

# Hors programme lycée/Intégration

## 1. Intégrale par parties :

### Exercice 3297



Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x \cdot \ln(x+1)$$

1. On pose :  $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$

a. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x \neq 1$  :

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

b. Calculer  $I$ .

2. Déterminer par une intégration par parties l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x+1) dx$$

### Exercice 3959



A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a.  $\int_{-1}^4 x \cdot e^x dx$

b.  $\int_0^5 t \cdot e^{2-t} dt$

c.  $\int_e^1 \ln t dt$

d.  $\int_0^1 (2x+1) \cdot \ln(x+1) dx$

e.  $\int_1^e \frac{5 \cdot \ln x}{x^2} dx$

f.  $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \cdot \ln x dx$

### Exercice 3961



A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a.  $\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$

b.  $\int_1^{\ln 3} e^t \cdot (t-1) dt$

c.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cdot \sin 3x dx$

d.  $\int_1^e x \cdot (1 - \ln x) dx$

### Exercice 4016



La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (20x + 10) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

Calculer la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 3]$ .

### Exercice 4294



On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x + 1$$

1. Calculer  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(x) dx$ . On pourra utiliser une intégration par parties.

2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par :

- la courbe représentative de la fonction  $f$ , l'axe des abscisses ;
- les droites d'équation  $x = \frac{1}{2}$  et  $x = 1$ .

(on admettra que la fonction  $f$  est positive sur  $[\frac{1}{2}; 1]$ )

### Exercice 4295



A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$$

## 2. Intégrale par parties - doubles :

### Exercice 3960



A l'aide d'une double intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a.  $\int_{-2}^3 x^2 \cdot e^x dx$

b.  $\int_1^5 (1-t^2)e^{-t} dt$

### Exercice 4298



Le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

Pour tout nombre réel  $a$ , on considère l'intégrale :

$$I(a) = \int_0^a f(x) dx$$

- Donner selon les valeurs de  $a$  le signe de  $I(a)$ .

### 3. Intégrale par parties - étude :

#### Exercice 3983



On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$  par :

$$f(x) = (x-1) \cdot e^{1-x}$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Cette courbe est donnée dans l'annexe.

Pour tout nombre réel  $x$  supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x (t-1) \cdot e^{1-t} dt$$

- Démontrer que la fonction  $F$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ .

- Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel  $x$  appartenant à  $[1; +\infty[$  :

$$F(x) = -x \cdot e^{1-x} + 1$$

- Démontrer que sur  $[1; +\infty[$ , l'équation  $F(x) = \frac{1}{2}$  est équivalente à l'équation :

$$\ln(2x) + 1 = x$$

#### Exercice 4004



Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ; l'unité graphique est 4 cm.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$\Gamma$  est sa courbe représentative dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### 4. Intégrale par parties - suites :

#### Exercice 3982



Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on considère l'intégrale  $I_n$  définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$$

- Calculer  $I_2$ .

- Une relation de récurrence :

- Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$

- Calculer  $I_3$ .

#### Exercice 3986



On considère la suite numérique  $(J_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$  non nul, par :

- A l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel  $a$  :

$$I(a) = 2 - 2 \cdot e^{-a} \cdot \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$$

- Montrer que  $f(x) = \frac{e^{-x}-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ ; en déduire une primitive de  $f$ .

- Quelle est l'aire en  $cm^2$  de la surface comprise entre  $\Gamma$ , la droite d'équation  $y=x$  et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ ?

Hachurer cette surface sur la représentation graphique.

- Calculer :  $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$

- En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x \cdot [1 - f(x)] dx = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2 \cdot e}\right).$$

En déduire :  $\int_0^1 x \cdot [f(x)]^2 dx$

#### Exercice 4296



Soit  $f$  la fonction définie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]0; 1]$  par :  $f(x) = 1 + x \cdot \ln x$

Soit  $\alpha$  un nombre réel tel que  $0 < \alpha < 1$ . On pose :

$$I(\alpha) = \int_\alpha^1 [1 - f(x)] dx$$

- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$

- Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$

- On admet que la fonction  $f$  est positive sur  $]0; 1]$ . Interpréter graphiquement le résultat précédente.

$$J_n = \int_1^n e^{-t} \cdot \sqrt{1+t} dt$$

- Démontrer que la suite  $(J_n)$  est croissante.

- Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

On définit la suite  $(I_n)$ , pour tout entier naturel  $n$  non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1) \cdot e^{-t} dt$$

- Justifier que, pour tout  $t \geq 1$ , on a :

$$\sqrt{t+1} \leq t+1$$

- En déduire que :  $J_n \leq I_n$ .

- Calculer  $I_n$  en fonction de  $n$ . En déduire que la suite  $(J_n)$  est majorée par un nombre réel (indépendant de  $n$ ).

$n$ ).

d. Que peut-on en conclure pour la suite  $(J_n)$  ?

### Exercice 4005



Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $I_n = \int_0^\pi e^x \cdot \cos(n \cdot x) dx$

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  
 $\cos(n \cdot x) = (-1)^n$  ;  $\sin(n \cdot \pi) = 0$

2. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{(-1)^n \cdot e^\pi - 1}{1 + n^2}$$

### Exercice 4006



On pose :  $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln x dx$  et  $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 dx$

1. Calculer  $I_1$ .

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I_2 = \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$$

## 5. Intégrale par parties - probabilité :

### Exercice 4269



On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . La probabilité pour un client d'attendre moins de  $t$  minutes est définie par :

$$\mathcal{P}(X \leq t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

## 6. Intégrale par parties - annales :

### Exercice 3124



L'objectif est d'étudier quelques propriétés de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-1; +\infty[$  par :

$$f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$$

**Partie A :** Variations de  $f$  et tracé de la courbe  $(F)$

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[-1; +\infty[$  par :

$$f(x) = (1 - x^2) e^{-x}$$

Dans le plan  $(P)$  muni du repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique : 2 cm) la représentation graphique de la fonction  $f$  est noté  $(F)$ .

1. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f$  : interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Déterminer, suivant les valeurs de  $x$  de l'intervalle  $[-1; +\infty[$ , le signe de  $x^2 - 2x - 1$  et celui de  $f(x)$ .

b. Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ . En déduire le

### Exercice 4222



Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on considère l'intégrale  $I_n$  définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$$

1. Calculer  $I_2$ .

2. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que tout entier naturel  $n \geq 2$  :

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$

### Exercice 4303



Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on considère l'intégrale  $I_n$  définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$$

1. Calculer  $I_2$

2. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$

3. Calculer  $I_3$ .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_0^t \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$  en fonction de  $t$ .

2. En déduire que le temps moyen est  $\frac{1}{\lambda}$

3. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?

sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variations ; préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum.

3. Déterminer une équation de la tangente noté  $(T)$  à la courbe  $(F)$  au point  $A$  de  $(F)$  dont l'abscisse est 0.

4. a. Déterminer la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 0,1 près de chacun des coefficients directeurs des tangentes à la courbe  $(F)$  en  $(1; 0)$  et  $C(-1; 0)$ .

b. Tracer les trois tangentes à la courbe  $(F)$  en  $A$ ,  $B(A; 0)$  et  $C(-1; 0)$  et la courbe  $(F)$ .

**Partie B :** Intégrales et aires

Les surfaces  $S$  et  $S_1(u)$  du plan  $(P)$ , où  $u$  est un réel donné de l'intervalle  $[1; +\infty[$  sont définies par :

•  $S$  est l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que :  
 $0 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y \leq f(x)$

•  $S_1(u)$  est l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que :

$$1 \leq x \leq u \text{ et } f(x) \leq y \leq 0$$

Les aires respectives de ces surfaces sont notées  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_1(u)$ .  
Leurs valeurs exactes seront exprimées en unités d'aire.

1. Justifier l'existence de l'intégrale  $\int_1^x f(t) dt$  où  $x$  est un réel positif.

En procédant par deux intégrations par parties successives, déterminer cette intégrale.

2. En déduire la valeur exacte de  $\int_1^0 f(t) dt$ .

En déduire la valeur exacte de l'aire  $\mathcal{A}$

3. Déterminer, en fonction de  $u$  où  $u \geq 1$ , l'aire  $\mathcal{A}_1(u)$  puis la limite, lorsque  $u$  tend vers  $+\infty$ , de  $\mathcal{A}_1(u)$ .

Interpréter graphiquement ce résultat.

4. L'objectif est de déterminer le réel  $\alpha$  supérieur ou égal à 1 pour lequel :

$$\mathcal{A}_1(\alpha) = \mathcal{A}$$

- a. Démontrer que, sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ , l'équation  $\mathcal{A}_1(x) = \mathcal{A}$  est équivalente à :  $x = 2 \cdot \ln(1+x)$

- b. Etudier le sens de variations de la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  par :  $h(x) = x - 2 \cdot \ln(1+x)$ .

Démontrer que, sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ , l'équation  $x = 2 \cdot \ln(1+x)$  admet exactement une solution et que celle-ci, noté  $\alpha$ , vérifie la condition :  $2 < \alpha < 3$ .

- c. Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, un encadrement d'amplitude  $10^{-3}$  de  $\alpha$ .

Déterminer  $f(\alpha)$  sous la forme d'une fonction rationnelle de  $\alpha$  puis l'encadrement de  $f(\alpha)$ , qu'on déduira du précédent, d'amplitude  $2 \times 10^{-4}$

### Exercice 3177



1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$$

On donne ci-dessous le tableau de variations de  $g$  :

$x$	0	2,3	$x_0$	2,4	$+\infty$
Variation de $g$					

Démontrer toutes les propriétés de la fonction  $g$  regroupées dans ce tableau.

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{5 \ln x}{x}$$

- a. Montrer que  $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$  où  $x_0$  est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

- b. Soit  $a$  un réel. Pour  $a > 1$ , exprimer  $\int_1^a f(t) dt$  en fonction de  $a$ .

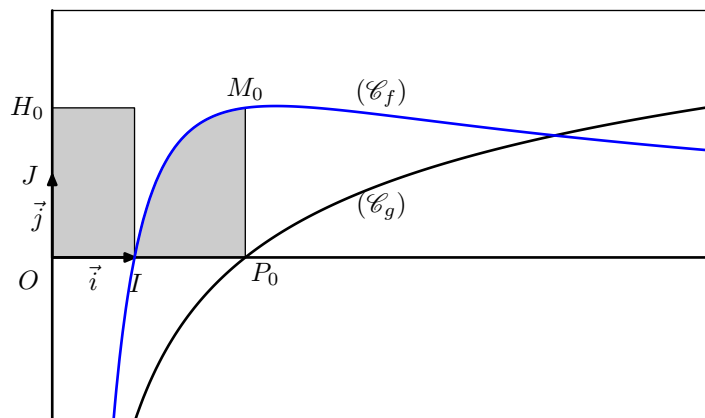
3. On a tracé dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ci-dessous les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  notées respectivement  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$ .

On appelle  $I$  le point de coordonnées  $(1; 0)$ ,  $P_0$  le point d'intersection de  $(\mathcal{C}_g)$  et de l'axe des abscisses,  $M_0$  le point de  $(\mathcal{C}_f)$  ayant même abscisse que  $P_0$  et  $H_0$  le projeté orthogonal de  $M_0$  sur l'axe des ordonnées.

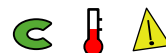
On nomme  $(\mathcal{D}_1)$  le domaine du plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et les segments  $[IP_0]$  et  $[P_0M_0]$ .

On nomme  $(\mathcal{D}_2)$  le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de  $[OI]$  et  $[OH_0]$ .

Démontrer que les deux domaines  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



### Exercice 3211



Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$

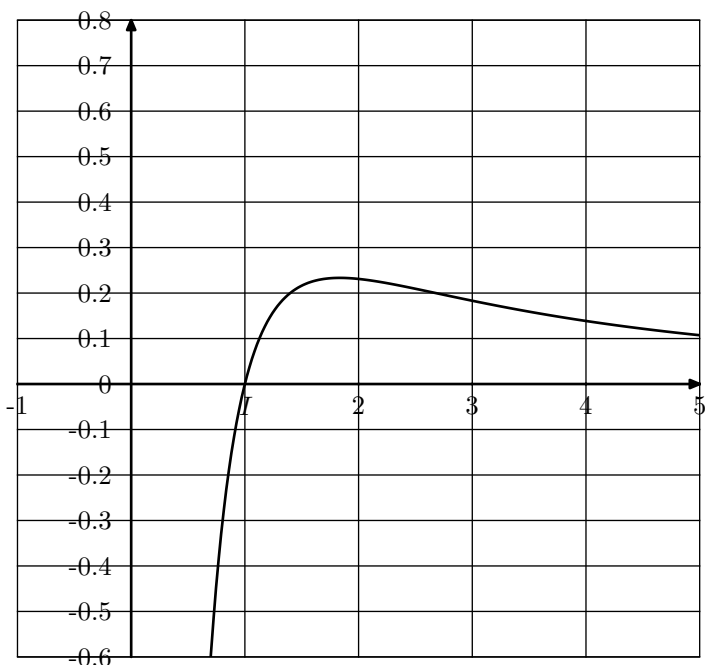
1. Montrer que pour tout  $x > 1$  :  $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

2. a. Calculer  $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx$  et  $J = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$  (on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière)

- b. En déduire un encadrement de  $K = \int_2^4 f(x) dx$ .

3. la figure ci-dessous représente la courbe représentative de  $f$  (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \text{ et on note } \mathcal{A} \text{ son aire.}$$



A l'aide de l'encadrement trouvé au 2. b. , donner un encadrement  $\mathcal{A}$  en  $cm^2$ .

**Exercice 3220**



1. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$$

a. Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que l'on ait, pour tout  $x > 1$  :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

b. Trouver une primitive  $G$  de  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

Trouver une primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln x \, dx$$

On donnera le résultat exact sous la forme  $p \cdot \ln 2 + q \cdot \ln 3$ , avec  $p$  et  $q$  rationnels.

**Exercice 3236**



Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$$

Sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (*unité graphique 2 cm*)

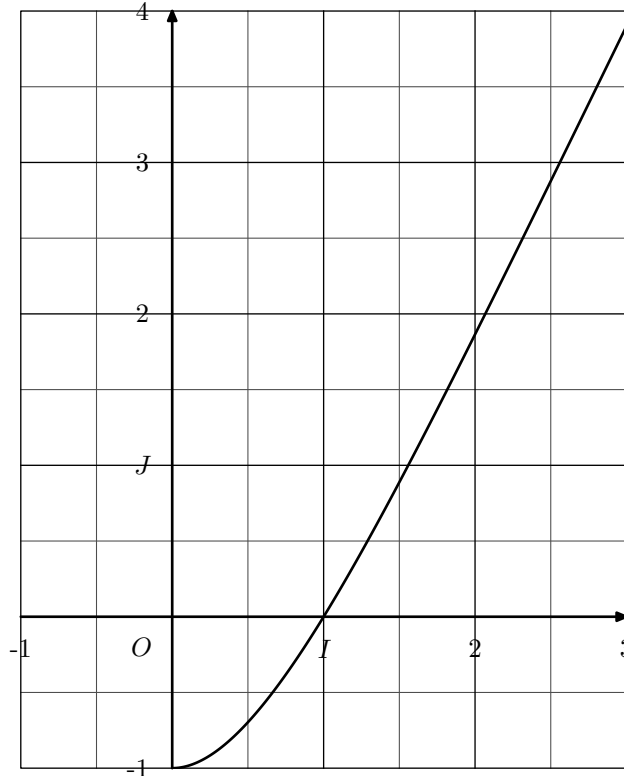
1. a. Etudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
b. Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x - 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ .  
c. Etudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$ .
2. a. Calculer  $f'(x)$  et montrer que :  
$$f'(x) = xe^{-x} + 2 \cdot (1 - e^{-x})$$
  
b. En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f'(x) > 0$ .

c. Préciser la valeur de  $f'(0)$ , puis établir le tableau de variations de  $f$ .

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en  $cm^2$ , du domaine plan limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 3$ .

4. a. Déterminer le point  $A$  de  $\mathcal{C}$  où la tangente à  $\mathcal{C}$  est parallèle à  $\Delta$ .

b. Calculer la distance, exprimée en  $cm$ , du point  $A$  à la droite  $\Delta$ .



**Exercice 3249**



L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

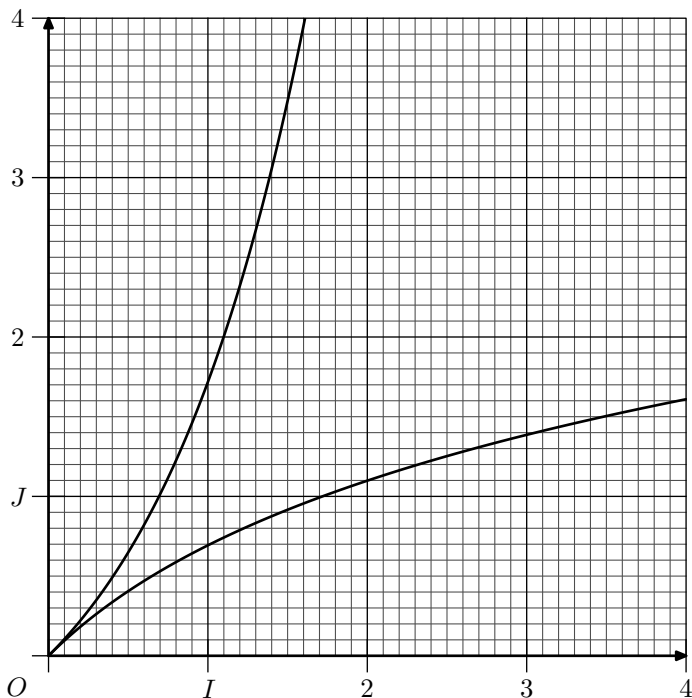
On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies, sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad ; \quad g(x) = e^x - 1$$

On désigne par  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  dans une repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat.

1. Vérifier que les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont une tangente commune au point  $O(0; 0)$ . Préciser la position de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à cette tangente.
2. Démontrer que les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .
3. Soit  $a$  un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre  $I(a) = \int_0^a \ln(x+1) \, dx$ .  
a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que :  
$$I(a) = a \cdot \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) \, dx$$
  
b. En déduire la valeur de  $I(a)$ .

- c. Retrouver la valeur de  $I(a)$  en effectuant une intégration par parties.



### Exercice 3272



**But de l'exercice :** approcher  $\ln(1+a)$  par un polynôme de degré 5 lorsque  $a$  appartient à l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Soit  $a \in [0; +\infty[$ . On note  $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt$  et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$$

- Calculer  $I_0(a)$  en fonction de  $a$ .
- A l'aide d'une intégration par parties, exprimer  $I_1(a)$  en fonction de  $a$ .
- A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :
 
$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$
- Soit  $P$  le polynôme défini sur  $\mathbb{R}$  :
 
$$P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x.$$
 Démontrer en calculant  $I_2(a)$ ,  $I_3(a)$  et  $I_4(a)$ , que :
 
$$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$$

- Soit  $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$ . Calculer  $J(a)$ .

- a. Démontrer que pour tout  $t \in [0; a]$  :
 
$$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$$

- b. Démontrer que pour tout  $a \in [0; +\infty[$  :
 
$$J(a) \leq I_5(a) \leq 0$$

- En déduire que pour tout  $a \in [0; +\infty[$  :

$$|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}.$$

- Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur

lequel  $P(a)$  est une valeur approchée de  $\ln(1+a)$  à  $10^{-3}$  près.

### Exercice 4000



Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$$

La courbe représentative  $\mathcal{C}$  est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (*unité graphique 2 cm*)

- Etudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y=2x-2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ .
  - Etudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$ .
- Calculer  $f'(x)$  et montrer que :
 
$$f'(x) = x \cdot e^{-x} + 2 \cdot (1 - e^{-x}).$$
  - En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif :
 
$$f'(x) > 0$$
  - Préciser la valeur de  $f'(0)$ , puis établir le tableau de variations de  $f$ .
- A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en  $cm^2$ , du domaine plan limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=3$ .
- Déterminer le point  $A$  de  $\mathcal{C}$  où la tangente à  $\mathcal{C}$  est parallèle à  $\Delta$ .
  - Calculer la distance, exprimée en  $cm$ , du point  $A$  à la droite  $\Delta$ .

### Exercice 4128



Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left( \frac{e^{-x}}{2-x} \right) dx$$

- Etudier les variations de la fonction :
 
$$f : x \mapsto f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$$
 sur l'intervalle  $[0; 1]$ .
  - Montrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ , on a :
 
$$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$
- Soit  $J$  et  $K$  les intégrales définies par :
 
$$J = \int_0^1 (2+x) \cdot e^{-x} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx$$
  - Au moyen d'une intégration par parties, prouver que :
 
$$J = 3 - \frac{4}{e}$$
  - Utiliser un encadrement de  $f(x)$  obtenu précédemment pour démontrer que :
 
$$\frac{1}{3 \cdot e} \leq K \leq \frac{1}{6}.$$
  - Démontrer que :  $J+K=4 \cdot I$ .
  - Déduire de tout ce qui précède un encadrement de  $I$ , puis donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $I$ .

## 7. Intégrale par parties - suites et annales :

### Exercice 3196



1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 e^{1-x}$$

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

- a. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ ; quelle conséquence graphique pour  $\mathcal{C}$  peut-on en tirer ?
- b. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer sa fonction dérivée  $f'$ .
- c. Dresser le tableau de variations de  $f$  et tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère l'intégrale  $I_n$  définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

- a. Etablir une relation entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$ .
- b. Calculer  $I_1$ , puis  $I_2$ .
- c. Donner une interprétation graphique du nombre  $I_2$ . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c.

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  de  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$$

- b. En déduire un encadrement de  $I_n$  puis la limite de  $I_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 3205



#### Partie A : étude d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = x \ln(x+1)$$

Sa courbe représentative ( $\mathcal{C}$ ) dans un repère orthogonal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  est donnée en annexe.

- a. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe ( $\mathcal{C}$ ) au point  $O$  ?

2. On pose :  $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$

- a. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x \neq -1$ ,
 
$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$
- b. Calculer  $I$ .

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2., calculer, en unités d'aires, l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par la courbe ( $\mathcal{C}$ ) et les droites d'équations  $x=0$ ,  $x=1$  et  $y=0$ .

4. Montrer que l'équation  $f(x)=0,25$  admet une seule solution sur l'intervalle  $[0; 1]$ . On note  $\alpha$  cette solution. Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

#### Partie B : étude d'une suite

La suite  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ . La suite  $(u_n)$  converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice 3239



On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers  $e^2$ . On définit, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$$

1. Calculer  $I_1$ .
2. Etablir que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. Démontrer par récurrence que :

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$$

5. On pose, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{2^n}{n!}$ .

- a. Calculer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et prouver que pour tout entier naturel  $n \geq 3$  :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 3$  :

$$0 \leq u_n \leq u_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

6. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$  puis celle de la suite  $(I_n)$ .

7. Justifier enfin que :

$$e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)$$

### Exercice 3988



Soit  $f$  une fonction définie pour tout nombre réel  $x$  par :

$$f(x) = (1+x) \cdot e^{-x}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique 1 cm.

1. a. Etudier le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

- b. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ . Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

- c. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Calculer, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x)$ .  
En déduire les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- d. Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-2; 5]$ .

2. On note  $(I_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$I_n = \int_{-1}^n f(x) dx$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de  $I_n$  en fonction de  $n$ .

- a. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n \geq 0$ .
- b. Montrer que la suite  $(I_n)$  est croissante.
3. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels  $a$  et  $b$  :
- $$\int_a^b f(x) dx = (-2-b) \cdot e^{-b} + (2+a) \cdot e^{-a}$$
- b. En déduire l'expression de  $I_n$  en fonction de  $n$ .
- c. Déterminer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
- d. Donner une interprétation graphique de cette limite.
4. Déterminer  $a \in \mathbb{R}$  tel que :  $\int_{-1}^a f(x) dx = e$

Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

### Exercice 3999



On considère les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  non-nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cdot \cos t dt \quad ; \quad y_n = \int_0^1 t^n \cdot \sin t dt$$

1. a. Montrer que la suite  $(x_n)$  est à termes positifs.
- b. Etudier les variations de la suite  $(x_n)$ .
- c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite  $(x_n)$  ?
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non-nul :
- $$x_n \leq \frac{1}{n+1}$$
- b. En déduire la limite de la suite  $(x_n)$ .
3. a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non-nul :
- $$x_{n+1} = -(n+1) \cdot y_n + \sin(1).$$
- b. En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$
4. On admet que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :
- $$y_{n+1} = (n+1) \cdot x_n - \cos(1)$$
- Déterminer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot x_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot y_n$

## 8. Intégrale par parties - équation différentielles et annales :

### Exercice 3125



#### Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

2. Déterminer la solution  $\phi$  de cette équation, définie sur  $\mathbb{R}$  et qui vérifie les conditions :
- $$\phi(0) = 0 \quad ; \quad \phi'(0) = -e$$

#### Partie B

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -x \cdot e^{2x+1}$$

- a. Quel est, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $f(x)$  ?
- b. Etudier le sens de variation de  $f$ .
- c. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- d. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- e. On appelle  $(\mathcal{C})$  la représentation graphique de  $f$  dans une repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique : 4 cm)  
Quelle est la tangente à  $(\mathcal{C})$  au point  $O$  ?  
Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse  $(-A)$ .
- f. On appelle  $(\Gamma)$  la représentation graphique dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $g(x) = e^x$   
Quelle est la tangente à  $(\Gamma)$  au point d'abscisse  $(-A)$  ?

2. On appelle  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^x$$

- a. Etudier le sens de variation de  $h$ .  
En déduire le signe de  $h(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- b. Etudier la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(\Gamma)$ .
- c. Tracer, sur le même graphique, les courbes  $T$ ,  $(\mathcal{C})$  et  $(\Gamma)$ .
3. Soit  $m$  un réel quelconque et  $M$  le point de la courbe  $(\Gamma)$  d'abscisse  $M$ .
- a. Ecrire une équation de la tangente  $D$  à  $(\Gamma)$  en  $M$ .
- b. La tangente  $D$  coupe les axes de coordonnées en  $A$  et  $B$ .  
Calculer, en fonction de  $m$ ; les coordonnées du milieu  $J$  du segment  $[AB]$ .
- c. Prouver que  $J$  appartient à  $(\mathcal{C})$ .
- d. Tracer  $(D)$  et  $J$  pour  $m=0$ .

#### Partie C

1. Soit  $x$  un réel quelconque.  
A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :
- $$I(x) = \int_0^x t \cdot e^{2t} dt$$
2. Soit  $x$  un réel négatif.  
Calculer l'aire  $\mathcal{A}(x)$ , exprimée en  $cm^2$ , de l'ensemble des points  $N$  dont les coordonnées  $(u; v)$  vérifient :



$$\begin{cases} x \leq u \leq 0 \\ 0 \leq v \leq f(x) \end{cases}$$

3. Calculer  $\mathcal{A}(-1)$ .

4.  $\mathcal{A}(x)$  admet-elle une limite quand  $x$  tend vers moins l'infini? Si oui, laquelle?

### Exercice 3189



#### Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

1. Démontrer que la fonction  $u$  définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :  $u(x) = xe^{-x}$  est une solution de  $(E)$ .

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_0) : y' + y = 0$$

3. Démontrer qu'une fonction  $v$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , est solution de  $(E)$  si, et seulement si,  $v-u$  est solution de  $(E_0)$ .

4. En déduire toutes les solutions de  $(E)$ .

5. Déterminer la fonction  $f_2$ , solution de  $(E)$ , qui prend la valeur 2 en 0.

#### Partie B

$k$  étant un nombre réel donné, on note  $f_k$  la fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  par :

$$f_k(x) = (x+k) \cdot e^{-x}$$

On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Déterminer les limites  $f_k$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

2. Calculer  $f'_k(x)$  pour tout réel  $x$ .

3. En déduire le tableau de variations de  $f_k$ .

#### Partie C

1. On considère la suite d'intégrales  $(I_n)$  définie par :

$$I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$$

et pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :

$$I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$$

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale  $I_0$ .

b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

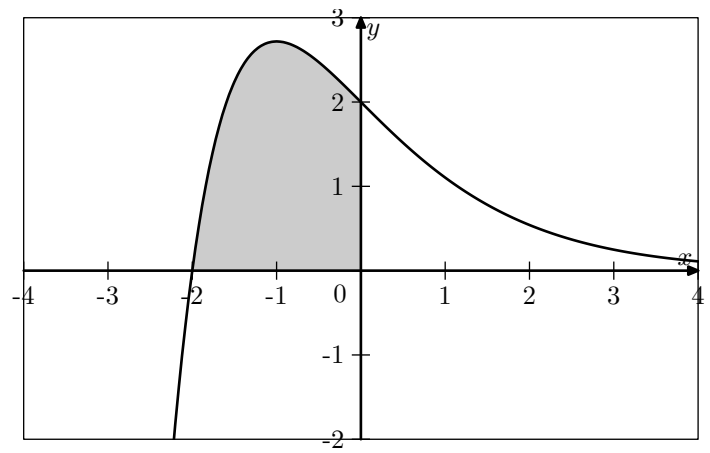
$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} \cdot e^2 + (n+1) \cdot I_n$$

c. En déduire les valeurs exactes des intégrales  $I_1$  et  $I_2$ .

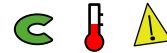
2. Le graphique ci-dessous représente une courbe  $\mathcal{C}_k$  qui est la représentation graphique d'une fonction  $f_k$  définie à la partie B.

a. A l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel  $k$  correspondant.

b. Soit  $\mathcal{S}$  l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire); exprimer  $\mathcal{S}$  en fonction de  $I_1$  et  $I_0$  et en déduire sa valeur exacte.



### Exercice 3214



#### Partie A

La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (20x + 10)e^{\frac{1}{2}x}$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique 1 cm)

1. Etudier la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

2. Etudier les variations de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variations.

3. Etablir que l'équation  $f(x) = 10$  admet une unique solution strictement positive  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ . Donner une valeur décimale approchée à  $10^{-3}$  près de  $\alpha$ .

4. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

5. Calculer l'intégrale :  $I = \int_0^3 f(x) dx$

#### Partie B

On note  $y(t)$  la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant  $t$ ,  $t$  étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant  $t=0$ , est  $y(0) = 10$ .

On admet que la fonction qui, à tout réel  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$  associe  $y(t)$ , est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$$

1. Vérifier que la fonction  $f$  étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle  $(E)$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

2. On se propose de démontrer que cette fonction  $f$  est l'unique solution de l'équation différentielle  $(E)$ , définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a. On note  $g$  une solution quelconque de l'équation différentielle  $(E)$ , définie sur  $[0; +\infty[$  vérifiant  $g(0) = 10$ . Démontrer que la fonction  $g-f$  est solution, sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , de l'équation différentielle :

$$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$$

b. Résoudre l'équation différentielle  $(E')$ .

c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur  $\theta$  en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 3]$ .

tervalle  $[0; 3]$ .

Calculer la valeur exacte de  $\theta$ , puis donner la valeur approchée décimale de  $\theta$  arrondie au degré.

## 9. Intégrale et volumes :

### Exercice 4018



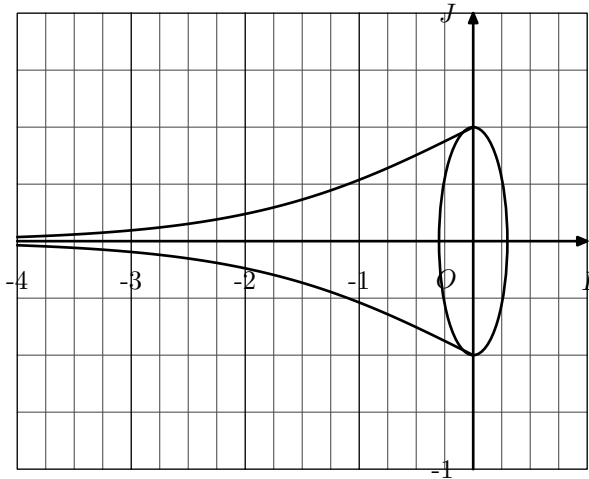
On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Soit  $\lambda$  un réel positif, on note  $\mathcal{V}(\lambda)$  l'intégrale :

$$\int_{-\lambda}^0 \pi \cdot [f(x)]^2 dx$$

On admet que  $\mathcal{V}(\lambda)$  est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe  $\mathcal{C}$  obtenue pour  $-\lambda \leq x \leq 0$ .



1. Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre réel  $x$  :

$$\frac{e^{2 \cdot x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{a \cdot e^x}{e^x + 1} + \frac{b \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

2. Exprimer  $\mathcal{V}(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ .  
3. Déterminer la limite de  $\mathcal{V}(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 4328



On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

La courbe ( $\mathcal{C}$ ) est la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe  $(Ox)$  de la région plane délimitée par la courbe ( $\mathcal{C}$ ), l'axe  $(Ox)$  et les droites d'équations :

$$x = \frac{1}{e} \quad ; \quad x = 1$$

On note  $V$  une mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que :

$$V = \int_{\frac{1}{e}}^1 \pi \cdot [f(x)]^2 dx$$

1. Montrer qu'une primitive de la fonction :

$$x \mapsto x^4 \cdot \ln x \text{ sur } ]0; +\infty[$$

est la fonction :  $x \mapsto \frac{x^5}{25} \cdot (5 \cdot \ln x - 1)$ .

2. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$V = \frac{\pi}{125} \cdot \left(2 - \frac{37}{e^5}\right)$$

### Exercice 3216



Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x \cdot e^{-x+2}$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

#### Partie A

1. Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.

2. a. Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction  $f$  et de la fonction logarithme népérien ; on notera  $\mathcal{L}$  cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x)$$

sur  $[1; +\infty[$ .

- b. Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ .

En déduire que l'équation  $f(x) = \ln(x)$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[1; +\infty[$ .

- c. Déterminer à  $10^{-3}$  près une valeur approchée de  $\alpha$ .

#### Partie B

1. A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

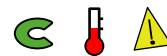
$$I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$$

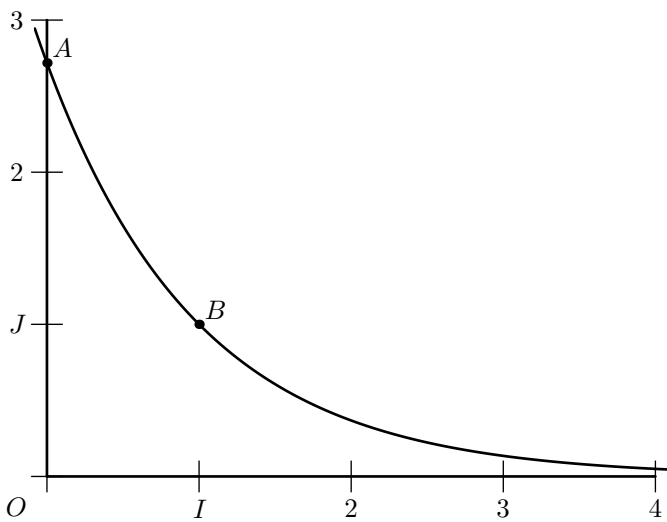
2. On définit le solide  $\mathcal{S}$  obtenu par révolution autour de l'axe  $(Ox)$  de la courbe d'équation  $y = f(x)$  pour  $0 \leq x \leq 3$  dans le plan  $(xOy)$  (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume  $\mathcal{V}$  du solide est donné par :

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx$$

- a. Exprimer  $\mathcal{V}$  en fonction de  $I$ .  
b. Déterminer alors une valeur approchée à  $1 \text{ cm}^3$  près du volume du solide.

### Exercice 3229





On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = 0 \quad \text{et telle que } f(0) = e$$

1. Déterminer  $f(x)$  pour tout  $x$  réel.
2. Soit  $t$  un réel donné de l'intervalle  $[1; e]$ . Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $e^{1-x} = t$  d'inconnue  $x$ .

## 10. Anciennes annales (avant 2012) :

### Exercice 3138



1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :
 
$$f(x) = (2x^3 - 4x^2) \cdot e^{-x}$$
  - a. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
  - b. Calculer  $f'(x)$  et montrer que :
 
$$f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4) \cdot e^{-x}.$$
  - c. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
  - d. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique : 1 cm).

2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{-x} dx$ 
  - a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I_1$ .
  - b. On admet que, pour tout  $n$  supérieur ou égal à 2 :
 
$$I_n = n \cdot I_{n-1} - \frac{1}{e}.$$
 Déterminer  $I_2$  et  $I_3$ .
  - c. Soit  $\mathcal{A}$  l'aire, exprimé en  $cm^2$ , du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $(\mathcal{C})$  et les droites d'équation  $x=0$  et  $x=1$ . Calculer  $\mathcal{A}$ .

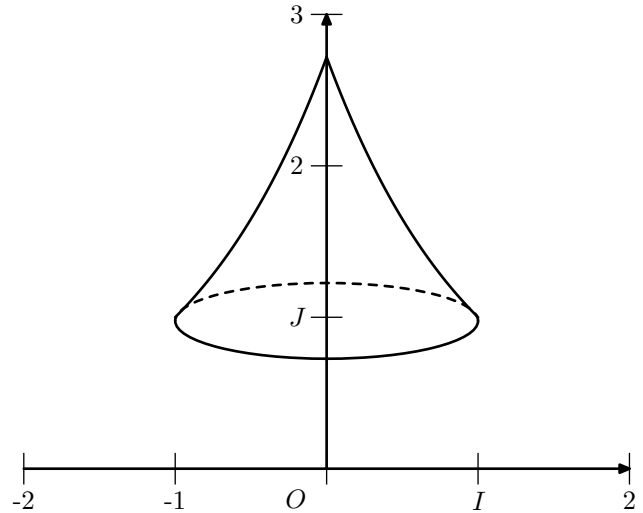
3. Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On définit la fonction  $v$  sur  $]0; +\infty[$  par  $v(x) = u\left(\frac{1}{x}\right)$ .
  - a. On suppose que  $u$  est croissante sur l'intervalle  $[a; b]$  (où  $0 < a < b$ ). Déterminer le sens de variation de  $v$  sur  $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$ .
  - b. On définit maintenant la fonction  $g$  par  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  sur  $]0; +\infty[$ , où  $f$  est la fonction définie dans la ques-

3. Soit  $A$  le point d'abscisse 0 et  $B$  le point d'abscisse 1 de la courbe.

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe  $\widehat{AB}$  comme représenté ci-dessous. On note  $V$  son volume.

On admet que : 
$$V = \pi \cdot \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$$

Calculer  $V$  à l'aide de deux intégrations par parties successives.



tion 1.

Déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .

- c. Dédurre des questions précédentes le tableau de variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

### Exercice 3201

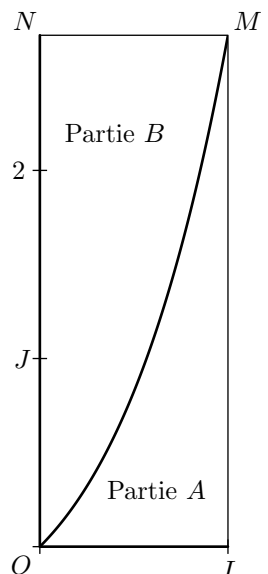


#### Première partie

Calculer l'intégrale : 
$$\int_0^1 x \cdot e^x dx.$$

#### Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire  $OIMN$  telle que, dans le repère orthonormal  $(O; \vec{OI}; \vec{ON})$ , la ligne courbe  $\mathcal{C}$  reliant le point  $O$  au point  $M$  est une partie de la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x \cdot e^x$ . Cette courbe partage la cible  $OIMN$  en deux parties  $A$  et  $B$  comme l'indique la figure ci-dessous.



Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties  $A$  ou  $B$ . On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe  $\mathcal{C}$ .

Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de  $\frac{1}{2}$  et que les probabilités d'atteindre les parties  $A$  et  $B$  sont proportionnelles à

leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie  $A$  est égale à  $\frac{1}{2e}$ .

Quelle est la probabilité d'atteindre la partie  $B$ ?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes :

- a. Soit  $\mathcal{X}$  la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie  $A$ . Définir la loi de probabilité de  $\mathcal{X}$ . En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.
- b. Soit  $E$  l'évènement : "Exactement deux fléchettes atteignent la partie  $A$ ". Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de  $E$ .
- c. Soit  $F$  l'évènement : "les trois fléchettes atteignent la partie  $B$ ". Calculer la probabilité de  $F$  (on donnera la valeur exacte).  
Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans partie  $B$ ?

3. On lance cette fois de manières indépendante  $n$  fléchettes.

- a. Déterminer en fonction de  $n$  la probabilité  $p_n$  pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie  $A$ .
- b. Déterminer le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $p_n \geq 0,99$ .

### Exercice 3222



La courbe  $\mathcal{C}$  donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$$

1. a. Montrer que  $f$  est dérivable et que, pour tout  $x$  strictement positif,  $f'(x)$  est du signe de :

$$N(x) = -[2(x \cdot \sqrt{x} - 1) + \ln x]$$

- b. Calculer  $N(1)$  et déterminer le signe de  $N(x)$  en distinguant les cas  $0 < x < 1$  et  $x > 1$ .
- c. En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  et les coordonnées du point de  $\mathcal{C}$  d'ordonnée maximale.

2. On note  $\mathcal{A}(\alpha)$  l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où  $\alpha$  désigne un réel de  $]0; 1]$ .

- a. Exprimer  $\mathcal{A}(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$  (on pourra utiliser une intégration par parties).
- b. Calculer la limite de  $\mathcal{A}(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

On définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par son premier terme  $u_0$  élément de  $[1; 2]$  et :

$$\text{pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$$

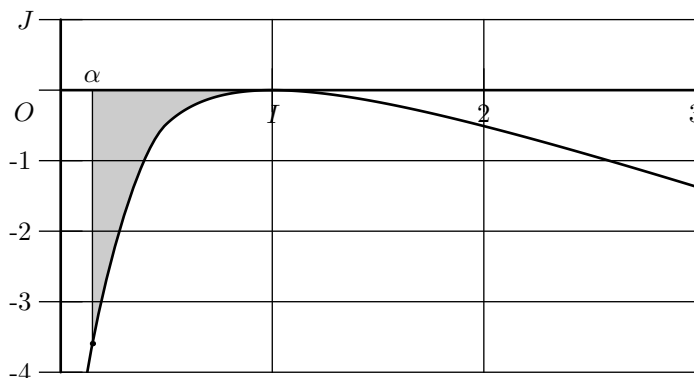
3. a. Démontrer, pour tout réel  $x$  élément de  $[1; 2]$ , la double inégalité :

$$0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$$

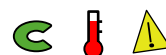
- b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier natu-

rel  $n$ ,  $u_n$  appartient à  $[1; 2]$ .

4. En remarquant que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ , déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
5. a. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.  
b. Déterminer la valeur exacte de  $\ell$ .



### Exercice 3262



On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (3 - 2 \ln x) + 1 \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

#### Partie A

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Que peut-on en déduire pour la fonction  $f$ ?  
b. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. a. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.  
b. Montrer que  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$ ,  $f'$  désignant la fonction dérivée de  $f$ .
3. Etudier le sens de variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ , puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ . Déterminer une valeur approchée décimale de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

#### Partie B

1. Calculer une équation de la tangente  $\mathcal{D}$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x = 1$ .
2. On considère la fonction  $g: x \mapsto f(x) - 2x - \frac{1}{2}$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
a. Calculer  $g'(x)$ , puis  $g''(x)$  où  $g'$  et  $g''$  désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de  $g$ . Etudier le sens de variations de  $g'$ . En déduire le signe de  $g'(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .  
b. Etudier le sens de variations de  $g$ .  
En déduire la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la tangente  $\mathcal{D}$ .
3. Construire la courbe  $\mathcal{C}$  et la tangente  $\mathcal{D}$  (unité graphique 2 cm)

## Partie C

$n$  est un entier naturel non nul.

- Exprimer en fonction de  $n$  le réel :  $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \cdot \ln x \, dx$   
(on pourra utiliser une intégration par parties)
- En déduire en fonction de l'entier  $n$ , l'aire  $\mathcal{A}_n$  exprimée en  $cm^2$  du domaine plan délimité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la tangente  $\mathcal{D}$  et les deux droites d'équation  $x = \frac{1}{n}$  et  $x = 1$ .
- calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$  et interpréter le résultat obtenu.

### Exercice 3251



## Partie A

On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$  non nul, par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^t \, dt.$$

- Montrer que la fonction  $f: t \mapsto (2-t) \cdot e^t$  est une primitive de  $g: (1-t) \cdot e^t$  sur  $[0; 1]$ .  
En déduire la valeur de  $u_1$ .
- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout  $n$  non nul :  
$$u_{n+1} = (n+1) \cdot u_n - 1 \quad (R)$$

## Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite  $(u_n)$  en utilisant pour le calcul la relation de récurrence  $(R)$  ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de $n$	Valeur de $u_n$ affichée par	
	la première calculatrice	la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,0969097075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,9115648000E-01
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite  $(u_n)$  quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

## Partie C

Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite  $(u_n)$  à partir de la définition :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : u_n = \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^t \, dt$$

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^* : u_n \geq 0$ .
- Montrer que pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^* : (1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$
  - En déduire que pour tout  $n$  non nul :  $u_n \leq \frac{e}{n+1}$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

## Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence  $(R)$  vérifiée par la suite  $(u_n)$  :

$$u_{n+1} = (n+1) \cdot u_n - 1$$

Etant donné un réel  $a$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par :

$$v_1 = a ; v_{n+1} = (n+1) \cdot v_n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  :

$$v_n = u_n + (n!) \cdot (a + 2 - e)$$

où  $n!$  désigne le produit des  $n$  premiers entiers naturels non nuls.

2. Etudier le comportement de la suite  $(v_n)$  à l'infini suivant les valeurs de  $a$ . (*On rappelle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$* )

3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.