

Hors programme lycée/Intégration

1. Intégrale par parties :

Exercice 3297



Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \cdot \ln(x+1)$$

1. On pose: $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$

- a. Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq 1$:

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

- b. Calculer I .

2. Déterminer par une intégration par parties l'intégrale suivante:

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x+1) dx$$

Exercice 3959



A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

a. $\int_{-1}^4 x \cdot e^x dx$

b. $\int_0^5 t \cdot e^{2-t} dt$

c. $\int_e^1 \ln t dt$

d. $\int_0^1 (2x+1) \cdot \ln(x+1) dx$

e. $\int_1^e \frac{5 \cdot \ln x}{x^2} dx$

f. $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \cdot \ln x dx$

Exercice 3961



A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

a. $\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$

b. $\int_1^{\ln 3} e^t \cdot (t-1) dt$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cdot \sin 3x dx$

d. $\int_1^e x \cdot (1 - \ln x) dx$

Exercice 4016



La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (20x + 10) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

Exercice 4294



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x + 1$$

1. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(x) dx$. On pourra utiliser une intégration par parties.

2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par :

- la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses ;
- les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

(on admettra que la fonction f est positive sur $[\frac{1}{2}; 1]$)

Exercice 4295



A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$$

2. Intégrale par parties - doubles :

Exercice 3960



A l'aide d'une double intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

a. $\int_{-2}^3 x^2 \cdot e^x dx$

b. $\int_1^5 (1-t^2)e^{-t} dt$

Exercice 4298



Le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

On note f' la fonction dérivée de f .

Pour tout nombre réel a , on considère l'intégrale :

$$I(a) = \int_0^a f(x) dx$$

3. Intégrale par parties - étude :

Exercice 3983



On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1) \cdot e^{1-x}$$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x (t-1) \cdot e^{1-t} dt$$

1. Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1; +\infty[$.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x appartenant à $[1; +\infty[$:

$$F(x) = -x \cdot e^{1-x} + 1$$

3. Démontrer que sur $[1; +\infty[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation :

$$\ln(2x) + 1 = x$$

Exercice 4004



Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$; l'unité graphique est 4 cm.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4. Intégrale par parties - suites :

Exercice 3982



Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n

définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$

1. Calculer I_2 .

2. Une relation de récurrence :

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

1. Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.

2. A l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :

$$I(a) = 2 - 2 \cdot e^{-a} \cdot \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$$

1. Montrer que $f(x) = \frac{e^{-x}-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; en déduire une primitive de f .

2. Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ , la droite d'équation $y=x$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$?

Hachurer cette surface sur la représentation graphique.

3. Calculer : $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$

4. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x \cdot [1 - [f(x)]] dx = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2 \cdot e}\right).$$

En déduire : $\int_0^1 x \cdot [f(x)]^2 dx$

Exercice 4296



Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; 1]$ par : $f(x) = 1 + x \cdot \ln x$

Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_\alpha^1 [1 - f(x)] dx$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$

2. Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$

3. On admet que la fonction f est positive sur $]0; 1]$. Interpréter graphiquement le résultat précédente.

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$

b. Calculer I_3 .

Exercice 3986



On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t} \cdot \sqrt{1+t} dt$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2. Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

On définit la suite (I_n) , pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1) \cdot e^{-t} dt$$

- Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a : $\sqrt{t+1} \leq t+1$
- En déduire que : $J_n \leq I_n$.
- Calculer I_n en fonction de n . En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).
- Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 4005



Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^\pi e^x \cdot \cos(n \cdot x) dx$

- Montrer que, pour tout entier naturel n : $\cos(n \cdot \pi) = (-1)^n$; $\sin(n \cdot \pi) = 0$
- A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{(-1)^n \cdot e^\pi - 1}{1 + n^2}$$

Exercice 4006



On pose : $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln x dx$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 dx$

5. Intégrale par parties - probabilité :

Exercice 4269



On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . La probabilité pour un client d'attendre moins de t minutes est définie par :

$$\mathcal{P}(X \leq t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

6. Intégrale par parties - annales :

Exercice 3124



L'objectif est d'étudier quelques propriétés de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$$

Partie A : Variations de f et tracé de la courbe (F)

- Calculer I_1 .
- En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_2 = \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$

Exercice 4222



Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$

- Calculer I_2 .
- Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1 - n) \cdot I_n$$

Exercice 4303



Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$

- Calculer I_2
- Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1 - n) \cdot I_n$$

- Calculer I_3 .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$$

- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$ en fonction de t .
- En déduire que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$
- Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min? plus de 5 min?

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$

Dans le plan (P) muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm) la représentation graphique de la fonction f est noté (F) .

- Déterminer la limite en $+\infty$ de f : interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Déterminer, suivant les valeurs de x de l'intervalle $[-1; +\infty[$, le signe de $x^2 - 2x - 1$ et celui de $f(x)$.
- b. Déterminer la fonction dérivée f' de f . En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations ; préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum.
3. Déterminer une équation de la tangente noté (T) à la courbe (F) au point A de (F) dont l'abscisse est 0.
4. a. Déterminer la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 0,1 près de chacun des coefficients directeurs des tangentes à la courbe (F) en $(1; 0)$ et $C(-1; 0)$.
- b. Tracer les trois tangentes à la courbe (F) en A , $B(A; 0)$ et $C(-1; 0)$ et la courbe (F) .

Partie B : Intégrales et aires

Les surfaces S et $S_1(u)$ du plan (P) , où u est un réel donné de l'intervalle $[1; +\infty[$ sont définies par :

- S est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$
- $S_1(u)$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $1 \leq x \leq u$ et $f(x) \leq y \leq 0$

Les aires respectives de ces surfaces sont notées \mathcal{A} , $\mathcal{A}_1(u)$. Leurs valeurs exactes seront exprimées en unités d'aire.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_1^x f(t) dt$ où x est un réel positif.

En procédant par deux intégrations par parties successives, déterminer cette intégrale.

2. En déduire la valeur exacte de $\int_1^0 f(t) dt$.

En déduire la valeur exacte de l'aire \mathcal{A}

3. Déterminer, en fonction de u où $u \geq 1$, l'aire $\mathcal{A}_1(u)$ puis la limite, lorsque u tend vers $+\infty$, de $\mathcal{A}_1(u)$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

4. L'objectif est de déterminer le réel α supérieur ou égal à 1 pour lequel :

$$\mathcal{A}_1(\alpha) = \mathcal{A}$$

- a. Démontrer que, sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation $\mathcal{A}_1(x) = \mathcal{A}$ est équivalente à : $x = 2 \cdot \ln(1+x)$
- b. Étudier le sens de variations de la fonction h définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par : $h(x) = x - 2 \cdot \ln(1+x)$. Démontrer que, sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation $x = 2 \cdot \ln(1+x)$ admet exactement une solution et que celle-ci, noté α , vérifie la condition : $2 < \alpha < 3$.
- c. Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α .

Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α puis l'encadrement de $f(\alpha)$, qu'on déduira du précédent, d'amplitude 2×10^{-4}

Exercice 3177



1. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$$

On donne ci-dessous le tableau de variations de g :

x	0	2, 3	x_0	2, 4	$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	↗ 0 ↘			$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5 \ln x}{x}$$

- a. Montrer que $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

- b. Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\int_1^a f(t) dt$ en fonction de a .

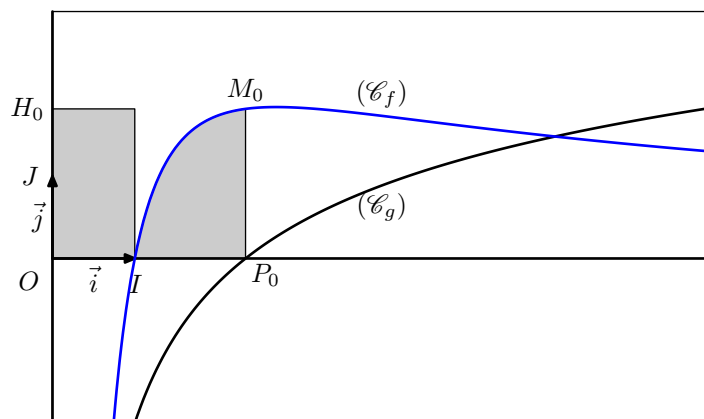
3. On a tracé dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) .

On appelle I le point de coordonnées $(1; 0)$, P_0 le point d'intersection de (\mathcal{C}_g) et de l'axe des abscisses, M_0 le point de (\mathcal{C}_f) ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

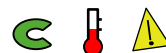
On nomme (\mathcal{D}_1) le domaine du plan délimité par la courbe (\mathcal{C}_f) et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$.

On nomme (\mathcal{D}_2) le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.

Démontrer que les deux domaines (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



Exercice 3211



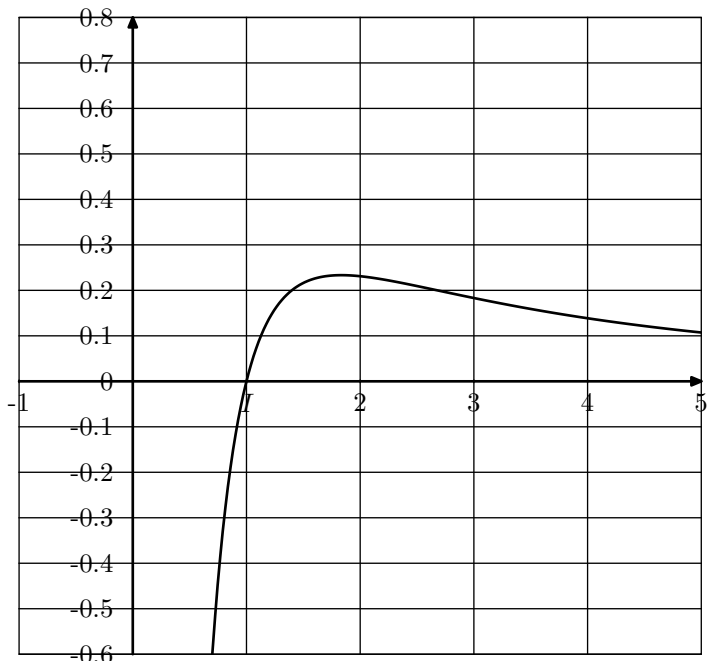
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$

1. Montrer que pour tout $x > 1$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$
2. a. Calculer $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx$ et $J = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière)
- b. En déduire un encadrement de $K = \int_2^4 f(x) dx$.

3. la figure ci-dessous représente la courbe représenta-

tive de f (unités graphiques: en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \text{ et on note } \mathcal{A} \text{ son aire.}$$



A l'aide de l'encadrement trouvé au 2. b.), donner un encadrement \mathcal{A} en cm^2 .

Exercice 3220



1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$$

a. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln x \, dx$$

On donnera le résultat exact sous la forme $p \cdot \ln 2 + q \cdot \ln 3$, avec p et q rationnels.

Exercice 3236



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$$

Sa courbe représentative \mathcal{C} est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm)

1. a. Etudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à \mathcal{C} .

c. Etudier la position relative de \mathcal{C} et Δ .

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$$

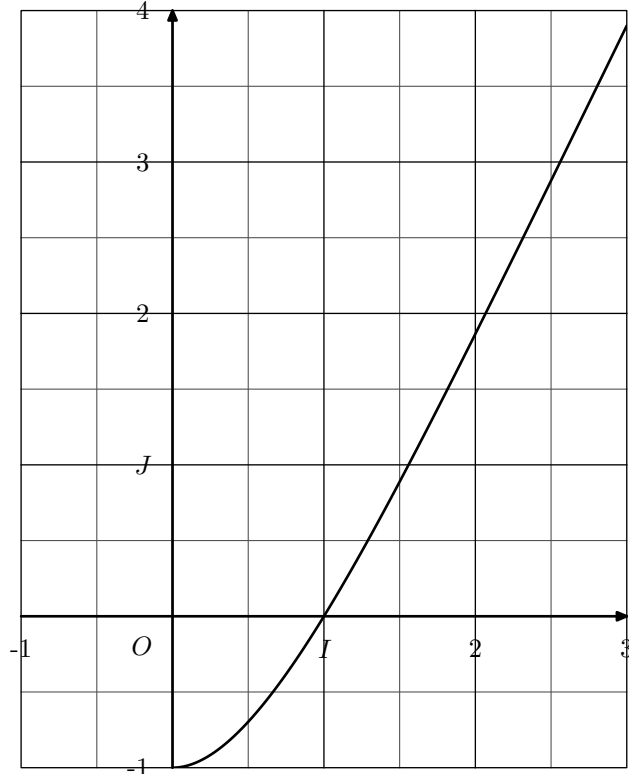
b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f .

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

4. a. Déterminer le point A de \mathcal{C} où la tangente à \mathcal{C} est parallèle à Δ .

b. Calculer la distance, exprimée en cm , du point A à la droite Δ .



Exercice 3249



L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad ; \quad g(x) = e^x - 1$$

On désigne par \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat.

1. Vérifier que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont une tangente commune au point $O(0; 0)$. Préciser la position de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à cette tangente.

2. Démontrer que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

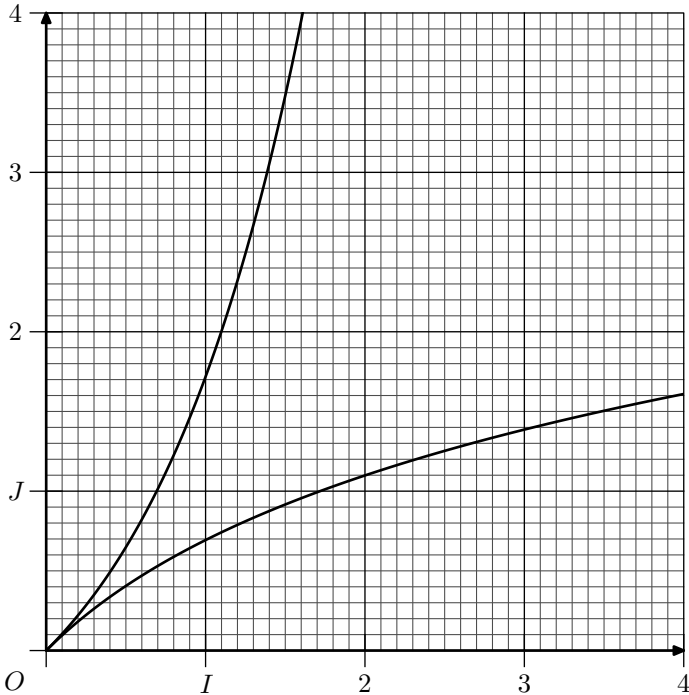
3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre

$$I(a) = \int_0^a \ln(x+1) dx.$$

- a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que :

$$I(a) = a \cdot \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx$$

- b. En déduire la valeur de $I(a)$.
 c. Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.



Exercice 3272



But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Soit $a \in [0; +\infty[$. On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$$

- Calculer $I_0(a)$ en fonction de a .
- A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a .
- A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

- Soit P le polynôme défini sur \mathbb{R} :

$$P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x.$$
 Démontrer en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que :

$$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$$

- Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculer $J(a)$.

- a. Démontrer que pour tout $t \in [0; a]$:

$$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$$
 b. Démontrer que pour tout $a \in [0; +\infty[$:

$$J(a) \leq I_5(a) \leq 0$$

- En déduire que pour tout $a \in [0; +\infty[$:

$$|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}.$$

- Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 4000



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$$

Sa courbe représentative \mathcal{C} est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (*unité graphique 2 cm*)

- a. Etudier la limite de f en $+\infty$.
 b. Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est asymptote à \mathcal{C} .
 c. Etudier la position relative de \mathcal{C} et Δ .
- a. Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = x \cdot e^{-x} + 2 \cdot (1 - e^{-x}).$$
 b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) > 0$$
 c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f .
- A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.
- a. Déterminer le point A de \mathcal{C} où la tangente à \mathcal{C} est parallèle à Δ .
 b. Calculer la distance, exprimée en cm , du point A à la droite Δ .

Exercice 4128



Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{2-x} \right) dx$$

- a. Etudier les variations de la fonction :

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$$
 sur l'intervalle $[0; 1]$.
 b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, on a :

$$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$
- Soit J et K les intégrales définies par :

$$J = \int_0^1 (2+x) \cdot e^{-x} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx$$
 - Au moyen d'une intégration par parties, prouver que :

$$J = 3 - \frac{4}{e}$$
 - Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que :

$$\frac{1}{3 \cdot e} \leq K \leq \frac{1}{6}.$$
 - Démontrer que : $J+K=4 \cdot I$.
 - Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I ,

7. Intégrale par parties - suites et annales :

Exercice 3196



1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 e^{1-x}$$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm .

- a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour \mathcal{C} peut-on en tirer ?
- b. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} . Déterminer sa fonction dérivée f' .
- c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe \mathcal{C} .

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

- a. Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n .
- b. Calculer I_1 , puis I_2 .
- c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c.

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$$

- b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3205



Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x+1)$$

Sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans un repère orthogonal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est donnée en annexe.

1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (\mathcal{C}) au point O ?

2. On pose : $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$

- a. Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

- b. Calculer I .

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2., calculer, en unités d'aires, l'aire

\mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0; 1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3239



On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2 . On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$$

1. Calculer I_1 .

2. Etablir que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. Démontrer par récurrence que :

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$$

5. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

- a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$0 \leq u_n \leq u_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n) .

7. Justifier enfin que :

$$e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)$$

Exercice 3988

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (1+x) \cdot e^{-x}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Etudier le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .
 - b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .
Calculer, pour tout nombre réel x , $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
 - d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^n f(x) dx$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

- a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geq 0$.
 - b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x) dx = (-2-b) \cdot e^{-b} + (2+a) \cdot e^{-a}$$
 - b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n .

- c. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

- d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^a f(x) dx = e$

Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire?

Exercice 3999

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non-nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cdot \cos t dt \quad ; \quad y_n = \int_0^1 t^n \cdot \sin t dt$$

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
 - b. Etudier les variations de la suite (x_n) .
 - c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :

$$x_n \leq \frac{1}{n+1}$$

- b. En déduire la limite de la suite (x_n) .

3. a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :

$$x_{n+1} = -(n+1) \cdot y_n + \sin(1).$$

- b. En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$y_{n+1} = (n+1) \cdot x_n - \cos(1)$$

$$\text{Déterminer : } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot x_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot y_n$$

8. Intégrale par parties - équation différentielles et annales :

Exercice 3125**Partie A**

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

2. Déterminer la solution ϕ de cette équation, définie sur \mathbb{R} et qui vérifie les conditions :

$$\phi(0) = 0 \quad ; \quad \phi'(0) = -e$$

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -x \cdot e^{2x+1}$$

- a. Quel est, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$?
- b. Etudier le sens de variation de f .
- c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- d. Dresser le tableau de variations de f .
- e. On appelle (\mathcal{C}) la représentation graphique de f dans une repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm)

Quelle est la tangente à (\mathcal{C}) au point O ?

Ecrire une équation de la tangente T à (\mathcal{C}) au point d'abscisse $(-A)$.

- f. On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = e^x$$
 Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse $(-A)$?

2. On appelle h la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^x$$

- a. Etudier le sens de variation de h .
En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .
- b. Etudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à (Γ) .
- c. Tracer, sur le même graphique, les courbes T , (\mathcal{C}) et (Γ) .

3. Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse M .

- a. Ecrire une équation de la tangente D à (Γ) en M .
- b. La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B .
Calculer, en fonction de m ; les coordonnées du milieu

J du segment $[AB]$.

- c. Prouver que J appartient à (\mathcal{C}) .
- d. Tracer (D) et J pour $m=0$.

Partie C

1. Soit x un réel quelconque.
A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x t \cdot e^{2t} dt$$

2. Soit x un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$, exprimée en cm^2 , de l'ensemble des points N dont les coordonnées $(u; v)$ vérifient :

$$\begin{cases} x \leq u \leq 0 \\ 0 \leq v \leq f(x) \end{cases}$$

3. Calculer $\mathcal{A}(-1)$.
4. $\mathcal{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini? Si oui, laquelle?

Exercice 3189



Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par : $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle :
 $(E_0) : y' + y = 0$
3. Démontrer qu'une fonction v , définie et dérivable sur \mathbb{R} , est solution de (E) si, et seulement si, $v-u$ est solution de (E_0) .
4. En déduire toutes les solutions de (E) .
5. Déterminer la fonction f_2 , solution de (E) , qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = (x+k) \cdot e^{-x}$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer les limites f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x .
3. En déduire le tableau de variations de f_k .

Partie C

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par :

$$I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$$

et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$$

- a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0 .

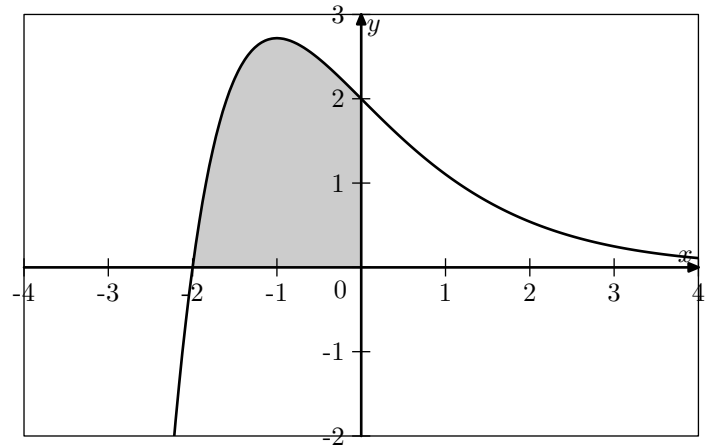
- b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} \cdot e^2 + (n+1) \cdot I_n$$

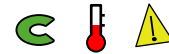
- c. En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2 .

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe \mathcal{C}_k qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie B.

- a. A l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.
- b. Soit \mathcal{S} l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer \mathcal{S} en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.



Exercice 3214



Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (20x + 10)e^{\frac{1}{2}x}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 1 cm)

1. Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Etablir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α .
4. Tracer la courbe \mathcal{C} .
5. Calculer l'intégrale : $I = \int_0^3 f(x) dx$

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$. On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est

l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

- a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$$

- b. Résoudre l'équation différentielle (E').

- c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale? Le résultat sera arrondi à la minute.
4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

Calculer la valeur exacte de θ , puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

9. Intégrale et volumes :

Exercice 4018



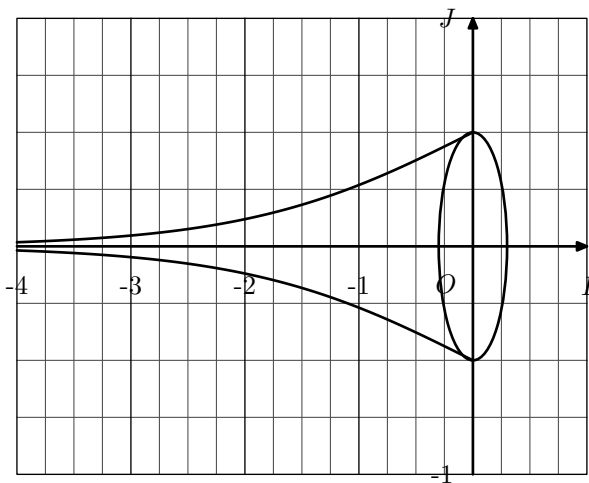
On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Soit λ un réel positif, on note $\mathcal{V}(\lambda)$ l'intégrale :

$$\int_{-\lambda}^0 \pi \cdot [f(x)]^2 dx$$

On admet que $\mathcal{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe \mathcal{C} obtenue pour $-\lambda \leq x \leq 0$.



1. Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel x :

$$\frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{a \cdot e^x}{e^x + 1} + \frac{b \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

2. Exprimer $\mathcal{V}(\lambda)$ en fonction de λ .
3. Déterminer la limite de $\mathcal{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice 4328



On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

La courbe (\mathcal{C}) est la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe

(Ox) de la région plane délimitée par la courbe (\mathcal{C}), l'axe (Ox) et les droites d'équations :

$$x = \frac{1}{e} ; x = 1$$

On note V un mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que :

$$V = \int_{\frac{1}{e}}^1 \pi \cdot [f(x)]^2 dx$$

1. Montrer qu'une primitive de la fonction :

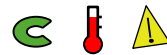
$$x \mapsto x^4 \cdot \ln x \text{ sur }]0; +\infty[$$

est la fonction : $x \mapsto \frac{x^5}{25} \cdot (5 \cdot \ln x - 1)$.

2. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$V = \frac{\pi}{125} \cdot \left(2 - \frac{37}{e^5} \right)$$

Exercice 3216



Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x \cdot e^{-x+2}$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $[0; +\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.

2. a. Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien ; on notera \mathcal{L} cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x)$$

sur $[1; +\infty[$.

- b. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.

- c. Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α .

Partie B

1. A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

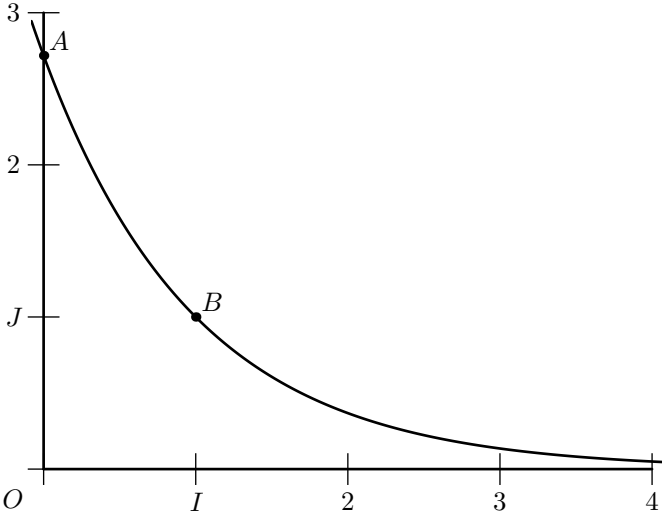
$$I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$$

2. On définit le solide \mathcal{S} obtenu par révolution autour de l'axe (Ox) de la courbe d'équation $y=f(x)$ pour $0 \leq x \leq 3$ dans le plan (xOy) (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume \mathcal{V} du solide est donné par :

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx$$

- Exprimer \mathcal{V} en fonction de I .
- Déterminer alors une valeur approchée à 1 cm^3 près du volume du solide.

Exercice 3229



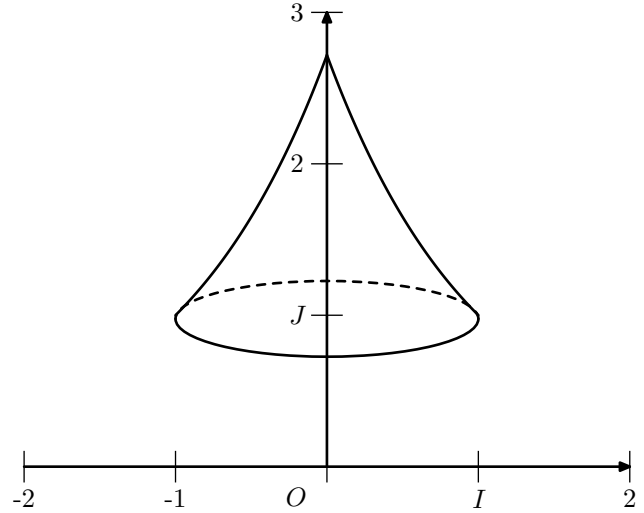
On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur \mathbb{R} , solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = 0 \quad \text{et telle que } f(0) = e$$

- Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
- Soit t un réel donné de l'intervalle $[1; e]$. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x .
- Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe \widehat{AB} comme représenté ci-dessous. On note V son volume.

On admet que : $V = \pi \cdot \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



10. Anciennes annales (avant 2012) :

Exercice 3138



- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2x^3 - 4x^2) \cdot e^{-x}$
 - Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
 - Calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4) \cdot e^{-x}$.
 - Dresser le tableau de variations de f .
 - Tracer la courbe (\mathcal{C}) représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{-x} dx$

- A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .
- On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2 : $I_n = n \cdot I_{n-1} - \frac{1}{e}$. Déterminer I_2 et I_3 .
- Soit \mathcal{A} l'aire, exprimé en cm^2 , du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (\mathcal{C}) et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. Calculer \mathcal{A} .

- Soit u une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On définit la fonction v sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = u\left(\frac{1}{x}\right)$.
 - On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a; b]$ (où $0 < a < b$). Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.
 - On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
 - Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 3201



Première partie

Calculer l'intégrale : $\int_0^1 x \cdot e^x dx$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire $OIMN$ telle que, dans le repère orthonormal $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$, la ligne courbe \mathcal{C} reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \cdot e^x$. Cette courbe partage la cible $OIMN$ en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.

Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B . On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe \mathcal{C} .

Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2e}$.
Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes:

- Soit \mathcal{X} la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A . Définir la loi de probabilité de \mathcal{X} . En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.
- Soit E l'évènement: "Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ". Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E .
- Soit F l'évènement: "les trois fléchettes atteignent la partie B ". Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte). Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans partie B ?

3. On lance cette fois de manières indépendante n fléchettes.

- Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A .
- Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n \geq 0,99$.

Exercice 3222  

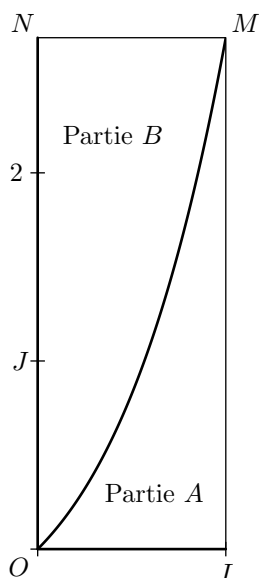
La courbe \mathcal{C} donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$$

1. a. Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de:

$$N(x) = -[2(x \cdot \sqrt{x} - 1) + \ln x]$$

b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.



c. En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$ et les coordonnées du point de \mathcal{C} d'ordonnée maximale.

2. On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0; 1]$.

- Exprimer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).
- Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1; 2]$ et:

$$\text{pour tout entier naturel } n: u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$$

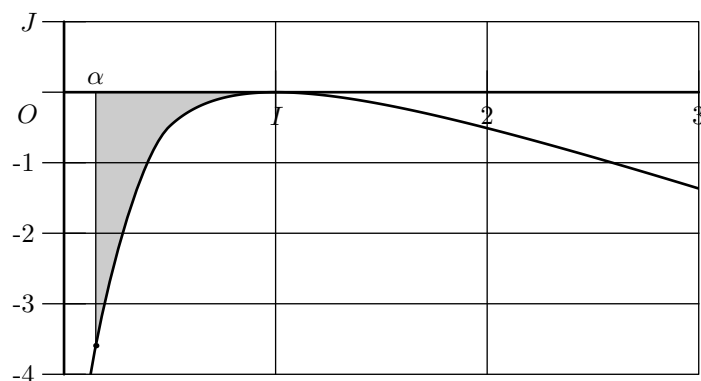
3. a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1; 2]$, la double inégalité:

$$0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[1; 2]$.

4. En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

5. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
b. Déterminer la valeur exacte de ℓ .



Exercice 3262   

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (3 - 2 \ln x) + 1 \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. a. Etudier la dérivabilité de f en 0.
b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, f' désignant la fonction dérivée de f .

3. Etudier le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente \mathcal{D} à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse $x=1$.

2. On considère la fonction $g: x \mapsto f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g . Etudier le sens de variations de g' . En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

b. Etudier le sens de variations de g . En déduire la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la tangente \mathcal{D} .

3. Construire la courbe \mathcal{C} et la tangente \mathcal{D} (unité graphique 2 cm)

Partie C

n est un entier naturel non nul.

1. Exprimer en fonction de n le réel: $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \cdot \ln x \, dx$
(on pourra utiliser une intégration par parties)

2. En déduire en fonction de l'entier n , l'aire \mathcal{A}_n exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe \mathcal{C} , la tangente \mathcal{D} et les deux droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x=1$.

3. calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3251



Partie A

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^t \, dt.$$

1. Montrer que la fonction $f: t \mapsto (2-t) \cdot e^t$ est une primitive de $g: (1-t) \cdot e^t$ sur $[0; 1]$.
En déduire la valeur de u_1 .

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul :

$$u_{n+1} = (n+1) \cdot u_n - 1 \quad (R)$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par	
	la première calculatrice	la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,0969097075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,9115648000E-01
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice?

Partie C

Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : u_n = \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^t \, dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : u_n \geq 0$.

2. a. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^* : (1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$

b. En déduire que pour tout n non nul: $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) :

$$u_{n+1} = (n+1) \cdot u_n - 1$$

Etant donné un réel a , on considère la suite (v_n) définie par :

$v_1 = a$; $v_{n+1} = (n+1) \cdot v_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$v_n = u_n + (n!) \cdot (a + 2 - e)$$

où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels

non nuls.

2. Etudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a . (On rappelle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.