

# Hors programme lycée/Derivées

## 1. Nombres dérivés à gauche et à droite :

### Exercice 3483

On considère la fonction  $f$  dont l'image d'un nombre  $x$  est définie par la relation :

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x + 2\right) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 1} + 1$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
- a. Etablir l'égalité suivante pour tout nombre réel  $h$  :

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{(h+3) \cdot \sqrt{h^2}}{2 \cdot h}$$

- b. En déduire la valeur des deux limites suivantes :

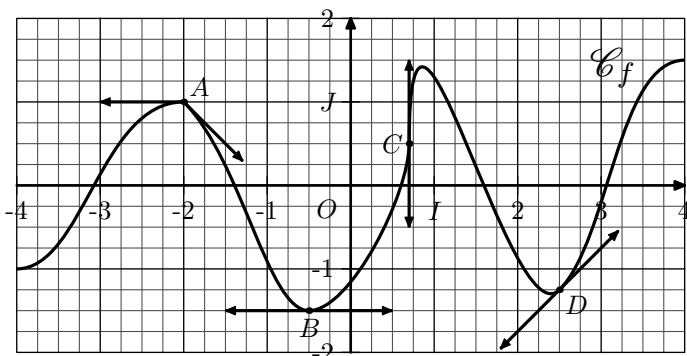
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

- Que pouvez-vous dire sur l'aspect de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $-1$ ? (tracer la courbe à l'aide d'une calculatrice)

### Exercice 3484

Dans le plan muni d'un repère  $(O; I; J)$ , on considère la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative d'une fonction  $f$ . Voici sa représentation :



- Justifier que la fonction  $f$  n'est pas dérivable pour l'abscisse du point  $C$ .

- a. Graphiquement, déterminer les deux limites suivantes :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} ; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

- b. La fonction  $f$  est-elle dérivable en  $-2$ ?

- Déterminer, graphiquement, la valeur des nombres

dérivées de la fonction  $f$  aux abscisses des points  $B$  et  $D$ .

### Exercice 3485

On note  $f$  la fonction racine carrée; cette fonction est définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

- Considérons  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $[x-h; x+h] \subset \mathbb{R}_+$

- Etablir la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

- En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction  $f$  en  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

- a. Déterminer la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

- Que peut-on dire de la dérivabilité de la fonction  $f$  en  $0$ ?

### Exercice 3508

- Justifier la non-dérivabilité en  $0$  des fonctions suivantes :

a.  $f(x) = \sqrt{x}$                       b.  $g(x) = |x|$

c.  $h(x) = \sqrt{x^2 + x}$

- Considérons la fonction  $j$  définie sur  $\mathbb{R}$  par la relation :  
 $j(x) = x \cdot |x|$

Justifier que la fonction  $j$  est dérivable en  $0$ .

### Exercice 3533

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  dont l'image d'un nombre  $x$  est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \cos(2 \cdot x)$$

- a. Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $0$ .

- Justifier que  $(T)$  est également la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $\pi$ .

- Etudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et de  $(T)$

- On considère la droite  $(d)$  d'équation :

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x.$$

- Justifier que la droite  $(d)$  est tangente à la courbe en

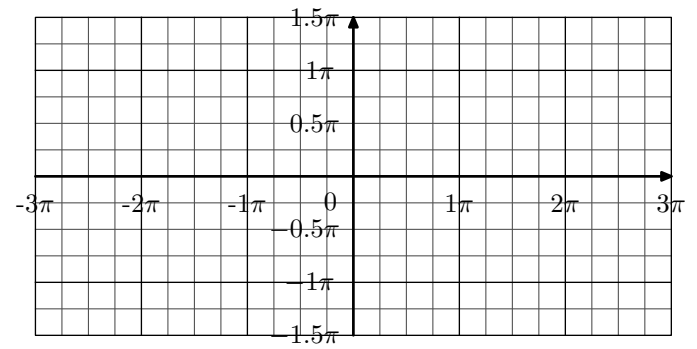
plusieurs points.

- b. Etudier la position relative de  $(d)$  et  $\mathcal{C}_f$ .

3. a. Compléter le tableau de valeur suivant :

$x$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$
$f(x)$				

- b. Effectuer le tracé de la courbe  $\mathcal{C}_f$  sur  $\mathbb{R}_+$



4. a. Etudier la parité de la fonction  $f$ .

- b. Effectuer le tracé de la courbe  $\mathcal{C}_f$  sur  $\mathbb{R}_-$

## 2. Développement limité :

### Exercice 3504

1. Soit  $f$  une fonction définie en 0 telle que :  
 $f(x) = a \cdot x + b + x \cdot \varepsilon(x)$  où  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$   
Montrer que la fonction  $f$  est dérivable en 0.
2. Soit  $g$  une fonction définie en 0 dont l'image de  $x$  est définie par :  
 $g(x) = 3 - 2x + x^2$
- a. Justifier, sans effectuer aucun calcul, que la fonction  $g$  est dérivable en 0.

- b. Donner la valeur du nombre dérivée de la fonction  $f$  en 0.

3. Soit  $h$  une fonction définie en 0 dont l'image de  $x$  est définie par :

$$h(x) = \frac{-3x^3 + 3x^2 + x - 2}{x + 1}$$

- a. Etablir l'égalité suivante :  $h(x) = 3x - 2 - \frac{3 \cdot x^3}{x + 1}$
- b. En déduire l'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_h$  au point d'abscisse 0.