct.

Il n'est pas demandé de faire de figure.

Les questions 3. et 4. sont indépendantes des questions 1. et 2..

On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\ ;\ B\begin{pmatrix}1\\-6\\-1\end{pmatrix}\ ;\ C\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\ ;\ I\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

1. a. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, b, C.

2. Soit (Q) le plan d'équation : $x+y-3z+2=0$
   et (Q') le plan de repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
   a. Pourquoi (Q) et (Q') sont-ils sécants?
   b. Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q').

3. Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :
$$\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Déterminer avec soin l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK).

