

# Hors programme lycée/Produit scalaire et plan

## 1. Produit scalaire et relation vectorielle :

### Exercice 3808



Soient  $A, B$  deux points distincts fixés d'un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I$  et  $M$  un point quelconque de ce cercle  $\mathcal{C}$ .

Le point  $D$  est défini par :  $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IM} = \vec{ID}$

1. Prouver que les produits scalaires  $\vec{AD} \cdot \vec{BM}$  et  $\vec{BD} \cdot \vec{AM}$  sont nuls.

En déduire à quelles droites particulières du triangle  $ABM$  le point  $D$  appartient puis préciser la nature du

point  $D$  pour le triangle  $AMB$ .

2. Soit  $G$  l'isobarycentre des points  $A, B, M$ . Exprimer  $\vec{ID}$  en fonction de  $\vec{IG}$ .

### Exercice 4094



On considère un tétraèdre  $ABCD$  et on note  $H$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $(BCD)$ .

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre  $ABCD$  issues des points  $A$  et  $B$  sont concourantes, alors la droite  $(BH)$  est une hauteur du triangle  $BCD$ .

## 2. Produit scalaire et coordonnées :

### Exercice 4091



Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on donne les points :

$$A(2; 1; 3) \quad ; \quad B(-3; -1; 7) \quad ; \quad C(3; 2; 4)$$

1. Déterminer les coordonnées du point  $H$  barycentre du système :

$$\{(A; -2); (B; -1); (C; 2)\}$$

2. Déterminer la nature de l'ensemble  $\Gamma_1$ , des points  $M$  de l'espace tels que :

$$(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot (\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$$

En préciser les éléments caractéristiques.

3. Déterminer la nature de l'ensemble  $\Gamma_2$ , des points  $M$  de l'espace tels que :

$$\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29}$$

En préciser les éléments caractéristiques.

## 3. Ensemble de points :

### Exercice 4104



On considère deux points  $A$  et  $D$  de l'espace et on désigne par  $I$  le milieu du segment  $[AD]$ .

1. Démontrer que, pour tout point  $M$  de l'espace :

$$\vec{MD} \cdot \vec{MA} = MI^2 - IA^2$$

2. En déduire l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  de l'espace, tels

que :

$$\vec{MD} \cdot \vec{MA} = 0$$

### Exercice 4107



Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan.

1. Caractériser l'ensemble des points tels que :

a.  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 0$       b.  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = AB^2$

c.  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -AB^2$

2. On suppose que  $AB=6$ . Caractériser l'ensemble des points tels que :

a.  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 18$       b.  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -1$

**Exercice 4109** 

4. Distance à un plan :

**Exercice 4034**  

L'espace est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

La sphère de centre  $A(1;1;1)$  et de rayon 10 est tangente au plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x+y+z=0$ .

**Exercice 4082**  

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé direct.

On considère les points :

$A(-2;0;1)$  ;  $B(1;2;-1)$  ;  $C(-2;2;2)$

- Calculer le produit scalaire  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  puis les longueurs  $AB$  et  $AC$ .
- En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle  $\widehat{BAC}$ .
- En déduire que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

**Exercice 3858**  

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère :

- le plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $B(1;-2;1)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(-2;1;5)$ ;
- le plan  $\mathcal{R}$  d'équation cartésienne:  $x+2y-7=0$ .

- Démontrer que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  sont perpendiculaires.
- Démontrer que l'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  est la droite  $\Delta$  passant par le point  $C(-1;4;-1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(2;-1;1)$ .
- Soit le point  $A(5;-2;-1)$ . Calculer la distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$  puis la distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{R}$ .
- Déterminer la distance du point  $A$  à la droite  $\Delta$ .

**Exercice 4089**  


Le plan  $\mathcal{Q}$  d'équation  $x-y+z-11=0$  est tangent à une sphère  $\mathcal{S}$  de centre le point  $\Omega$  de coordonnées  $(1; -1; 3)$ .

- Déterminer le rayon de la sphère  $\mathcal{S}$ .
- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite  $\Delta$  passant par  $\Omega$  et orthogonale au plan  $\mathcal{Q}$ .

Dans l'espace, on considère deux points  $A$  et  $B$  distincts tels que  $AB=4$ . On note  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  :

- Démontrer que pour tout point  $M$  de l'espace, on a l'égalité :  $MA^2 - MB^2 = 2 \cdot \vec{IM} \cdot \vec{AB}$
- Déterminer l'ensemble des points  $M$  vérifiant :  $MA^2 - MB^2 = 16$

- En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère  $\mathcal{S}$  et du plan  $\mathcal{Q}$ .

**Exercice 4100**  

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont pour coordonnées respectives :

$A(1;-2;4)$  ;  $B(-2;-6;5)$  ;  $C(-4;0;-3)$

On désigne par  $H$  le projeté orthogonal du point  $O$  sur la droite  $(BC)$ .

Soit  $t$  le réel tel que :  $\vec{BH} = t \cdot \vec{BC}$

- Démontrer que :  $t = \frac{\vec{BO} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2}$
- En déduire le réel  $t$  et les coordonnées du point  $H$ .

**Exercice 4106**  

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on donne les points :

$A(3;2;-1)$  ;  $B(-6;1;1)$

$C(4;-3;3)$  ;  $D(-1;-5;-1)$

- Vérifier qu'une équation cartésienne du plan  $(BCD)$  est :  $-2 \cdot x - 3 \cdot y + 4 \cdot z - 13 = 0$
- Déterminer les coordonnées du point  $H$ , projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $(BCD)$ .
- Calculer le produit scalaire  $\vec{BH} \cdot \vec{CD}$ .

**Exercice 4134**  

L'espace est muni du repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  et on désigne par  $\mathcal{P}$  le plan d'équation :

$3 \cdot x + 2 \cdot y = 29$

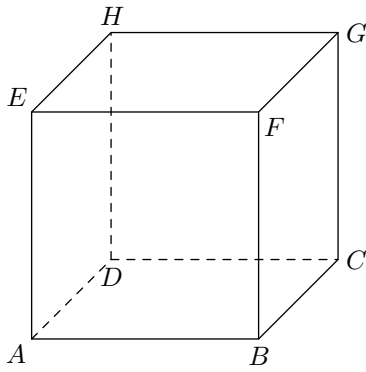
- Démontrer que  $\mathcal{P}$  est parallèle à l'axe  $(Oz)$  de vecteur directeur  $\vec{k}$ .
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan  $\mathcal{P}$  avec les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan  $\mathcal{P}$  avec les trois plans de coordonnées.
- Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $(xOy)$ , les points dont les

coordonnées sont à la fois entières et positives.

**Exercice 4329**



On considère le cube  $ABCDEFGH$  de côté 1 représenté ci-dessous :



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé  $(D; \vec{DA}; \vec{DC}; \vec{DH})$ .

On note  $K$  le barycentre des points pondérés  $(D; 1)$  et  $(F; 2)$

**Partie A**

1. Montrer que le point  $K$  a pour coordonnées  $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ .
2. Montrer que les droites  $(EK)$  et  $(DF)$  sont orthogonales.

5. Ancienne annales (avant 2012) :

**Exercice 3153**



L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

1. On considère le plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $B(1; -2; 1)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(-2; 1; 5)$  et le plan  $\mathcal{R}$  d'équation cartésienne  $x+2y-7=0$ 
  - a. Démontrer que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  sont perpendiculaires.
  - b. Démontrer que l'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  est la droite  $\Delta$  passant par le point  $C(-1; 4; -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(2; -1; 1)$ .
  - c. Soit le point  $A(5; -2; -1)$ . Calculer la distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$  puis la distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{R}$ .
  - d. Déterminer la distance du point  $A$  à la droite  $\Delta$ .
2. a. Soit, pour tout nombre réel  $t$ , le point  $M_t$  de coordonnées  $(1+2t; 3-t; t)$ . Déterminer en fonction de  $t$  la longueur  $AM_t$ .

On note  $\varphi(t)$  cette longueur. On définit ainsi une fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- a. Etudier le sens de variations de la fonction  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ ; préciser son minimum.
- b. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

**Exercice 3126**



nales.

3. Calculer la distance  $EK$ .

**Partie B**

Soit  $M$  un point du segment  $[HG]$ .

On note  $m=HM$  ( $m$  est donc un réel appartenant à  $[0; 1]$ ).

1. Montrer que, pour tout réel  $m$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ , le volume du tétraèdre  $EMFD$ , en unités de volume, est égal à  $\frac{1}{6}$ .
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan  $(MFD)$  est :  $(-1+m) \cdot x + y - m \cdot z = 0$ .
3. On note  $d_m$  la distance du point  $E$  au plan  $(MFD)$ .
  - a. Montrer que, pour tout réel  $m$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$  : 
$$d_m = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot m^2 - 2 \cdot m + 2}}$$
  - b. Déterminer la position de  $M$  sur le segment  $[HG]$  pour laquelle la distance  $d_m$  est maximale.
  - c. En déduire que lorsque la distance  $d_m$  est maximale, le point  $K$  est le projeté orthogonale de  $E$  sur le plan  $(MFD)$ .

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé direct.

Il n'est pas demandé de faire de figure.

Les questions 3. et 4. sont indépendantes des questions 1. et 2.

On considère les quatre points  $A, B, C$  et  $I$  de coordonnées respectives :

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; B \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} ; C \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. a. Calculer le produit vectoriel  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ .
  - b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points  $A, B, C$ .
2. Soit  $(Q)$  le plan d'équation :  $x+y-3z+2=0$  et  $(Q')$  le plan de repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .
  - a. Pourquoi  $(Q)$  et  $(Q')$  sont-ils sécants?
  - b. Donner un point  $E$  et un vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite d'intersection  $(\Delta)$  des plans  $(Q)$  et  $(Q')$ .
3. Ecrire une équation cartésienne de la sphère  $S$  de centre  $I$  et de rayon 2.
4. On considère les points  $J$  et  $K$  de coordonnées respectives :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer avec soin l'intersection de la sphère  $(S)$  et  $\Pi$  de la droite  $(JK)$ .