

# Hors programme lycée/Comportements asymptotiques

## 1. Première approche :

### Exercice 6175

On considère trois fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par les relations :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad h(x) = \frac{2x^2+x}{5x}$$

On donne ci-dessous un tableau de valeurs pour chacune des fonctions :

$x$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2,1}{3,01}$	$\frac{2,01}{3,001}$	$\frac{2,001}{3,00001}$	$\frac{2,0001}{3,0000001}$

$x$	0,01	0,0001	0,000001
$g(x)$	$\frac{-0,98}{0,1}$	$\frac{-0,9998}{0,01}$	$\frac{-0,999998}{0,001}$

$x$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$h(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{0,12}{0,5}$	$\frac{0,0102}{0,05}$	$\frac{0,001002}{0,005}$	$\frac{0,00010002}{0,0005}$

Remarquer que, dans chaque tableau, les valeurs de  $x$  "progressent lentement" vers 0.

- Pour chaque tableau et à l'aide de la calculatrice, observer la progression des valeurs approchées de ces quotients.
  - Dans chaque cas, faire une conjecture sur la valeur limite de ces images lorsque :  
*"x tend vers 0 par des valeurs supérieures à 0"*  
 Pour la fonction  $f$ , cette valeur se note :  
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  ou  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- A l'aide de votre calculatrice, tracer les courbes représentatives de ces fonctions et observer la courbe au "voisinage" de l'axe des ordonnées.

## 2. Manipulations des formes indéterminées :

### Exercice 2526

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f : x \mapsto \frac{5x+1}{-5x^2+4x+1}$$

- Donner l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
- Déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

- Justifier que les deux limites ci-dessous représentent une forme indéterminée :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}^+} f(x)$$

- Montrer que, pour  $x \in \mathcal{D}_f$ , on a :  $f(x) = -\frac{1}{x-1}$
- En déduire la valeur des deux limites présentées à la question a).

## 3. Calculs de limites à l'infini :

### Exercice 3055

Déterminer les limites ci-dessous :

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (2x + 1)$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 4x)(x + 1)$

c.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + 2x + \frac{3}{2x + 1}$

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 4}{5 + \frac{1}{x}}$

e.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2x - 1}$

f.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^3 - 2x}$

**Exercice 3047**



Parmi les limites proposées ci-dessous, donner celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^4 - x^3$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 - 2x^2$

c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{5 - 2x}$

d.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2 + x^2}$

e.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2}$

f.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{-x^4 + x}$

**4. Calcul de limites en un réel :**

**Exercice 3057**



Déterminer les limites ci-dessous :

a.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{3}{2x - 1}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2}{3 - x}$

c.  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{4 - x}{3 - 2x}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(x - 5)(7 - x)}{2x - 10}$

e.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{8 - 2x}}$

f.  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 + 4x - 4}{2x + 4}$

**Exercice 3066**



Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^4 - 2x^2}{5x^2 - x}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6x^{12} + 5x^6 - 3x^2}{3x^8 - 5x^2}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \sin x}$

**Exercice 3048**



**5. Calculs de limites :**

**Exercice 2584**



Déterminer la valeur des limites suivantes :

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x^3 - 2}$

b.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{3x - 2}{-2x^2 + 7x - 3}$

c.  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x - \sqrt{x + 3}}{2 + x}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 12x + 9}{-x^2 + 5x - 6}$

e.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{2x^2 + 1}$

f.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{2x^2 + 1}$

**Exercice 3056**



Déterminer les limites ci-dessous :

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{5 - 3x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{2x + 1}$

c.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x}{x^2 - 4x + 7}$

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3}{5 - 3x^2}$

e.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + 4}$

f.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100} - 5x^{44} + x^{14}}{3x^{102} - 5x^{56}}$

**Exercice 3096**



Déterminer chacune des limites suivantes :

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 - 7x$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 3x^2$

c.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 - 5x^6}{2}$

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - x^3 + 2}{-2x^2 - x + 2}$

e.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 5}{x^4 + 3x + 1}$

f.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{-3x^2 + 5x - 1}$

Parmi les limites proposées ci-dessous, déterminer celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2}{x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 + x - 6}$

c.  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \sqrt{3 - 2x}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 3x + 1}$

e.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{\sqrt{x^2 + x}}$

f.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} 5x + 3 - \frac{2}{x - 4}$

**Exercice 3097**



Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^3}{x^2}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 5}{4 - 2x}$

c.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 5}{3x^2 - 11x + 6}$

e.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 1}$

f.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x^2 + 7x - 6}{x^2 - 4x + 4}$

**Exercice 3067**



Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{x}}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - x^2}{x - 1}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \sin x}$

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$

e.  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\sqrt{6 - x} - 3}{2x^2 + 5x - 3}$

f.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x\sqrt{x}}$

**Exercice 3098** 

Déterminer la valeur des limites suivantes :

- a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 2x^2}{x^2 + \sqrt{x}}$       b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4} - x$   
 c.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4 - 2\sqrt{x}}{x - 4}$       d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 2} - x$   
 e.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{2x^2 - 4x + 2}$

**6. Asymptote horizontale et verticale :**

**Exercice 2534** 

En observant chacun des tableau de variations ci-dessous, écrire les limites correspondantes aux bornes de son ensemble de définition et préciser si la fonction admet des asymptotes horizontales ou verticales :

- a. 

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
Variation de $f$	3	$+\infty$	$+\infty$
- b. 

$x$	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
Variation de $f$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
- c. 

$x$	$-\infty$	$1$	$4$	$+\infty$
Variation de $f$	0	$2$	$+\infty$	$-\infty$

**7. Asymptote oblique :**

**Exercice 3099** 

1. On considère la fonction  $f$  définie dont l'image d'un nombre  $x$  est défini par :

$$f(x) = \frac{6x^3 + x^2 + 7x + 9}{2x^2 - x + 3}$$

Montrer que la droite  $(d)$  d'équation  $y=3x+2$  est l'asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

2. On considère la fonction  $g$  définie par la relation :

$$g(x) = \frac{4x^2 - 8x + 5}{3 - 2x}$$

Déterminer les valeurs des nombres réels  $a$  et  $b$  vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (a \cdot x + b)] = 0$$

**Exercice 3356** 

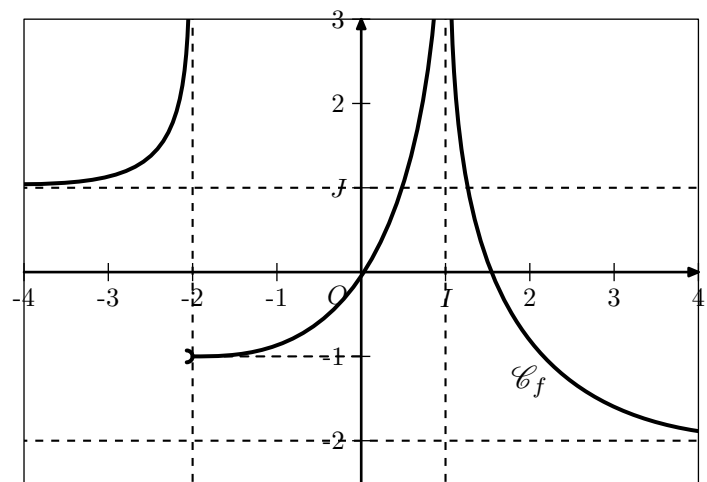
**Exercice 2513** 

Donner si possible la valeur des limites suivantes ; indiquer parmi celles-ci les formes indéterminées :

- a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2}$       b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{3x^2-3x-2}$   
 c.  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2}{(x+5)^2}$       d.  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{\sqrt{-x-2}}$   
 e.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 1$       f.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-3}{2x+2}$

**Exercice 3074** 

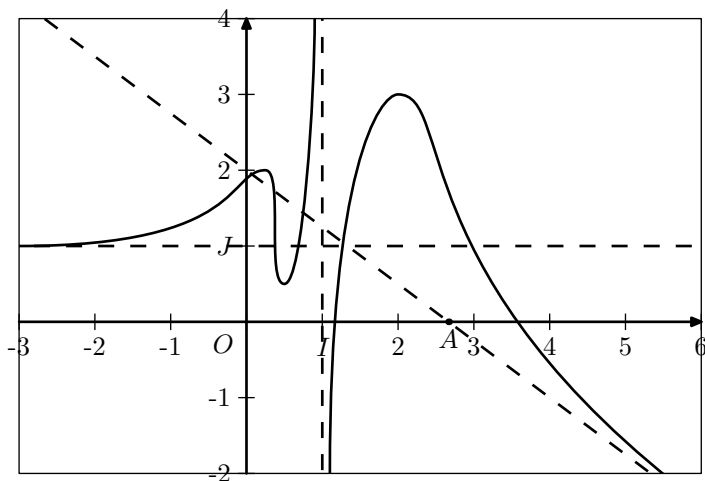
Ci-dessous est représentée la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-4; 4]$  :



Les asymptotes horizontales et verticales à la courbe  $\mathcal{C}_f$  a été représentées en pointillés.

Dresser le tableau de variation complet de cette fonction.

Dans le plan muni d'un repère  $(O; I; J)$ , on a représenté la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie sur  $[-3; 6] \setminus \{1\}$



Les asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_f$  sont représentées en pointillées.

1. Préciser la nature et l'équation de chacune des asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

2. Donner la valeur de chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

## 8. Asymptote oblique et étude :

### Exercice 2585

On considère la fonction  $f$  dont l'image de  $x$  est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{4x^2 + 10x - 2}{x + 3}$$

1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Déterminer la valeur des trois nombres réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  vérifiant :

$$a \cdot x + b + \frac{c}{x + 3} = \frac{4x^2 + 10x - 2}{x + 3}$$

b. En déduire une expression de la fonction  $f'$  dérivée de la fonction  $f$ .

c. Dresser le tableau de variation complet de la fonction  $f$  (n'oublier aucune valeur dans le tableau).

3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en  $+\infty$ .

### Exercice 2535

On considère la fonction  $f$  dont l'image d'un nombre  $x$  est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{6x^2 + x + 1}{2x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de  $f$ .

b. Dresser le tableau de signe de la fonction  $f'$ .

c. En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ .

d. En étudiant les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition, compléter le tableau de variation.

2. Montrer que la fonction  $f$  admet en  $-\infty$  et en  $+\infty$  la droite (d) d'équation  $y = 3x - 1$  pour asymptote oblique.

### Exercice 3774

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4 \cdot e^x}{e^x + 3}$$

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique  $2 \text{ cm}$ .

1. a. Démontrer que la droite  $\mathcal{D}_1$  d'équation  $y = x + 2$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$ .

b. Etudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{D}_1$

2. a. On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Calculer  $f'(x)$  et montrer que, pour tout réel  $x$ , on a :

$$f'(x) = \left( \frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$$

b. Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

3. Déterminer l'équation de la tangente  $\mathcal{D}_2$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.

4. On admet que le point  $I$  est centre de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}$ .

Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ , les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . On rappelle que l'unité graphique choisie est  $2 \text{ cm}$ .

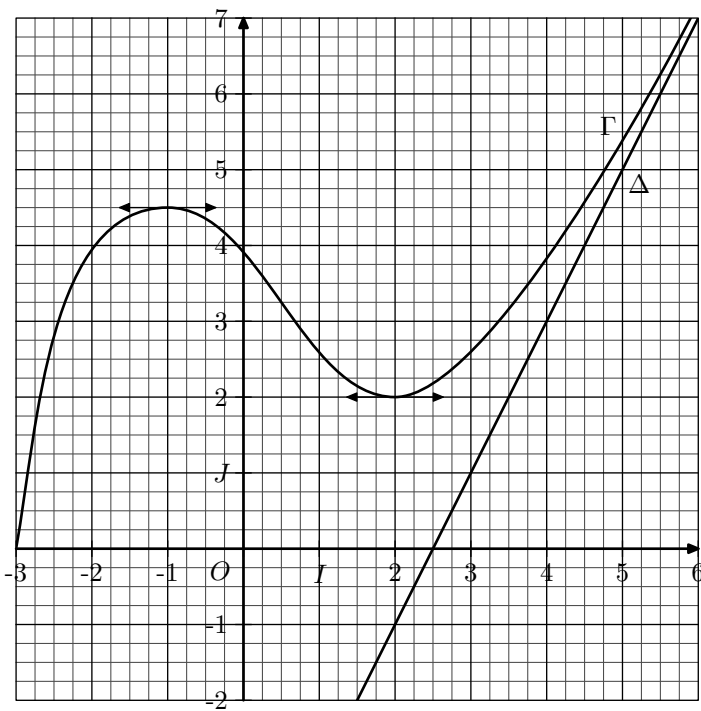
### Exercice 3306

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[-3; +\infty[$ , croissante sur les intervalles  $[-3; -1]$  et  $[2; +\infty[$  et décroissante sur l'intervalle  $[-1; 2]$ .

On note  $f'$  sa fonction dérivée sur l'intervalle  $[-3; +\infty[$ .

La courbe  $\Gamma$  représentative de la fonction  $\frac{f}{x}$  est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Elle passe par le point  $A(-3; 0)$  et admet pour asymptote la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x - 5$



Les réponses ne seront pas justifiées.

Notation : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

1. L'équation  $f(x)=4$  admet exactement deux solutions dans l'intervalle  $[-3; +\infty[$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

### 255. Exercices non-classés :

#### Exercice 2524



Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer leur ensemble de définition puis aux bornes de leur ensemble de définition, déterminer les limites "à gauche" et "à droite".

$$f : x \mapsto \frac{3x+1}{x-2} \quad ; \quad g : x \mapsto \frac{1}{(2x-1)(3x+5)}$$

$$h : x \mapsto \frac{x+2}{4x^2+4x+1} \quad ; \quad j : x \mapsto \frac{2x-4}{x^2-1}$$

$$k : x \mapsto \frac{x+2}{2x^2+5x+2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - (2x - 5)| = +\infty.$$

$$4. f'(0) = 1$$

5.  $f'(x) > 0$  pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-2; 1]$

#### Exercice 3581



Soit  $f$  a fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

et soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; I; J)$ .

1.
  - a. Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - b. Préciser les équations des asymptotes de  $\mathcal{C}$  (pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}} \right)$ ).
  - c. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .
2.
  - a. Soit  $m$  un nombre réel et soit  $\Delta$  la droite d'équation  $y=m$ . Discuter, suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de points d'intersection de  $\Delta$  et de  $\mathcal{C}$ .
  - b. Pour tout  $m > \sqrt{2}$ , on appelle  $A$  et  $B$  les points d'intersection de  $\Delta$  et de  $\mathcal{C}$ . Soit  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ . Montrer que, quand  $m$  décrit l'intervalle  $]\sqrt{2}; +\infty[$ ,  $I$  décrit une partie, que l'on précisera, de la droite  $D$  d'équation  $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y$ .

#### Exercice 3106



faire exercice de la forme limite en 0

$$\left( 2x^2 + x \right) \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} \right)$$

et

$$\frac{2x^2 + x}{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}}$$