

Hors programme lycée/Derivées

1. Nombres dérivés à gauche et à droite :

Exercice 3483

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x + 2\right) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 1} + 1$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- a. Etablir l'égalité suivante pour tout nombre réel h :

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{(h+3) \cdot \sqrt{h^2}}{2 \cdot h}$$

- b. En déduire la valeur des deux limites suivantes :

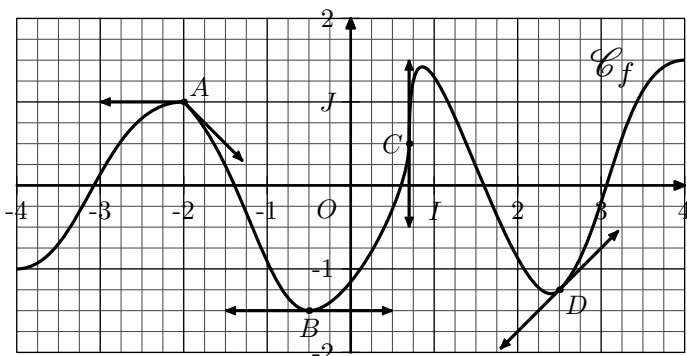
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

- Que pouvez-vous dire sur l'aspect de la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse -1 ? (tracer la courbe à l'aide d'une calculatrice)

Exercice 3484

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la courbe \mathcal{C}_f représentative d'une fonction f . Voici sa représentation :



- Justifier que la fonction f n'est pas dérivable pour l'abscisse du point C .

- a. Graphiquement, déterminer les deux limites suivantes :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} ; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

- b. La fonction f est-elle dérivable en -2 ?

- Déterminer, graphiquement, la valeur des nombres

dérivées de la fonction f aux abscisses des points B et D .

Exercice 3485

On note f la fonction racine carrée; cette fonction est définie sur \mathbb{R}_+ .

- Considérons $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $[x-h; x+h] \subset \mathbb{R}_+$

- Etablir la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

- En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f en $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- a. Déterminer la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

- Que peut-on dire de la dérivabilité de la fonction f en 0 ?

Exercice 3508

- Justifier la non-dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \sqrt{x}$ b. $g(x) = |x|$

c. $h(x) = \sqrt{x^2 + x}$

- Considérons la fonction j définie sur \mathbb{R} par la relation : $j(x) = x \cdot |x|$

Justifier que la fonction j est dérivable en 0 .

Exercice 3533

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \cos(2 \cdot x)$$

- a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 .

- Justifier que (T) est également la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse π .

- Etudier la position relative de \mathcal{C}_f et de (T)

- On considère la droite (d) d'équation :

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x.$$

- Justifier que la droite (d) est tangente à la courbe en

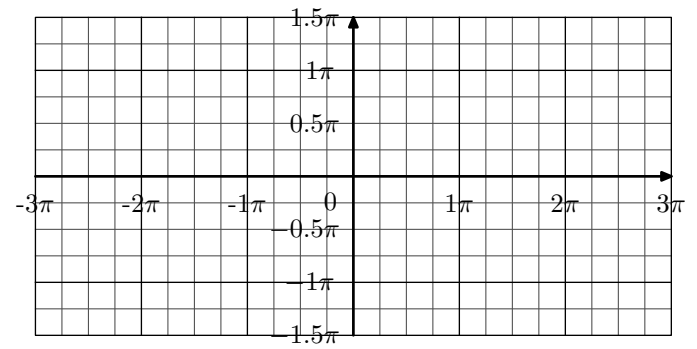
plusieurs points.

- b. Etudier la position relative de (d) et \mathcal{C}_f .

3. a. Compléter le tableau de valeur suivant :

x	π	2π	3π	4π
$f(x)$				

- b. Effectuer le tracé de la courbe \mathcal{C}_f sur \mathbb{R}_+



4. a. Etudier la parité de la fonction f .

- b. Effectuer le tracé de la courbe \mathcal{C}_f sur \mathbb{R}_-

2. Développement limité :

Exercice 3504

1. Soit f une fonction définie en 0 telle que :

$$f(x) = a \cdot x + b + x \cdot \varepsilon(x) \quad \text{où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Montrer que la fonction f est dérivable en 0.

2. Soit g une fonction définie en 0 dont l'image de x est définie par :

$$g(x) = 3 - 2x + x^2$$

- a. Justifier, sans effectuer aucun calcul, que la fonction g est dérivable en 0.

- b. Donner la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 0.

3. Soit h une fonction définie en 0 dont l'image de x est définie par :

$$h(x) = \frac{-3x^3 + 3x^2 + x - 2}{x + 1}$$

- a. Etablir l'égalité suivante : $h(x) = 3x - 2 - \frac{3 \cdot x^3}{x + 1}$

- b. En déduire l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_h au point d'abscisse 0.