Compiler exercice | Compiler correction | Plus d'option

Hors programme lycée/Comportements asymptotiques

1. Première approche :

Exercice 6175

On considère trois fonctions f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par les relations :

$f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+3}$; $g(x) = \dfrac{2\cdot x - 1}{\sqrt{x}}$; $h(x) = \dfrac{2\cdot x^2 + x}{5\cdot x}$

On donne ci-dessous un tableau de valeurs pour chacune des fonctions :

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{2{,}1}{3{,}01}$	$\dfrac{2{,}01}{3{,}000\,1}$	$\dfrac{2{,}001}{3{,}000\,001}$	$\dfrac{2{,}000\,1}{3{,}000\,000\,01}$

x	0,01	0,000 1	0,000 001
$g(x)$	$\dfrac{-0{,}98}{0{,}1}$	$\dfrac{-0{,}999\,8}{0{,}01}$	$\dfrac{-0{,}999\,998}{0{,}001}$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$h(x)$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{0{,}12}{0{,}5}$	$\dfrac{0{,}010\,2}{0{,}05}$	$\dfrac{0{,}001\,002}{0{,}005}$	$\dfrac{0{,}000\,100\,02}{0{,}000\,5}$

Remarquer que, dans chaque tableau, les valeurs de x "*progressent lentement*" vers 0.

1. a. Pour chaque tableau et à l'aide de la calculatrice, observer la progression des valeurs approchées de ces quotients.

   b. Dans chaque cas, faire une conjecture sur la valeur limite de ces images lorsque :
   "*x tend vers 0 par des valeurs supérieures à 0*"
   Pour la fonction f, cette valeur se note :
   $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\x>0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)$

2. A l'aide de votre calculatrice, tracer les courbes représentatives de ces fonctions et observer la courbe au "*voisinage*" de l'axe des ordonnées.

2. Manipulations des formes indéterminées :

Exercice 2526

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{5x+1}{-5x^2+4x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. a. Justifier que les deux limites ci-dessous représentent une forme indéterminée :
   $$\lim_{x\mapsto -\frac{1}{5}^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto -\frac{1}{5}^+} f(x)$$
   b. Montrer que, pour $x\in\mathcal{D}_f$, on a : $f(x) = -\dfrac{1}{x-1}$
   c. En déduire la valeur des deux limites présentées à la question a..

3. Calculs de limites à l'infini :

Exercice 3055

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim_{x\mapsto-\infty} x\cdot(2x+1)$

b. $\lim_{x\mapsto+\infty} (3-4x)(x+1)$

c. $\lim_{x\mapsto-\infty} 3x^2+2x+\dfrac{3}{2x+1}$

d. $\lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x-4}{5+\dfrac{1}{x}}$

e. $\lim_{x\mapsto-\infty} \dfrac{3}{2x-1}$

f. $\lim_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^2+x}{x^3-2x}$

Exercice 3047

Parmi les limites proposées ci-dessous, donner celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a. $\lim_{x\mapsto+\infty} 2x^4-x^3$

b. $\lim_{x\mapsto-\infty} 5x^3-2x^2$

c. $\lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3}{5-2x}$

d. $\lim_{x\mapsto-\infty} \sqrt{2+x^2}$

e. $\lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2}$

f. $\lim_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^2+1}{-x^4+x}$

Exercice 3056

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x+2}{5-3x}$

b. $\lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{2x+1}$

c. $\lim_{x\mapsto-\infty} \dfrac{3-2x}{x^2-4x+7}$

d. $\lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{5x^2-3}{5-3x^2}$

e. $\lim_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^4+3x+1}{x^3-2x^2+4}$

f. $\lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^{100}-5x^{44}+x^{14}}{3x^{102}-5x^{56}}$

Exercice 3096

Déterminer chacune des limites suivantes :

a. $\lim_{x\mapsto+\infty} -5x^3-7x$

b. $\lim_{x\mapsto+\infty} 2x^3-3x^2$

c. $\lim_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^7-5x^6}{2}$

d. $\lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^5-x^3+2}{-2x^2-x+2}$

e. $\lim_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^3-x^2+5}{x^4+3x+1}$

f. $\lim_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^2-5x+2}{-3x^2+5x-1}$

4. Calcul de limites en un réel :

Exercice 3057

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim_{x\mapsto\frac{1}{2}^-} \dfrac{3}{2x-1}$

b. $\lim_{x\mapsto3^-} \dfrac{-2}{3-x}$

c. $\lim_{x\mapsto\frac{3}{2}^+} \dfrac{4-x}{3-2x}$

d. $\lim_{x\mapsto5^-} \dfrac{(x-5)(7-x)}{2x-10}$

e. $\lim_{x\mapsto4^-} \dfrac{1}{\sqrt{8-2x}}$

f. $\lim_{x\mapsto-2^-} \dfrac{3x^2+4x-4}{2x+4}$

Exercice 3066

Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a. $\lim_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$

b. $\lim_{x\mapsto0^-} \dfrac{3x^4-2x^2}{5x^2-x}$

c. $\lim_{x\mapsto0^-} \dfrac{6x^{12}+5x^6-3x^2}{3x^8-5x^2}$

d. $\lim_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{x\sin x}$

Exercice 3048

Parmi les limites proposées ci-dessous, déterminer celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a. $\lim_{x\mapsto0^+} \dfrac{x^2+2}{x}$

b. $\lim_{x\mapsto2} \dfrac{x^2-4x+4}{2x^2+x-6}$

c. $\lim_{x\mapsto\frac{3}{2}^-} \sqrt{3-2x}$

d. $\lim_{x\mapsto0} \dfrac{x^3-2x}{2x^2-3x+1}$

e. $\lim_{x\mapsto0^+} \dfrac{5}{\sqrt{x^2+x}}$

f. $\lim_{x\mapsto4^-} 5x+3-\dfrac{2}{x-4}$

Exercice 3097

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\lim_{x\mapsto0} \dfrac{x^4-x^3}{x^2}$

b. $\lim_{x\mapsto2^+} \dfrac{x+5}{4-2x}$

c. $\lim_{x\mapsto-1} \dfrac{x+1}{x^2-1}$

d. $\lim_{x\mapsto3^+} \dfrac{x-5}{3x^2-11x+6}$

e. $\lim_{x\mapsto\frac{1}{3}^+} \dfrac{3x^2+2x-1}{x-1}$

f. $\lim_{x\mapsto2^+} \dfrac{-2x^2+7x-6}{x^2-4x+4}$

5. Calculs de limites :

Exercice 2584

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x\mapsto-\infty} \dfrac{2x^2+3x-1}{3x^3-2}$

b. $\lim_{x\mapsto\frac{1}{2}^+} \dfrac{3x-2}{-2x^2+7x-3}$

c. $\lim_{x\mapsto-2^-} \dfrac{2x-\sqrt{x+3}}{2+x}$

d. $\lim_{x\mapsto3} \dfrac{4x^2-12x+9}{-x^2+5x-6}$

e. $\lim_{x\mapsto-\infty} x-\sqrt{2x^2+1}$

f. $\lim_{x\mapsto+\infty} x-\sqrt{2x^2+1}$

Exercice 3067

Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a. $\lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{x}}$

b. $\lim_{x\mapsto1^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}-x^2}{x-1}$

c. $\lim_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{x\sin x}$

d. $\lim_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

e. $\lim_{x\mapsto-3^-} \dfrac{\sqrt{6-x}-3}{2x^2+5x-3}$

f. $\lim_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{x-x\sqrt{x}}$

Exercice 3098

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^5-2x^2}{x^2+\sqrt{x}}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x^2-4}-x$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto4^-} \frac{4-2\sqrt{x}}{x-4}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x^3+2}-x$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{2x^2-4x+2}$

Exercice 2513

Donner si possible la valeur des limites suivantes ; indiquer parmi celles-ci les formes indéterminées :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x-2}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto2} \frac{2x+1}{3x^2-3x-2}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-5} \frac{x^2}{(x+5)^2}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-} \frac{1}{\sqrt{-x-2}}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} x^2-x+1$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+} \frac{x-3}{2x+2}$

6. Asymptote horizontale et verticale :

Exercice 2534

En observant chacun des tableau de variations ci-dessous, écrire les limites correspondantes aux bornes de son ensemble de définition et préciser ci la fonction admet des asymptotes horizontales ou verticales :

a.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variation de f	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

b.

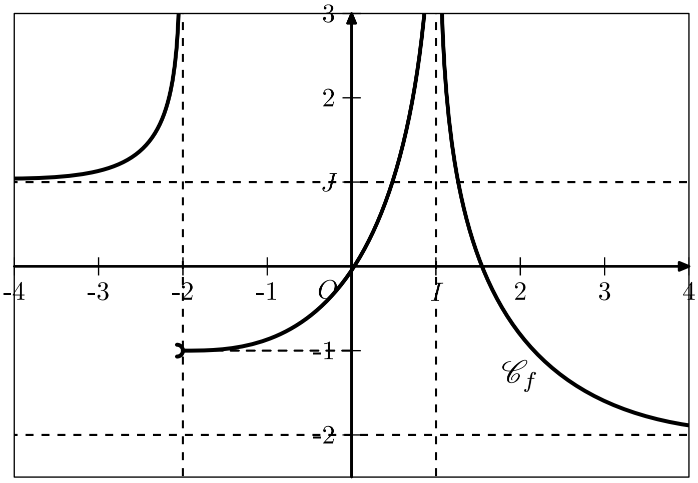
x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	↗	-1 ‖ -1	↗	$+\infty$

c.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Variation de f	0	↘	$-\infty$ ‖ 2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Exercice 3074

Ci-dessous est représentée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



Les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathscr{C}_f$ a été représentées en pointillés.

Dresser le tableau de variations complet de cette fonction.

7. Asymptote oblique :

Exercice 3099

1. On considère la fonction f définie dont l'image d'un nombre x est défini par :

$$f(x) = \frac{6x^3+x^2+7x+9}{2x^2-x+3}$$

Montrer que la droite (d) d'équation $y=3x+2$ est l'asymptôte à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

2. On considère la fonction g définie par la relation :

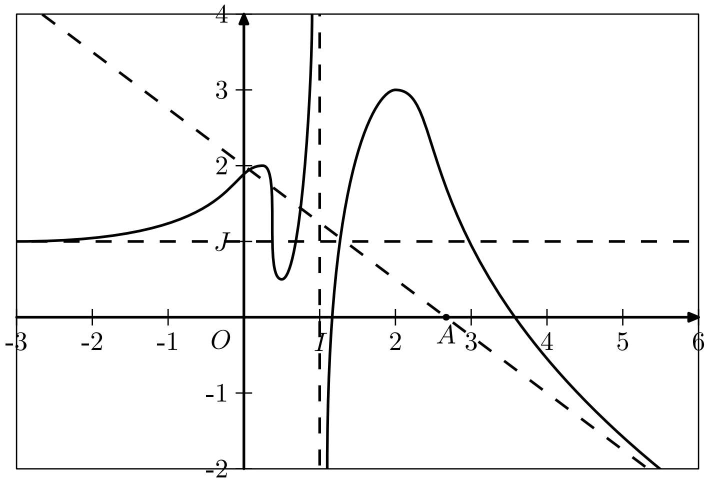
$$g(x) = \frac{4x^2-8x+5}{3-2x}$$

Déterminer les valeurs des nombres réels a et b vérifiant :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \big[g(x)-(a{\cdot}x+b)\big] = 0$$

Exercice 3356

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on a représenté la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-3\,;6]\backslash\{1\}$



Les asymptôtes à la courbe $\mathscr{C}_f$ sont représentés en pointillées.

1. Préciser la nature et l'équation de chacune des asymptôtes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Donner la valeur de chacune des limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x)$

8. *Asymptote oblique et étude :*

Exercice 2585

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$

1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Déterminer la valeur des trois nombres réels a, b, c vérifiant :
$$a{\cdot}x+b+\frac{c}{x+3} = \frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$
   b. En déduire une expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f *(n'oublier aucune valeur dans le tableau)*.

3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$.

Exercice 2535

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{6x^2+x+1}{2x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
   d. En étudiant les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition, compléter le tableau de variation.

2. Montrer que la fonction f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite (d) d'équation $y=3x-1$ pour asymptote oblique.

Exercice 3774

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x+2-\frac{4{\cdot}e^x}{e^x+3}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ d'unité graphique $2\,cm$.

1. a. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   b. Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$

2. a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :
$$f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$
   b. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

   Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. On rappelle que l'unité graphique choisie est $2\,cm$.

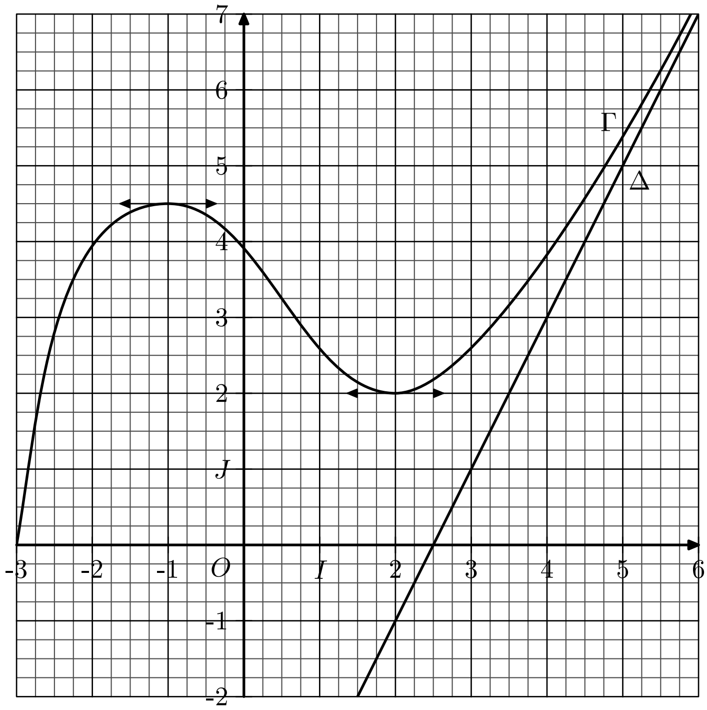
Exercice 3306

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3\,;-1]$ et $[2\,;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

Elle passe par le point $A(-3\,;0)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=2x-5$



Les réponses ne seront pas justifiées.

Notation : une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

1. L'équation $f(x)=4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $\left[-3\,;+\infty\right[$.

2. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$

3. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \left|f(x)-(2x-5)\right|=+\infty.$

4. $f'(0)=1$

5. $f'(x)>0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[-2\,;1\right]$

Exercice 3581

Soit f a fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2{\cdot}x}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;I\,;J\right)$.

1. a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

   b. Préciser les équations des asymptotes de $\mathscr{C}$ *(pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera* $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$*).*

   c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. a. Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y=m$. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$.

   b. Pour tout $m>\sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que, quand m décrit l'intervalle $\left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}{\cdot}y$.

255. Exercices non-classés :

Exercice 2524

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer leur ensemble de définition puis aux bornes de leur ensemble de définition, déterminer les limites "*à gauche*" et "*à droite*".

$$f\,:\,x\longmapsto\frac{3x+1}{x-2}\quad;\quad g\,:\,x\longmapsto\frac{1}{(2x-1)(3x+5)}$$

$$h\,:\,x\longmapsto\frac{x+2}{4x^2+4x+1}\quad;\quad j\,:\,x\longmapsto\frac{2x-4}{x^2-1}$$

$$k\,:\,x\longmapsto\frac{x+2}{2x^2+5x+2}$$

Exercice 3106

faire exercice de la forme limite en 0

$$\left(2x^2+x\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)$$

et

$$\frac{2x^2+x}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}}$$

