Compiler exercice  Compiler correction  Plus d'option

# Hors programme lycée/Comportements asymptotiques

## 1. Première approche :

### Exercice 6175

On considère trois fonctions $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par les relations :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{2{\cdot}x-1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad h(x) = \frac{2{\cdot}x^2+x}{5{\cdot}x}$$

On donne ci-dessous un tableau de valeurs pour chacune des fonctions :

| $x$ | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\dfrac{3}{4}$ | $\dfrac{2{,}1}{3{,}01}$ | $\dfrac{2{,}01}{3{,}000\,1}$ | $\dfrac{2{,}001}{3{,}000\,001}$ | $\dfrac{2{,}000\,1}{3{,}000\,000\,01}$ |

| $x$ | 0,01 | 0,000 1 | 0,000 001 |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\dfrac{-0{,}98}{0{,}1}$ | $\dfrac{-0{,}999\,8}{0{,}01}$ | $\dfrac{-0{,}999\,998}{0{,}001}$ |

| $x$ | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,000 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $\dfrac{3}{5}$ | $\dfrac{0{,}12}{0{,}5}$ | $\dfrac{0{,}010\,2}{0{,}05}$ | $\dfrac{0{,}001\,002}{0{,}005}$ | $\dfrac{0{,}000\,100\,02}{0{,}000\,5}$ |

Remarquer que, dans chaque tableau, les valeurs de $x$ "*progressent lentement*" vers 0.

1. a. Pour chaque tableau et à l'aide de la calculatrice, observer la progression des valeurs approchées de ces quotients.

   b. Dans chaque cas, faire une conjecture sur la valeur limite de ces images lorsque :

   "*$x$ tend vers 0 par des valeurs supérieures à 0*"

   Pour la fonction $f$, cette valeur se note :

   $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)$

2. A l'aide de votre calculatrice, tracer les courbes représentatives de ces fonctions et observer la courbe au "*voisinage*" de l'axe des ordonnées.

## 2. Manipulations des formes indéterminées :

### Exercice 2526

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{5x+1}{-5x^2+4x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f$.

2. Déterminer les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

3. a. Justifier que les deux limites ci-dessous représentent une forme indéterminée :

   $$\lim_{x\mapsto -\frac{1}{5}^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto -\frac{1}{5}^+} f(x)$$

   b. Montrer que, pour $x\in\mathcal{D}_f$, on a : $f(x) = -\dfrac{1}{x-1}$

   c. En déduire la valeur des deux limites présentées à la question a..

## 3. Calculs de limites à l'infini :

### Exercice 3055

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x\cdot(2x+1)$

b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} (3-4x)(x+1)$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 3x^2+2x+\dfrac{3}{2x+1}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x-4}{5+\dfrac{1}{x}}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{3}{2x-1}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^2+x}{x^3-2x}$

### Exercice 3047

Parmi les limites proposées ci-dessous, donner celles représentant une forme indéterminée; donner la valeur des autres limites:

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2x^4-x^3$

b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 5x^3-2x^2$

c. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3}{5-2x}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \sqrt{2+x^2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^2+1}{-x^4+x}$

### Exercice 3056

Déterminer les limites ci-dessous:

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x+2}{5-3x}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{2x+1}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{3-2x}{x^2-4x+7}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{5x^2-3}{5-3x^2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^4+3x+1}{x^3-2x^2+4}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^{100}-5x^{44}+x^{14}}{3x^{102}-5x^{56}}$

### Exercice 3096

Déterminer chacune des limites suivantes:

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -5x^3-7x$

b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2x^3-3x^2$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^7-5x^6}{2}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^5-x^3+2}{-2x^2-x+2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^3-x^2+5}{x^4+3x+1}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^2-5x+2}{-3x^2+5x-1}$

## 4. Calcul de limites en un réel :

### Exercice 3057

Déterminer les limites ci-dessous:

a. $\lim\limits_{x\mapsto\frac{1}{2}^-} \dfrac{3}{2x-1}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto3^-} \dfrac{-2}{3-x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto\frac{3}{2}^+} \dfrac{4-x}{3-2x}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto5^-} \dfrac{(x-5)(7-x)}{2x-10}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto4^-} \dfrac{1}{\sqrt{8-2x}}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto-2^-} \dfrac{3x^2+4x-4}{2x+4}$

### Exercice 3066

Déterminer, si possible, les limites ci-dessous:

a. $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{3x^4-2x^2}{5x^2-x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{6x^{12}+5x^6-3x^2}{3x^8-5x^2}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{x\sin x}$

### Exercice 3048

Parmi les limites proposées ci-dessous, déterminer celles représentant une forme indéterminée; donner la valeur des autres limites:

a. $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{x^2+2}{x}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto2} \dfrac{x^2-4x+4}{2x^2+x-6}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto\frac{3}{2}^-} \sqrt{3-2x}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto0} \dfrac{x^3-2x}{2x^2-3x+1}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{5}{\sqrt{x^2+x}}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto4^-} 5x+3-\dfrac{2}{x-4}$

### Exercice 3097

Déterminer les valeurs des limites suivantes:

a. $\lim\limits_{x\mapsto0} \dfrac{x^4-x^3}{x^2}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{x+5}{4-2x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-1} \dfrac{x+1}{x^2-1}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto3^+} \dfrac{x-5}{3x^2-11x+6}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto\frac{1}{3}^+} \dfrac{3x^2+2x-1}{x-1}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{-2x^2+7x-6}{x^2-4x+4}$

## 5. Calculs de limites :

### Exercice 2584

Déterminer la valeur des limites suivantes:

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{2x^2+3x-1}{3x^3-2}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto\frac{1}{2}^+} \dfrac{3x-2}{-2x^2+7x-3}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-2^-} \dfrac{2x-\sqrt{x+3}}{2+x}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto3} \dfrac{4x^2-12x+9}{-x^2+5x-6}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x-\sqrt{2x^2+1}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-\sqrt{2x^2+1}$

### Exercice 3067

Déterminer, si possible, les limites ci-dessous:

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{x}}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}-x^2}{x-1}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{x\sin x}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-3^-} \dfrac{\sqrt{6-x}-3}{2x^2+5x-3}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{x-x\sqrt{x}}$

### Exercice 3098

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{x^5 - 2x^2}{x^2 + \sqrt{x}}$  b. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \sqrt{x^2 - 4} - x$

c. $\lim\limits_{x \mapsto 4^-} \dfrac{4 - 2\sqrt{x}}{x - 4}$  d. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \sqrt{x^3 + 2} - x$

e. $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} \dfrac{\sqrt{1 - x}}{2x^2 - 4x + 2}$

### Exercice 2513

Donner si possible la valeur des limites suivantes ; indiquer parmi celles-ci les formes indéterminées :

a. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{1}{x - 2}$  b. $\lim\limits_{x \mapsto 2} \dfrac{2x + 1}{3x^2 - 3x - 2}$

c. $\lim\limits_{x \mapsto -5} \dfrac{x^2}{(x + 5)^2}$  d. $\lim\limits_{x \mapsto -2^-} \dfrac{1}{\sqrt{-x - 2}}$

e. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^2 - x + 1$  f. $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \dfrac{x - 3}{2x + 2}$

## 6. Asymptote horizontale et verticale :

### Exercice 2534

En observant chacun des tableau de variations ci-dessous, écrire les limites correspondantes aux bornes de son ensemble de définition et préciser ci la fonction admet des asymptotes horizontales ou verticales :

a.

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $3 \searrow -\infty$ | $\Vert$ | $+\infty \searrow -\infty$ |

b.

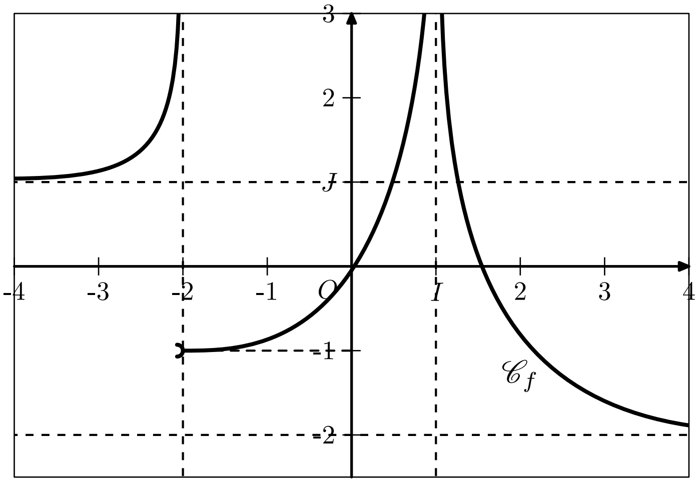
| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $-\infty \nearrow -1$ | $\Vert$ | $-1 \nearrow +\infty$ |

c.

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $0 \searrow -\infty$ | $\Vert$ | $2 \nearrow +\infty$ | $\Vert$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

### Exercice 3074

Ci-dessous est représentée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ :




Les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathscr{C}_f$ a été représentées en pointillés.

Dresser le tableau de variations complet de cette fonction.

## 7. Asymptote oblique :

### Exercice 3099

1. On considère la fonction $f$ définie dont l'image d'un nombre $x$ est défini par :

$$f(x) = \frac{6x^3 + x^2 + 7x + 9}{2x^2 - x + 3}$$

Montrer que la droite $(d)$ d'équation $y=3x+2$ est l'asymptôte à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

2. On considère la fonction $g$ définie par la relation :

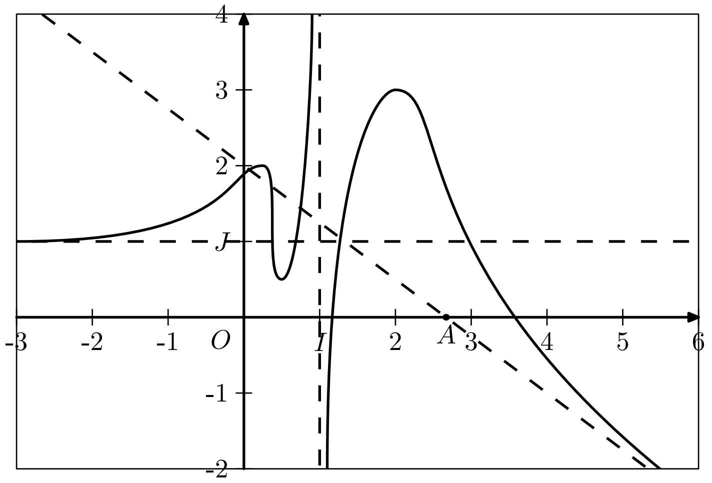
$$g(x) = \frac{4x^2 - 8x + 5}{3 - 2x}$$

Déterminer les valeurs des nombres réels $a$ et $b$ vérifiant :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \big[g(x) - (a{\cdot}x + b)\big] = 0$$

### Exercice 3356

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on a représenté la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$ définie sur $[-3\,;6]\backslash\{1\}$




Les asymptôtes à la courbe $\mathscr{C}_f$ sont représentés en pointillées.

1. Préciser la nature et l'équation de chacune des asymptôtes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Donner la valeur de chacune des limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x)$

## 8. Asymptote oblique et étude :

### Exercice 2585

On considère la fonction $f$ dont l'image de $x$ est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$

1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Déterminer la valeur des trois nombres réels $a$, $b$, $c$ vérifiant :
$$a\cdot x+b+\frac{c}{x+3} = \frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$
   b. En déduire une expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$.
   c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f$ *(n'oublier aucune valeur dans le tableau)*.

3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$.

### Exercice 2535

On considère la fonction $f$ dont l'image d'un nombre $x$ est donnée par la relation :
$$f(x) = \frac{6x^2+x+1}{2x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
   a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $f$.
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction $f'$.
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction $f$.
   d. En étudiant les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition, compléter le tableau de variation.

2. Montrer que la fonction $f$ admet en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite $(d)$ d'équation $y=3x-1$ pour asymptote oblique.

### Exercice 3774

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x+2-\frac{4\cdot e^x}{e^x+3}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ d'unité graphique $2\,cm$.

1. a. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   b. Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$

2. a. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel $x$, on a :
$$f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$
   b. Etudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $0$.

4. On admet que le point $I$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

   Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. On rappelle que l'unité graphique choisie est $2\,cm$.

### Exercice 3306

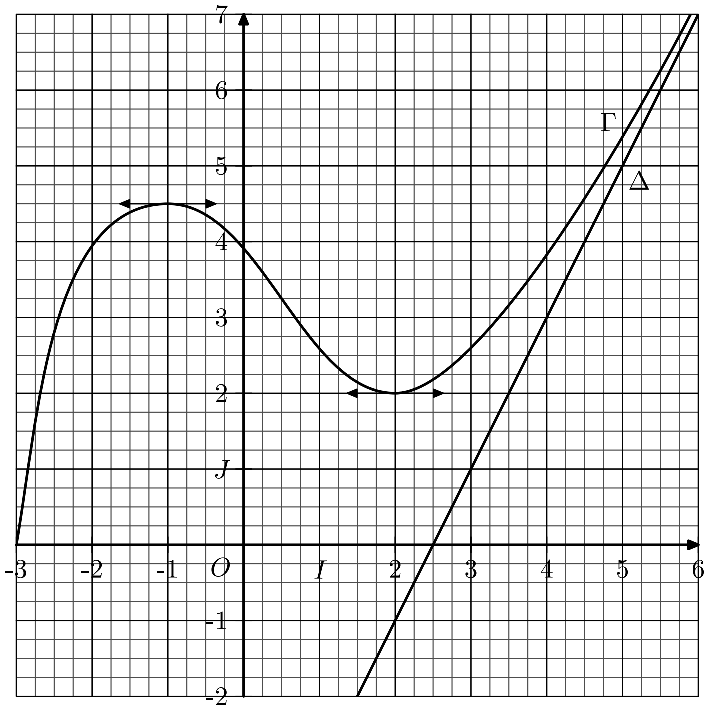
Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-3\,;+\infty\right[$, croissante sur les intervalles $\left[-3\,;-1\right]$ et $\left[2\,;+\infty\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left[-1\,;2\right]$.

On note $f'$ sa fonction dérivée sur l'intervalle $\left[-3\,;+\infty\right[$.

La courbe $\Gamma$ représentative de la fonction $f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

Elle passe par le point $A(-3\,;0)$ et admet pour asymptote la droite $\Delta$ d'équation $y=2x-5$




**Les réponses ne seront pas justifiées.**

*Notation : une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

1. L'équation $f(x)=4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $\left[-3\,;+\infty\right[$.

2. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \left|f(x)-(2x-5)\right| = +\infty$.

4. $f'(0)=1$

5. $f'(x)>0$ pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $\left[-2\,;1\right]$

## Exercice 3581

Soit $f$ a fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2{\cdot}x}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $\left(O\,;I\,;J\right)$.

1. a. Etudier les variations de $f$ sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

   b. Préciser les équations des asymptotes de $\mathscr{C}$ *(pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$*).*

   c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. a. Soit $m$ un nombre réel et soit $\Delta$ la droite d'équation $y=m$. Discuter, suivant les valeurs de $m$, le nombre de points d'intersection de $\Delta$ et de $\mathscr{C}$.

   b. Pour tout $m>\sqrt{2}$, on appelle $A$ et $B$ les points d'intersection de $\Delta$ et de $\mathscr{C}$. Soit $I$ le milieu du segment $[AB]$. Montrer que, quand $m$ décrit l'intervalle $\left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, $I$ décrit une partie, que l'on précisera, de la droite $D$ d'équation $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}{\cdot}y$.

# 255. Exercices non-classés :

## Exercice 2524

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer leur ensemble de définition puis aux bornes de leur ensemble de définition, déterminer les limites "*à gauche*" et "*à droite*".

$$f\,:\,x\longmapsto\frac{3x+1}{x-2}\quad ;\quad g\,:\,x\longmapsto\frac{1}{(2x-1)(3x+5)}$$

$$h\,:\,x\longmapsto\frac{x+2}{4x^2+4x+1}\quad ;\quad j\,:\,x\longmapsto\frac{2x-4}{x^2-1}$$

$$k\,:\,x\longmapsto\frac{x+2}{2x^2+5x+2}$$

## Exercice 3106

faire exercice de la forme limite en 0

$$\left(2x^2+x\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)$$

et

$$\frac{2x^2+x}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}}$$