Compiler exercice | Compiler correction | Plus d'option

Hors programme lycée/Intégration

1. Intégrale par parties :

Exercice 3297

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,+\infty\right[$ par :
$f(x)=x\cdot\ln\left(x+1\right)$

1. On pose : $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$
   a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x\neq 1$:
   $$\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$$
   b. Calculer I.
2. Déterminer par une intégration par parties l'intégrale suivante :
$$\int_0^1 x\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3959

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-1}^4 x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_0^5 t\cdot\mathrm{e}^{2\cdot t}\,\mathrm{d}t$

c. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ d. $\displaystyle\int_0^1 (2\cdot x+1)\cdot\ln\left(x+1\right)\mathrm{d}x$

e. $\displaystyle\int_1^e \frac{5\cdot\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ f. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$

Exercice 3961

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^2\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_1^{\ln 3}\mathrm{e}^t\cdot(t-1)\,\mathrm{d}t$

c. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cdot\sin 3x\,\mathrm{d}x$ d. $\displaystyle\int_1^e x\cdot(1-\ln x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 4016

La fonction f est définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :

$f(x)=\left(20\cdot x+10\right)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot x}$

Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;3\right]$.

Exercice 4294

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par :

$f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}\cdot x+1$

1. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\ln(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra utiliser une intégration par parties.
2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par :
   - la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses ;
   - les droites d'équation $x=\dfrac{1}{2}$ et $x=1$.

   (on admettra que la fonction f est positive sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$)

Exercice 4295

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=1-\frac{2}{e}$$

2. Intégrale par parties - doubles :

Exercice 3960

A l'aide d'une double intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-2}^3 x^2\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_1^5\left(1-t^2\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4298

Le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

On note f' la fonction dérivée de f.

Pour tout nombre réel a, on considère l'intégrale :

$$I(a) = \int_0^a f(x)\,dx$$

1. Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.
2. A l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :
$$I(a) = 2 - 2 \cdot e^{-a} \cdot \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$$

3. Intégrale par parties - étude :

Exercice 3983

On considère la fonction f définie sur $\left[1\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \left(x-1\right) \cdot e^{1-x}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(x)\,dt = \int_1^x (t-1) \cdot e^{1-t}\,dt$$

1. Démontrer que la fonction F est croissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x appartenant à $\left[1\,;+\infty\right[$:
$$F(x) = -x \cdot e^{1-x} + 1$$
3. Démontrer que sur $\left[1\,;+\infty\right[$, l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ est équivalente à l'équation :
$$\ln(2x) + 1 = x$$

Exercice 4004

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$; l'unité graphique est $4\,cm$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{e^{-x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$; en déduire une primitive de f.
2. Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ, la droite d'équation $y=x$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$?
Hachurer cette surface sur la représentation graphique.
3. Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \left[f(x)\right]^2 dx$
4. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$\int_0^1 x \cdot \Big[1 - \left[f(x)\right]\Big]\,dx = \frac{e^2-1}{e^2+1} - \ln\left(\frac{e^2+1}{2 \cdot e}\right).$$
En déduire : $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \left[f(x)\right]^2 dx$

Exercice 4296

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left]0\,;1\right]$ par : $f(x) = 1 + x \cdot \ln x$

Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_\alpha^1 \left[1 - f(x)\right] dx$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$I(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln\alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha \mapsto 0} I(\alpha)$
3. On admet que la fonction f est postive sur $\left]0\,;1\right]$. Interpréter graphiquement le résultat précédente.

4. Intégrale par parties - suites :

Exercice 3982

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx$

1. Calculer I_2.
2. Une relation de récurrence :
   a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:
   $$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$
   b. Calculer I_3.

Exercice 3986

On considère la suite numérique $\left(J_n\right)$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t} \cdot \sqrt{1+t}\,dt$$

1. Démontrer que la suite $\left(J_n\right)$ est croissante.

2. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)\cdot e^{-t}\,dt$$

a. Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a :
$$\sqrt{t+1} \leqslant t+1$$

b. En déduire que : $J_n \leqslant I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel *(indépendant de n)*.

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 4005

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x\cdot\cos(n\cdot x)\,dx$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n :
$$\cos\big(n\cdot x\big) = (-1)^n \quad ; \quad \sin\big(n\cdot\pi\big) = 0$$

2. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :
$$I_n = \frac{(-1)^n\cdot e^{\pi} - 1}{1+n^2}$$

Exercice 4006

On pose : $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln x\,dx$ et $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \big(\ln x\big)^2\,dx$

1. Calculer I_1.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$I_2 = \frac{5}{4}\cdot e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$$

Exercice 4222

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx$

1. Calculer I_2.

2. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que tout entier naturel $n \geqslant 2$:
$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)\cdot I_n$$

Exercice 4303

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx$

1. Calculer I_2

2. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:
$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)\cdot I_n$$

3. Calculer I_3.

5. Intégrale par parties - probabilite :

Exercice 4269

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité pour un client d'attendre moins de t minutes est définie par :

$$\mathcal{P}(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t\mapsto+\infty} \int_0^t \lambda\cdot x\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda\cdot x\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx$ en fonction de t.

2. En déduire que le temps moyen est $\dfrac{1}{\lambda}$

3. Le temps moyen d'attente étant de $5\,min$, quelle est la probabilité d'attendre plus de $10\,min$? plus de $5\,min$?

6. Intégrale par parties - annales :

Exercice 3124

L'objectif est d'étudier quelques propriétés de la fonction f définie sur l'intervalle $\big[-1\,;+\infty\big[$ par :

$$f(x) = \big(1-x^2\big)\cdot e^{-x}$$

Partie A : Variations de f et tracé de la courbe (F)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\big[-1\,;+\infty\big[$ par :
$$f(x) = \big(1-x^2\big)e^{-x}$$

Dans le plan (P) muni du repère orthonormé $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,\big)$ *(unité graphique : 2 cm)* la représentation graphique de la fonction f est noté (F).

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de f : interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Déterminer, suivant les valeurs de x de l'intervalle $[-1\,;+\infty[$, le signe de x^2-2x-1 et celui de $f(x)$.

b. Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations ; préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum.

3. Déterminer une équation de la tangente noté (T) à la courbe (F) au point A de (F) dont l'abscisse est 0.

4. a. Déterminer la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 0,1 près de chacun des coefficients directeurs des tangentes à la courbe (F) en $(1\,;0)$ et $C(-1\,;0)$.

b. Tracer les trois tangentes à la courbe (F) en A, $B(A\,;0)$ et $C(-1\,;0)$ et la courbe (F).

Partie B : Intégrales et aires

Les surfaces S et $S_1(u)$ du plan (P), où u est un réel donné de l'intervalle $[1\,;+\infty[$ sont définies par :

- S est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :
  $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant f(x)$
- $S_1(u)$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :
  $1\leqslant x\leqslant u$ et $f(x)\leqslant y\leqslant 0$

Les aires respectives de ces surfaces sont notées $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1(u)$. Leurs valeurs exactes seront exprimées en unités d'aire.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où x est un réel positif.

En procédant par deux intégrations par parties successives, déterminer cette intégrale.

2. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t$.

En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$

3. Déterminer, en fonction de u où $u\geqslant 1$, l'aire $\mathcal{A}_1(u)$ puis la limite, lorsque u tend vers $+\infty$, de $\mathcal{A}_1(u)$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

4. L'objectif est de déterminer le réel α supérieur ou égal à 1 pour lequel :
$\mathcal{A}_1(\alpha)=\mathcal{A}$

a. Démontrer que, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, l'équation $\mathcal{A}_1(x)=\mathcal{A}$ est équivalente à : $x=2\cdot\ln(1+x)$

b. Etudier le sensede variations de la fonction h définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par : $h(x)=x-2\cdot\ln(1+x)$.
Démontrer que, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, l'équation $x=2\cdot\ln(1+x)$ admet exactement une solution et que celle-ci, noté α, vérifie la condition : $2<\alpha<3$.

c. Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.
Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α puis l'encadrement de $f(\alpha)$, qu'on déduira du pécédent, d'amplitude 2×10^{-4}

Exercice 3177

1. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln x-\frac{2}{x}$$

On donne ci-dessous le tableau de variations de g :

x	0	$2,3$	x_0	$2,4$	$+\infty$
Variation de g	$-\infty$		0		$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{5\ln x}{x}$$

a. Montrer que $f(x_0)=\dfrac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b. Soit a un réel. Pour $a>1$, exprimer $\displaystyle\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a.

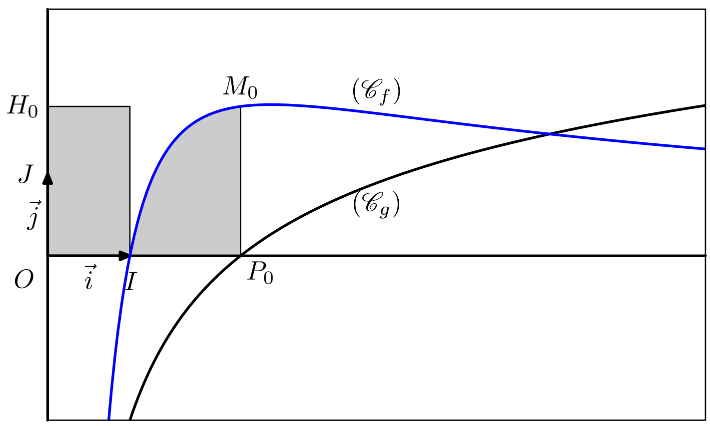
3. On a tracé dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

On appelle I le point de coordonnées $(1\,;0)$, P_0 le point d'intersection de $(\mathscr{C}_g)$ et de l'axe des abscisses, M_0 le point de $(\mathscr{C}_f)$ ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme $(\mathscr{D}_1)$ le domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$.

On nomme $(\mathscr{D}_2)$ le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.

Démontrer que les deux domaines $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



Exercice 3211

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2+x}$

1. Montrer que pour tout $x>1$: $\dfrac{\ln x}{x^2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{\ln x}{x}$

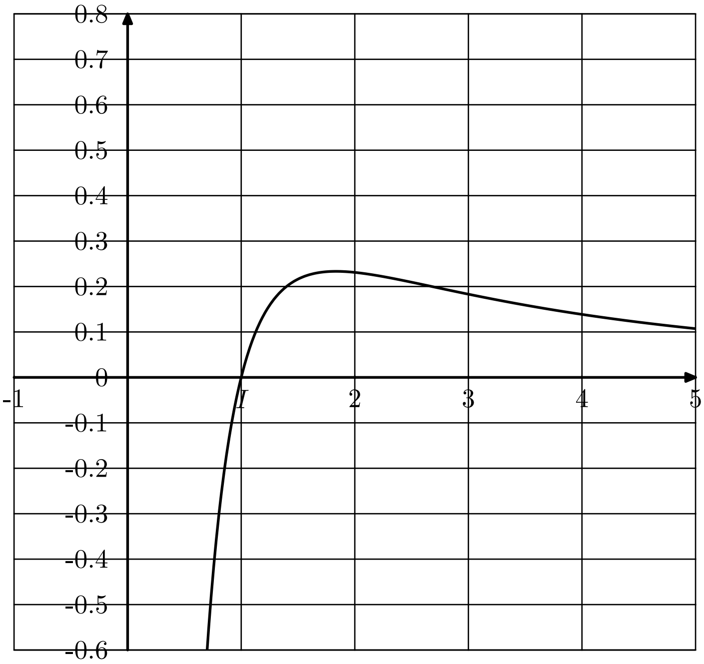
2. a. Calculer $I=\displaystyle\int_2^4\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_2^4\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ *(on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière)*

b. En déduire un encadrement de $K=\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. la figure ci-dessous représente la courbe représenta-

tive de f *(unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité)*. On considère l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

$$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases} \text{ et on note } \mathscr{A} \text{ son aire.}$$



A l'aide de l'encadrement trouvé au 2. (b.), donner un encadrement $\mathscr{A}$ en cm^2.

Exercice 3220

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

(a.) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

(b.) Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} \ln x \, \mathrm{d}x$$

On donnera le résultat exact sous la forme $p\cdot\ln 2 + q\cdot\ln 3$, avec p et q rationnels.

Exercice 3236

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1)\left(2-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormé ci-dessous *(unité graphique 2 cm)*

1. (a.) Etudier la limite de f en $+\infty$.

(b.) Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

(c.) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2. (a.) Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

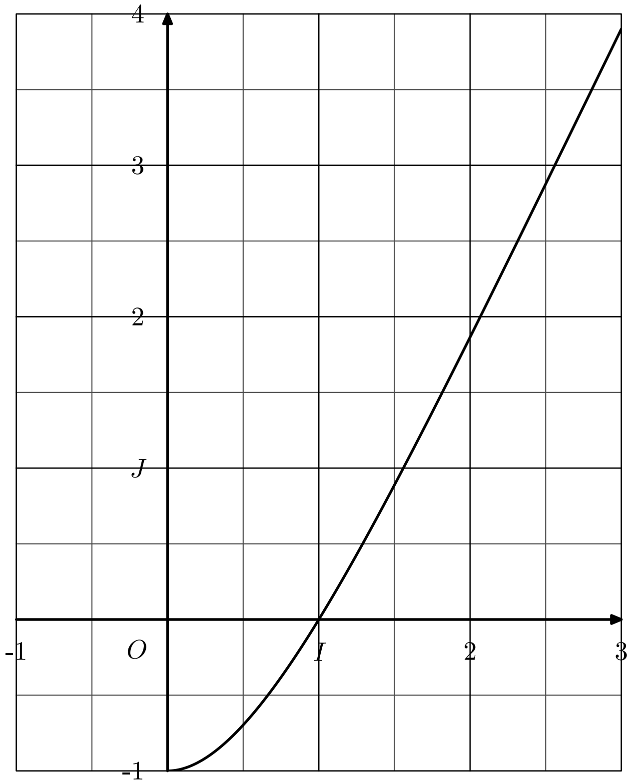
(b.) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x)>0$.

(c.) Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

4. (a.) Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

(b.) Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.



Exercice 3249

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad ; \quad g(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans une repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par la candidat.

1. Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point $O(0\,;0)$. Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.

2. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

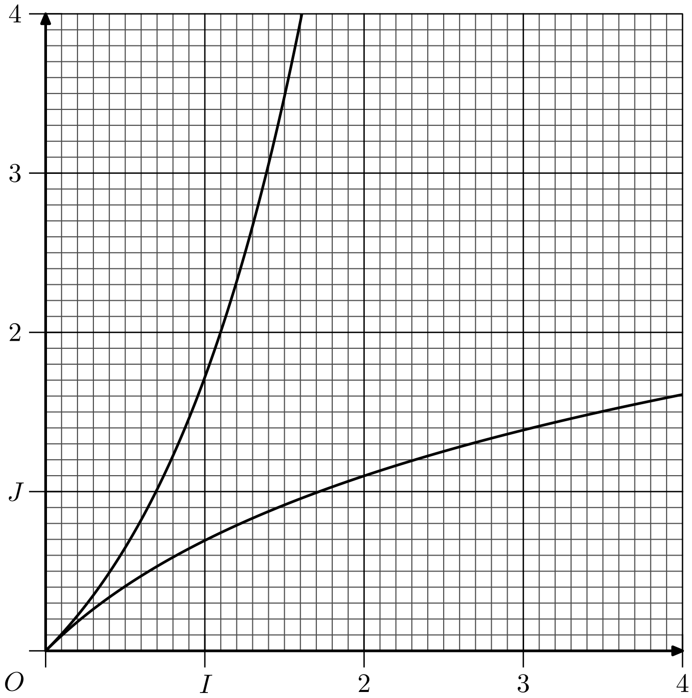
3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre

$$I(a) = \int_0^a \ln(x+1)\,\mathrm{d}x.$$

a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que :
$$I(a) = a\cdot\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\mathrm{d}x$$

b. En déduire la valeur de $I(a)$.

c. Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.



Exercice 3272

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Soit $a\in[0\,;+\infty[$. On note $I_0(a)=\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}$ et pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose :
$$I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer $I_0(a)$ en fonction de a.

2. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a.

3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :
$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}^*$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$:
$$P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x.$$
Démontrer en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que :
$$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$$

5. Soit $J(a)=\displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculer $J(a)$.

6. a. Démontrer que pour tout $t\in[0\,;a]$:
$$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$$

b. Démontrer que pour tout $a\in[0\,;+\infty[$:
$$J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$$

7. En déduire que pour tout $a\in[0\,;+\infty[$:
$$\left|\ln(1+a) - P(a)\right| \leqslant \frac{a^6}{6}.$$

8. Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 4000

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = (x-1)\left(2-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormé ci-dessous *(unité graphique 2 cm)*

1. a. Etudier la limite de f en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

   c. Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que :
$$f'(x) = x\cdot\mathrm{e}^{-x} + 2\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right).$$

   b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif :
$$f'(x) > 0$$

   c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

4. a. Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

   b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.

Exercice 4128

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :
$$I = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right)\mathrm{d}x$$

1. a. Etudier les variations de la fonction :
$$f : x \longmapsto f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$$
sur l'intervalle $[0\,;1]$.

   b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, on a :
$$\frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

2. Soit J et K les intégrales définies par :
$$J = \int_0^1 (2+x)\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

   a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que :
$$J = 3 - \frac{4}{e}$$

   b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que :
$$\frac{1}{3\cdot e} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}.$$

   c. Démontrer que : $J+K=4\cdot I$.

   d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.

7. Intégrale par parties - suites et annales :

Exercice 3196

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^2\mathrm{e}^{1-x}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique $2\,cm$.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer?

b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par :

$I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$

a. Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n.

b. Calculer I_1, puis I_2.

c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c. .

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0;1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$x^n\leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x}\leqslant x^n e$

b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3205

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$f(x)=x\ln(x+1)$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{u};\vec{v})$ est donnée en annexe.

1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O?

2. On pose : $I=\int_0^1\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x\neq 1$,

$$\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

b. Calculer I.

3. A l'aide d'un intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2. , calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0;1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). La suite (u_n) converge-t-elle?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $0\leqslant u_n\leqslant\frac{\ln 2}{n+1}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3239

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2. On définit, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, l'intégrale :

$$I_n=\int_0^2\frac{1}{n!}(2-x)^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_1.

2. Etablir que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$0\leqslant I_n\leqslant\frac{2^n}{n!}\left(\mathrm{e}^2-1\right)$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$I_{n+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. Démontrer par récurrence que :

$$\mathrm{e}^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\cdots+\frac{2^n}{n!}+I_n$$

5. On pose, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_n=\frac{2^n}{n!}$.

a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n\geqslant 3$:

$$u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}u_n.$$

b. En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 3$:

$$0\leqslant u_n\leqslant u_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).

7. Justifier enfin que :

$$\mathrm{e}^2=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\cdots+\frac{2^n}{n!}\right)$$

Exercice 3988

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par :
$f(x) = (1+x)\cdot e^{-x}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique $1\,cm$.

1. a. Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2;5]$.
2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
   $I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,dx$
   Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.
   a. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n \geqslant 0$.
   b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :
   $\int_a^b f(x)\,dx = (-2-b)\cdot e^{-b} + (2+a)\cdot e^{-a}$
   b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
   c. Déterminer : $\lim_{n\mapsto+\infty} I_n$.
   d. Donner une interprétation graphique de cette limite.
4. Déterminer $a\in\mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^{a} f(x)\,dx = e$
   Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire?

Exercice 3999

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non-nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n\cdot \cos t\,dt \quad ; \quad y_n = \int_0^1 t^n\cdot \sin t\,dt$$

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   b. Etudier les variations de la suite (x_n).
   c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n)?
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :
   $x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
   b. En déduire la limite de la suite (x_n).
3. a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :
   $x_{n+1} = -(n+1)\cdot y_n + \sin(1)$.
   b. En déduire que : $\lim_{n\mapsto+\infty} y_n = 0$
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul :
   $y_{n+1} = (n+1)\cdot x_n - \cos(1)$
   Déterminer : $\lim_{n\mapsto+\infty} n\cdot x_n$ et $\lim_{n\mapsto+\infty} n\cdot y_n$

8. *Intégrale par parties - équation différentielles et annales :*

Exercice 3125

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle :
   $y'' - 4y' + 4y = 0$
2. Déterminer la solution ϕ de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions :
   $\phi(0) = 0 \quad ; \quad \phi'(0) = -e$

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x) = -x\cdot e^{2x+1}$
   a. Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?
   b. Etudier le sens de variation de f.
   c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   d. Dresser le tableau de variations de f.
   e. On appelle $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans une repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ *(unité graphique : $4\,cm$)*
   Quelle est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point O?
   Ecrire une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $(-A)$.
   f. On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $g(x) = e^x$
   Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse $(-A)$?
2. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $h(x) = 1 + e\cdot x\cdot e^x$
   a. Etudier le sens de variation de h.
   En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.
   b. Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Γ).
   c. Tracer, sur le même graphique, les courbes T, $(\mathscr{C})$ et (Γ).
3. Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse M.
   a. Ecrire une équation de la tangente D à (Γ) en M.
   b. La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B.
   Calculer, en fonction de m ; les coordonnées du milieu

J du segment $[AB]$.

c. Prouver que J appartient à $(\mathscr{C})$.

d. Tracer (D) et J pour $m=0$.

Partie C

1. Soit x un réel quelconque.
A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :
$$I(x) = \int_0^x t{\cdot}\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$$

2. Soit x un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$, exprimée en cm^2, de l'ensemble des points N dont les coordonnées $(u\,;v)$ vérifient :
$$\begin{cases} x \leqslant u \leqslant 0 \\ 0 \leqslant v \leqslant f(x) \end{cases}$$

3. Calculer $\mathcal{A}(-1)$.

4. $\mathcal{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini? Si oui, laquelle?

Exercice 3189

Partie A

On considère l'équation différentielle :
$$(E) : \ y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle :
$$(E_0) : \ y' + y = 0$$

3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si, et seulement si, $v-u$ est solution de (E_0).

4. En déduire toutes les solutions de (E).

5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :
$$f_k(x) = (x+k){\cdot}\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\big)$.

1. Déterminer les limites f_k en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x.

3. En déduire le tableau de variations de f_k.

Partie C

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par :
$$I_0 = \int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :
$$I_n = \int_{-2}^{0} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0.

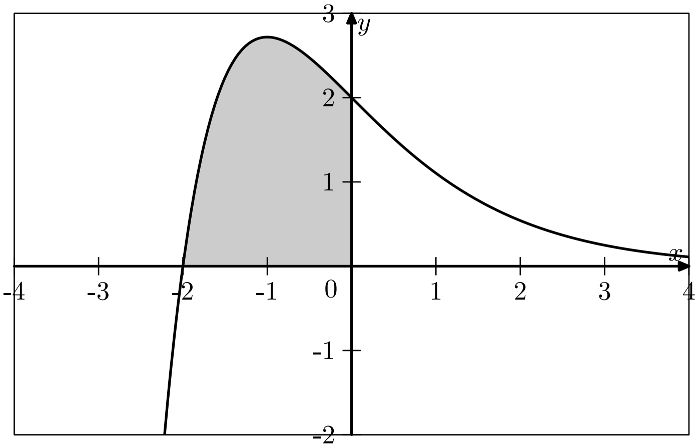
b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :
$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}{\cdot}\mathrm{e}^2 + (n+1){\cdot}I_n$$

c. En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2.

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe $\mathscr{C}_k$ qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie **B**.

a. A l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.

b. Soit $\mathscr{S}$ l'aire de la partie hachurée *(en unité d'aire)* ; exprimer $\mathscr{S}$ en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.



Exercice 3214

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ par :
$$f(x) = \big(20x+10\big)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\big)$ *(unité graphique 1 cm)*

1. Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

3. Etablir que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $\big]0\,;+\infty\big[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5. Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle :
$$(E) : y' + \frac{1}{2}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie **A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est

l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, de l'équation différentielle :

$$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$$

b. Résoudre l'équation différentielle (E').

c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique resdescent-elle à sa valeur initiale? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;3\right]$.

Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

9. Intégrale et volumes :

Exercice 4018

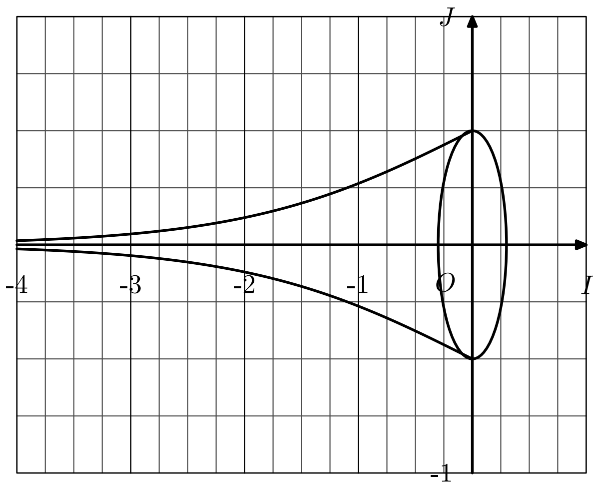
On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

Soit λ un réel positif, on note $\mathscr{V}(\lambda)$ l'intégrale :

$$\int_{-\lambda}^{0} \pi\cdot\big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x$$

On admet que $\mathscr{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue pour $-\lambda\leqslant x\leqslant 0$.



1. Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel x :

$$\frac{\mathrm{e}^{2\cdot x}}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \frac{a\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} + \frac{b\cdot\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$$

2. Exprimer $\mathscr{V}(\lambda)$ en fonction de λ.

3. Déterminer la limite de $\mathscr{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice 4328

On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = x^2\cdot\ln x$$

La courbe $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe (Ox) de la région plane délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe (Ox) et les droites d'équations :

$$x = \frac{1}{e} \quad ; \quad x = 1$$

On note V un mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que :

$$V = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \pi\cdot\big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer qu'une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto x^4\cdot\ln x \text{ sur } \left]0\,;+\infty\right[$$

est la fonction : $x \longmapsto \dfrac{x^5}{25}\cdot\big(5\cdot\ln x - 1\big)$.

2. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$V = \frac{\pi}{125}\cdot\left(2 - \frac{37}{\mathrm{e}^5}\right)$$

Exercice 3216

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par : $f(x)=x\cdot\mathrm{e}^{-x+2}$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $\left[0\,;+\infty\right[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.

2. a. Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien ; on notera $\mathscr{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x)$$

sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

b. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$.
En déduire que l'équation $f(x)=\ln(x)$ admet une unique solution α sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

c. Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

Partie B

1. A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

$$I = \int_0^3 x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

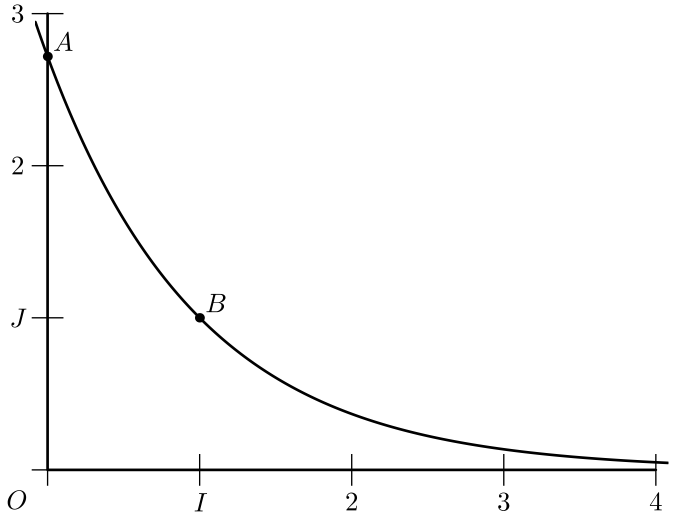
2. On définit le solide $\mathscr{S}$ obtenu par révolution autour de l'axe (Ox) de la courbe déquation $y=f(x)$ pour $0\leqslant x\leqslant 3$ dans le plan (xOy) *(repère orthonormé d'unité 4 cm)*. On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ du solide est donné par :

$$\mathscr{V}=\pi\int_0^3\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

a. Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de I.

b. Déterminer alors une valeur approchée à $1\,cm^3$ près du volume du solide.

Exercice 3229



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

$$(E):\ y'+y=0\quad\text{et telle que } f(0)=e$$

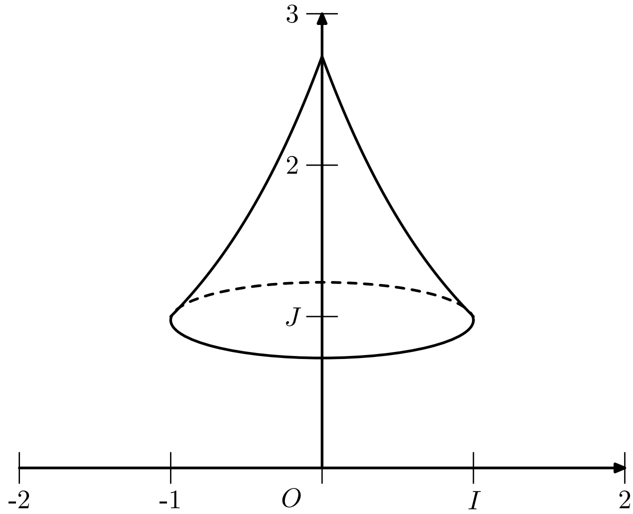
1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1\,;e]$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{1-x}=t$ d'inconnue x.

3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\widehat{AB}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume.

On admet que : $V=\pi\cdot\displaystyle\int_1^e(1-\ln t)^2\,\mathrm{d}t$

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



10. Anciennes annales (avant 2012) :

Exercice 3138

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\left(2x^3-4x^2\right)\cdot\mathrm{e}^{-x}$

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et montrer que :
$f'(x)=2x\left(-x^2+5x-4\right)\cdot\mathrm{e}^{-x}$.

c. Dresser le tableau de variations de f.

d. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ *(unité graphique : 1 cm)*.

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\cdot\mathrm{e}^{-x}dx$

a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b. On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2 :
$I_n=n\cdot I_{n-1}-\dfrac{1}{e}$.
Détermienr I_2 et I_3.

c. Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimé en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. Calculer $\mathcal{A}$.

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On définit la fonction v sur $]0\,;+\infty[$ par $v(x)=u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\,;b]$ *(où $0<a<b$)*.
Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\,;\dfrac{1}{a}\right]$.

b. On définit maintenant la fonction g par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\,;+\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

c. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

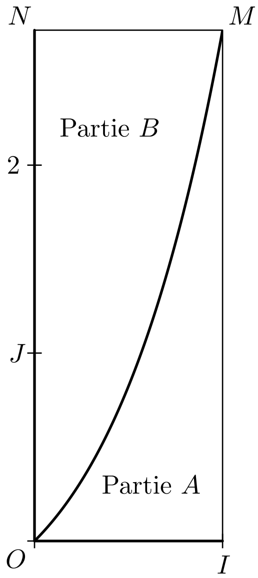
Exercice 3201

Première partie

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire $OIMN$ telle que, dans le repère orhonormal $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$, la ligne courbe $\mathscr{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\cdot e^x$. Cette courbe partage la cible $OIMN$ en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.



Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontière de la cible, ni la courbe $\mathscr{C}$.

Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\dfrac{1}{2e}$.
   Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes :
   a. Soit $\mathscr{X}$ la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de $\mathscr{X}$. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.
   b. Soit E l'évènement : "*Exactement deux fléchettes atteignent la partie A*".
   Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.
   c. Soit F l'évènement : "*les trois fléchettes atteignent la partie B*". Calculer la probabilité de F *(on donnera la valeur exacte)*.
   Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans partie B?

3. On lance cette fois de manières indépendante n fléchettes.
   a. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.
   b. Déterminer le plus petit entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $p_n \geqslant 0{,}99$.

Exercice 3222

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$$

1. a. Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de :
   $$N(x)=-\Big[2\big(x\cdot\sqrt{x}-1\big)+\ln x\Big]$$
   b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0<x<1$ et $x>1$.
   c. En déduire le sens de variation de f sur $\big]0\,;+\infty\big[$ et les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.

2. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $\big]0\,;1\big]$.
   a. Exprimer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α *(on pourra utiliser une intégration par parties)*.
   b. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

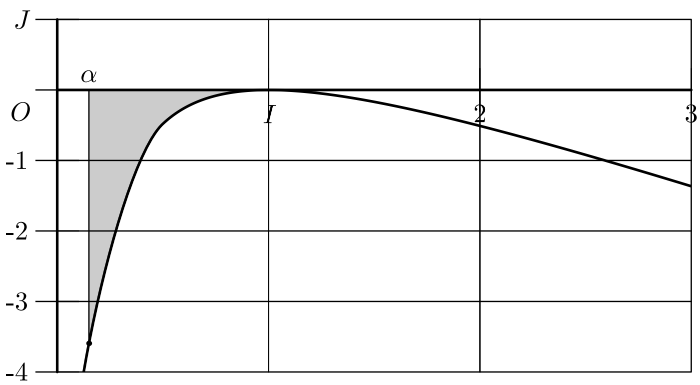
On définit une suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $\big[1\,;2\big]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel } n : \quad u_{n+1}=\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1$$

3. a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1\,;2]$, la double inégalité :
   $$0\leqslant\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\leqslant 1$$
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $\big[1\,;2\big]$.

4. En remarquant que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)+u_n$, déterminer le sens de variation de la suite $\big(u_n\big)$.

5. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
   b. Déterminer la valeur exacte de ℓ.



Exercice 3262

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ par :

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(x) &= \dfrac{1}{2}\cdot x^2\cdot\big(3-2\ln x\big)+1 \quad \text{si } x>0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,\big)$.

Partie A

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f?
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. a. Etudier la dérivabilité de f en 0.
   b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$, f' désignant la fonction dérivée de f.

3. Etudier le sens de variations de f sur $[0\,;+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x=1$.

2. On considère la fonction $g:x\mapsto f(x)-2x-\dfrac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

   a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g. Etudier le sens de variations de g'. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

   b. Etudier le sens de variations de g.
   En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}$.

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{D}$ *(unité graphique 2 cm)*

Partie C

n est un entier naturel non nul.

1. Exprimer en fonction de n le réel : $I_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\cdot\ln x\;\mathrm{d}x$

   (on pourra utiliser une intégration par parties)

2. En déduire en fonction de l'entier n, l'aire $\mathscr{A}_n$ exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{D}$ et les deux droites d'équation $x=\dfrac{1}{n}$ et $x=1$.

3. calculer $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\mathscr{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3251

Partie A

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n=\int_0^1(1-t)^n\cdot e^t\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f:\ t\mapsto(2-t)\cdot e^t$ est une primitive de $g:\ (1-t)\cdot e^t$ sur $\left[0\,;1\right]$.
   En déduire la valeur de u_1.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul :
   $$u_{n+1}=(n+1)\cdot u_n-1\qquad(R)$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par	
	la première calculatrice	la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,0969097075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,9115648000E-01
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice?

Partie C

Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*:\quad u_n=\int_0^1(1-t)^n\cdot e^t\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad u_n\geqslant 0$.

2. a. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad(1-t)^n e^t\leqslant e\times(1-t)^n$

   b. En déduire que pour tout n non nul : $\quad u_n\leqslant\dfrac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) :

$$u_{n+1}=(n+1)\cdot u_n-1$$

Etant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$v_1 = a \quad ; \quad v_{n+1} = (n+1)\cdot v_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n :
   $v_n = u_n + (n!)\cdot(a+2-e)$
   où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

2. Etudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a. *(On rappelle que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} n! = +\infty$)*

3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

