

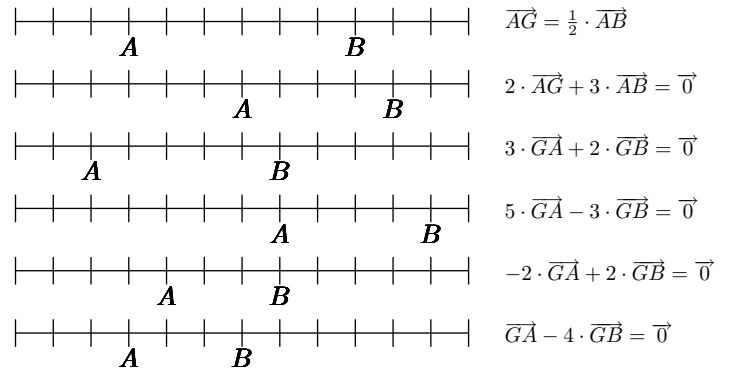
# Hors programme lycée/Barycentres

## 1. Première approche :

### Exercice 2448



Dans chaque cas, placer le point  $G$ , s'il existe, sur les droites graduées ci-dessous vérifiant la relation demandée :



## 3. Barycentre de deux points :

### Exercice 2462



Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan. On note  $K$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $B$ .

Parmi les systèmes pondérés ci-dessous, indiquer le système admettant  $K$  pour barycentre :

- a.  $\{(A; 1); (B; -1)\}$     b.  $\{(A; -1); (B; 1)\}$   
 c.  $\{(A; -2); (B; 1)\}$     d.  $\{(A; 1); (B; -2)\}$

### Exercice 2675



Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points alignés, vérifiant la relation vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$

1. a. Montrer que ces trois points vérifient la relation suivante :

$$\overrightarrow{CA} + 2 \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

- b. Déterminer les coefficients du système ci-dessous afin que  $C$  soit le barycentre de ce système :

$$\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$$

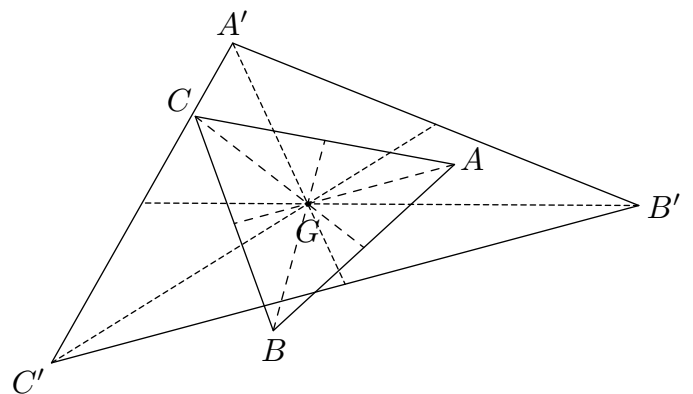
2. Montrer que  $A$  est barycentre du système pondéré  $\{(B; 2); (C; -3)\}$

3. Déterminer les coefficients de pondérations des points  $A$  et  $C$  afin que ce système admette  $B$  pour barycentre.

### Exercice 2671



La figure ci-contre représente deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  admettant le même point  $G$  pour isobarycentre.



Etablir la relation suivante:  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

### Exercice 4243



Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points  $M$  vérifiant l'égalité :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

## 4. Suites et barycentres - Annales :

### Exercice 3231



#### Partie A

Etant donnés deux points distincts  $A_0$  et  $B_0$  d'une droite, on définit les points :

- $A_1$  milieu du segment  $[A_0B_0]$
- $B_1$  barycentre de  $\{(A_0; 1); (B_0; 2)\}$

Puis, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A_{n+1}$  milieu du segment  $[A_nB_n]$  et  $B_{n+1}$  barycentre de  $\{(A_n; 1); (B_n; 2)\}$

1. Placer les points  $A_1, B_1, A_2$  et  $B_2$  pour  $A_0B_0 = 12 \text{ cm}$ . Quelle conjecture peut-on faire sur les points  $A_n$  et  $B_n$  quand  $n$  devient très grand?
2. On munit la droite  $(A_0B_0)$  du repère  $(A_0; \vec{i})$  avec  $\vec{i} = \frac{1}{12} \cdot \overrightarrow{A_0B_0}$ . Soit  $u_n$  et  $v_n$  les abscisses respectives des points  $A_n$  et  $B_n$ . Justifier que pour tout entier naturel  $n$  strictement positif, on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

#### Partie B

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 12 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

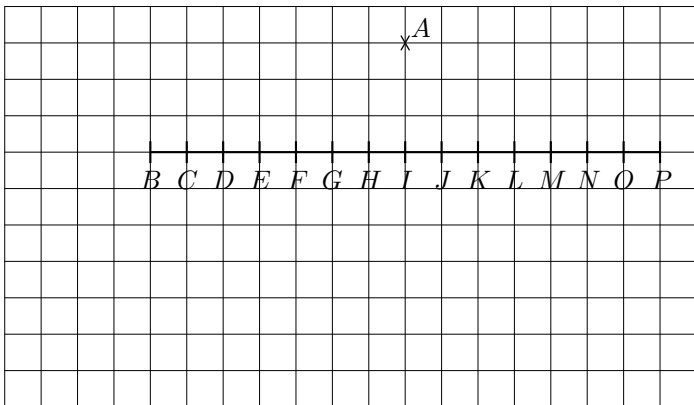
1. Démontrer que la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = v_n - u_n$  est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs ;
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante puis que la suite  $(v_n)$  est décroissante.
3. Dédurre des deux questions précédentes que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et ont même limite.
4. On considère la suite  $(t_n)$  définie par :  $t_n = 2u_n + 3v_n$ . Montrer qu'elle est constante.

#### Partie C

A partir des résultats obtenus dans les **parties A et B**, préciser la position limite des points  $A_n$  et  $B_n$  quand  $n$  tend vers plus l'infini.

## 5. Réduction et barycentre de deux points :

### Exercice 2893



1. On définit le vecteur  $\vec{u}$  défini par la relation :  $\vec{u} = \overrightarrow{AL} + 2 \cdot \overrightarrow{AF}$ 
  - a. Tracer un représentant du vecteur  $\vec{u}$ .
  - b. Déterminer le barycentre du système :  $\{(L; 1); (F; 2)\}$ .
  - c. Réduire l'écriture du vecteur  $\vec{u}$  sous la forme :  $\vec{u} = k \cdot \overrightarrow{AZ}$

où  $k \in \mathbb{R}$  et  $Z$  est un des 15 points du segment.

2. Pour chacune des questions suivante, donner une simplification de l'expression en introduisant un système pondéré bien choisi et son barycentre ; puis, tracer un représentant de cette expression :

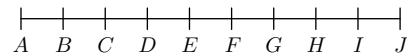
a.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$       b.  $-\overrightarrow{AJ} + 2 \cdot \overrightarrow{AL}$

### Exercice 2861



On considère le segment  $[AJ]$  représenté ci-dessous subdivisé en 9 parts égales et  $M$  un point du plan :

$$x^M$$




1. Algébriquement, justifier l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{MC} + 4 \cdot \overrightarrow{MH} = 5 \overrightarrow{MG}$$

2. Compléter les égalités suivantes :

a.  $-2 \cdot \overrightarrow{MB} + 3 \cdot \overrightarrow{MD} = \alpha \cdot \overrightarrow{M \dots}$   
 b.  $-2 \cdot \overrightarrow{MC} - 5 \cdot \overrightarrow{MJ} = \beta \cdot \overrightarrow{M \dots}$

## 6. Règle d'homogénéité :

**Exercice 2463** 

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan.

1. Donner un système pondéré à partir des points  $A$  et  $B$  dont le barycentre vérifie la relation suivante :

$$\vec{AG} = \frac{2}{3} \cdot \vec{AB}$$

2. Donner un système pondéré à partir des points  $A$  et  $B$  dont le barycentre vérifie la relation suivante :

$$\vec{BG} = \frac{1}{4} \cdot \vec{AB}$$

### 7. Barycentre de trois points :

**Exercice 2897** 

Dans chaque cas, déterminer la valeur des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  afin que le point  $G$  soit barycentre du système :

$$G\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$$

Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  vérifient les relations :

1.  $3\vec{GA} - 2\vec{AB} + \vec{GC} = \vec{0}$

2.  $M$  représente un point quelconque du plan :

$$5\vec{MG} = 2\vec{MA} - \vec{BC} + 3\vec{MC}$$

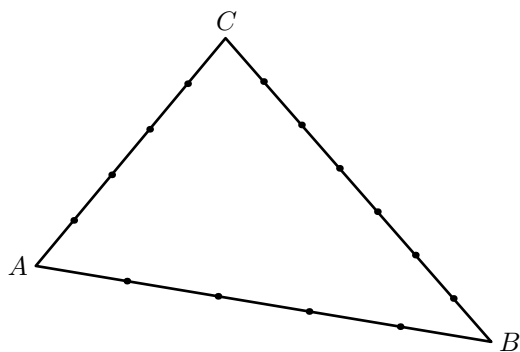
**Exercice 2899** 

On considère dans le plan trois points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  non-alignés. Démontrer qu'il n'existe pas de point  $M$  vérifiant la relation :

$$3\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{AB}$$

**Exercice 4027** 

On considère le triangle  $ABC$  ci-dessous. Chacun de ses côtés a été partagé en 12 parts égales :



On souhaite déterminer l'emplacement du point  $G$  vérifiant la relation vectorielle :

$$4\vec{GA} + 6\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

1. Considérons le point  $M$  vérifiant la relation vectorielle :  $2\vec{MA} + 3\vec{MB} = \vec{0}$



- a. A l'aide de la relation de Chasles, montrer que le point  $M$  vérifie la relation :  $\vec{BM} = \frac{2}{5} \cdot \vec{BA}$

- b. Placer le point  $M$  sur la figure.
- c. En utilisant la relation de Chasles et la définition du point  $G$ , établir la relation vectorielle suivante :  $10\vec{GM} + \vec{GC} = \vec{0}$
- d. En déduire que le point  $G$  appartient à la droite  $(MC)$ .

2. Considérons le point  $N$  barycentre du système partiel :  $\{(B; 6); (C; 1)\}$

Placer le point  $N$  sur la figure.


3. En déduire la position du point  $G$ .

**Exercice 4044**  

Dans le plan orienté,  $ABCD$  est un carré direct  $((\vec{AB}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{2})$ . On note  $I$  son centre et  $J$  le milieu de  $[AI]$ .

Déterminer la valeur du nombre réel  $m$  afin que le point  $C$  soit le barycentre du système pondéré suivant :

$$\{(A; m); (B; 1); (D; 1)\}$$


**Exercice 4045**  

A tout point  $M$  du plan, on associe le point  $M'$  tel que :

$$\vec{MM'} = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}$$

Montrer que cette transformation du plan est l'homothétie de rapport  $-3$  et de centre  $G$ , où  $G$  désigne le barycentre du système :

$$\{(A; 1); (B; 1); (C; 2)\}$$

**Exercice 4047** 

Parmi les trois propositions suivantes, une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.

On considère un triangle  $ABC$  et on note  $I$  le point tel que :

$$2\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$$

Les points  $G$ ,  $I$  et  $A$  sont alignés lorsque  $G$  est le barycentre du système :

- a.  $\{(A; 1); (C; 2)\}$
- b.  $\{(A; 1); (B; 2); (C; 2)\}$
- c.  $\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\}$

**Exercice 4049** 

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non-alignés.

1. a. Soit  $M$  le point défini par la relation vectorielle :  $\vec{AM} = \alpha \cdot \vec{AB}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$   
Déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles :
  - le point  $M$  appartient au segment  $[AB]$ ;
  - le point  $M$  appartient à l'ensemble  $(AB) \setminus [AB]$
- b. Déterminer les conditions sur les deux nombres réels

$a$  et  $b$  afin que le barycentre  $G$  du système pondéré :  
 $\{(A; a); (B; b)\}$   
 appartienne au segment  $[AB]$ .

2. On considère le barycentre  $H$  du système pondéré :  
 $H\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$

Déterminer les conditions sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  afin que le point  $H$  appartienne à l'intérieur du triangle  $ABC$ .

**Exercice 4070**



Pour l'affirmation suivante, une seule des propositions proposées est exacte. Donner la réponse exacte :

Soit  $ABCD$  un carré direct  $((\vec{AB}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{2})$ . On note  $I$  le centre du carré.

L'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$\|\vec{MA} + \vec{MC}\| = AB$$

est :

1. la médiatrice de  $[AC]$ .
2. le cercle circonscrit au carré  $ABCD$ .
3. la médiatrice de  $[AI]$ .
4. le cercle inscrit dans le carré  $ABCD$ .

**Exercice 2966**



**8. Réduction d'expressions :**

**Exercice 2880**



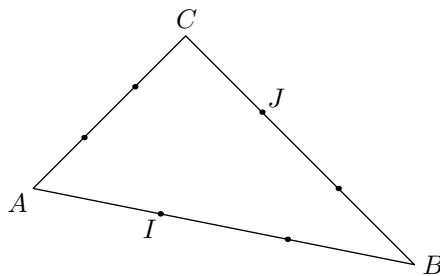
Soit  $A, B, C$  trois points du plan non-alignés. On considère les trois systèmes pondérés et leurs barycentres associés suivants :

$$G\{(A; 2); (B; 1)\} \quad ; \quad H\{(C; -1); (B; 2)\}$$

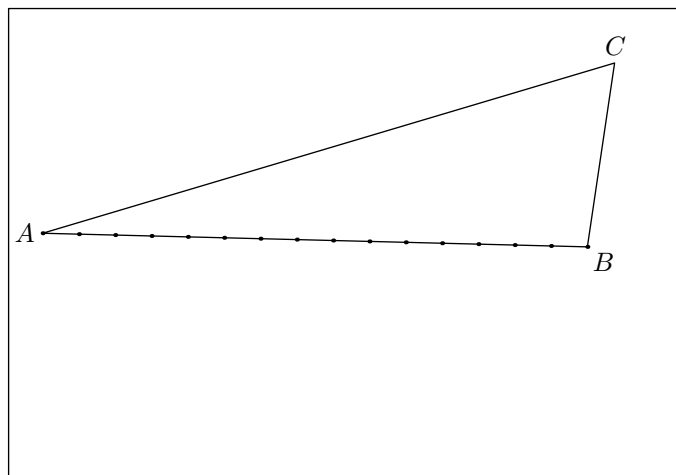
$$I\{(A; 2); (B; 3); (C; -1)\}$$

1. Justifier que ces trois systèmes admettent effectivement un barycentre.
2. a. Justifier l'égalité vectorielle suivante :  
 $2 \cdot \vec{IA} + \vec{IB} = 3 \cdot \vec{IG}$   
 b. Démontrer que les trois points  $G, H, I$  sont alignés.
3. Ci-dessous est donnée la représentation de trois points du plan non alignés et où le segment  $[AB]$  a été divisé en 15 parts égales. Déterminer la position du point  $I$  sur cette figure ; aucune justification n'est demandée.

Dans le plan, on considère le triangle  $ABC$  représenté ci-dessous où ses côtés sont partagés en trois parties égales.



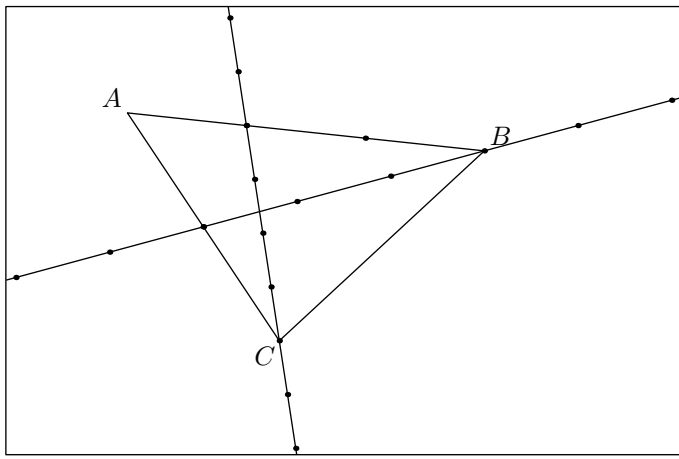
1. a. Justifier que les deux systèmes pondérés suivants admettent le même barycentre :  
 $\{(A; 2); (B; 1); (B; 1); (C; 2)\}$   
 $\{(I; 1); (J; 1)\}$   
 b. Justifier que le milieu du segment  $[IJ]$  est le centre de gravité du triangle.
2. Placer les points suivants en servant uniquement d'une règle non-graduée ; les traits de construction doivent être présent sur la figure mais aucune justification n'est demandée :  
 a. Le point  $G$  centre de gravité du triangle  $ABC$   
 b. Le point  $H$  milieu du segment  $[AC]$ .



**Exercice 2891**



Dans le plan, on considère les trois points  $A, B, C$  représentés ci-dessous :



Les marques représentées sur les segments ou sur les droites représentent un partage régulier de chacune d'eux.

$M$  représente un point du plan quelconque :

- a. Placer, sans justification, le point  $G$  barycentre du système pondéré  $\{(A; 2); (B; 1); (C; 1)\}$

- b. Réduire l'expression vectorielle ci-dessous où  $M$  est un point quelconque du plan :

$$2 \cdot \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$$

- Déterminer, graphiquement, l'ensemble des points  $M$  du plan tels que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , définis ci-dessous, sont colinéaires :

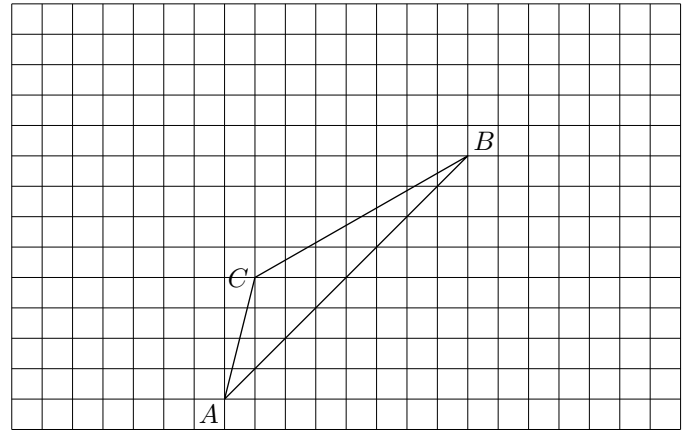
$$\vec{u} = 2 \cdot \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$$

$$\vec{v} = 2 \cdot \vec{MA} - \vec{MB} + 2 \cdot \vec{MC}$$

**Exercice 2898**



Dans le plan, on considère trois points  $A, B, C$  non-alignés. On note :



- $I$  le barycentre du système  $\{(B; 1); (C; -2)\}$
- $J$  le barycentre du système  $\{(A; -1); (B; 3)\}$
- $G$  barycentre de  $\{(A; 1); (B; -1); (C; -4)\}$

- Placer les points  $I$  et  $J$  dans le dessin ci-dessous.

- a. Justifier l'égalité suivante :

$$\vec{IA} - \vec{IB} - 4 \cdot \vec{IC} = -4 \cdot \vec{IG}$$

- b. En déduire l'égalité :  $2 \cdot \vec{IJ} = 4 \cdot \vec{IG}$ .

- c. Placer le point  $G$  sur la figure.

- En laissant vos traits de construction, tracer un représentant du vecteur :

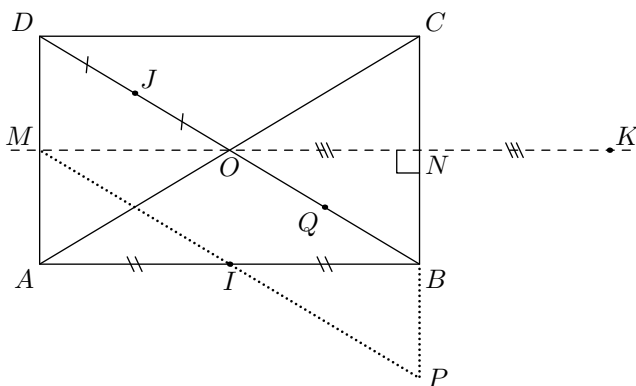
$$\vec{GA} - \vec{GB} - 4 \vec{GC}$$

## 9. Règle d'associativité :

**Exercice 2485**



On considère la figure ci-dessous où  $ABCD$  est un rectangle.  $I$  est le milieu de  $[AB]$ ;  $J$  milieu de  $[DO]$  et  $K$  le symétrique de  $O$  relativement à la droite  $(CB)$ .



- a. Soit  $Q$  le milieu du segment  $[OB]$ . Déterminer les coefficients d'un système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$  admettent le point  $Q$  pour barycentre.

- b. En déduire la valeur de  $\delta$  afin que le point  $J$  soit le barycentre de :

$$\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma); (D; \delta)\}$$

- a. Soit  $M$  et  $N$  les milieux respectifs des segments  $[AD]$  et  $[BC]$ . A l'aide du calcul vectoriel, montrer que :

$$\vec{DK} - 3 \cdot \vec{CK} - 3 \cdot \vec{BK} + \vec{AK} = \vec{0}$$

- b. Déterminer la pondération apportée au sommet du rectangle pour que  $K$  soit le barycentre des points  $A, B, C$  et  $D$ .

- a. Le point  $P$  est tel que :  $\vec{CP} = \frac{3}{2} \cdot \vec{CB}$

Justifier que  $I$  est le milieu du segment  $[MP]$ .

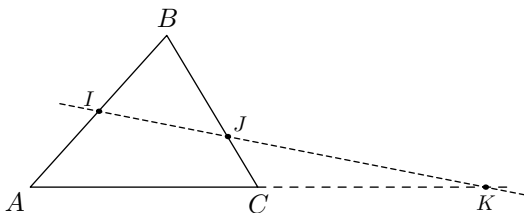
- b. En déduire des coefficients de pondérations non-nuls des quatres sommets du rectangle afin que  $I$  soit le barycentre de  $ABCD$ .

**Exercice 2672**



On considère un triangle quelconque  $ABC$  et les points  $I, J, K$  vérifiant les relations vectorielles suivantes :

$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{CJ} = \frac{1}{3} \cdot \vec{CB} \quad ; \quad \vec{AK} = 2 \cdot \vec{AC}$$



On souhaite montrer que les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont alignés.

- a. Montrer que  $B$  est le barycentre du système pondéré de points  $\{(C; -2); (J; 3)\}$

- b. En déduire la relation suivante :

$$-2 \cdot \vec{IC} + 3\vec{IJ} = \vec{IB}$$

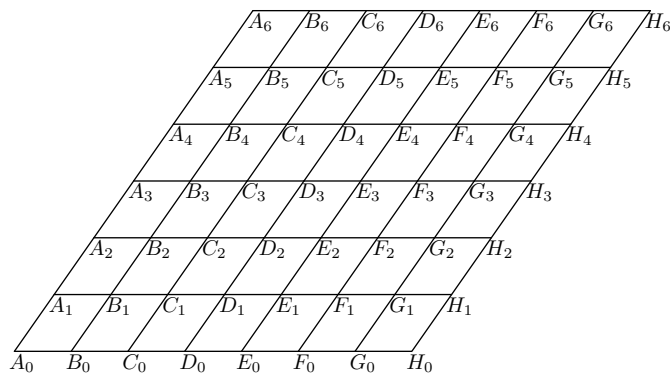
2. Etablir la relation suivante :  $2 \cdot \vec{IC} - \vec{IK} = \vec{IA}$

3. En déduire que  $I$  est barycentre du système :

$$\{(J; 3); (K; -1)\}$$

### Exercice 525

Dans le plan, on considère le quadrillage ci-dessous :



1. Déterminer le barycentre  $G$  du système :

$$\{(A_1; 1); (C_5; 1); (F_5; 2)\}$$

2. En se servant uniquement des points présentés sur la figure, déterminer le barycentre  $H$  du système :

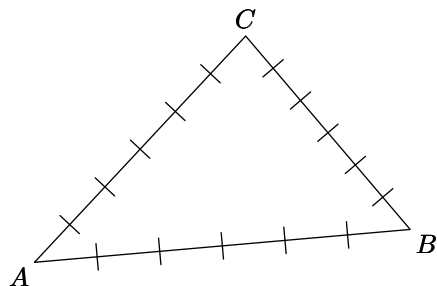
$$\{(A_6; 2); (D_6; -2); (B_4; -3)\}$$

3. Déterminer la valeur de  $\alpha$ , un nombre réel, afin que le système pondérée  $\{(B_4; 2); (H_1; 1); (E_4; \alpha)\}$  admette le point  $B_1$  pour barycentre.

## 10. Barycentre et caractérisation de droites :

### Exercice 2465

On considère ci-dessous le triangle  $ABC$  dont chacun des côtés a été partagé en six parties égales.



- a. Placer le point  $E$  le milieu de  $[AC]$ .
- b. Placer le point  $F$  barycentre du système pondéré suivant :  $\{(A; 1); (B; 2)\}$
- c. Placer le point  $G$  barycentre du système pondéré suivant :  $\{(C; \frac{\sqrt{2}}{2}); (B; \sqrt{2})\}$

2. Tracer les trois droites  $(BE)$ ,  $(FC)$  et  $(AG)$ .  
On remarque que les trois droites sont concourantes.

3. On considère le point  $H$  barycentre du système pondéré suivant de trois points :

$$\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\}$$

- a. Justifier que  $H$  est le barycentre du système pondéré suivant :

$$\{(F; 3); (C; 1)\}$$

- b. Justifier que  $H$  est également le barycentre du système

suivant :

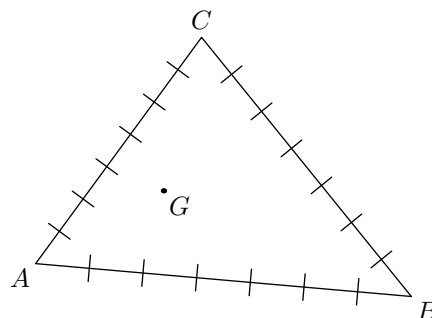
$$\{(B; 1); (E; 1)\}$$

- c. Justifier que le point  $H$  appartient à la droite  $(GA)$ .

4. En déduire que les droites  $(BE)$ ,  $(FC)$  et  $(AG)$  sont concourantes.

### Exercice 2466

On considère le triangle  $ABC$  représenté ci-dessous dont tous les côtés ont été subdivisés en 7 parties égales et un point  $G$  placé à l'intérieur du triangle  $ABC$ .



Déterminer la pondération affectée aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  afin que  $G$  soit le barycentre du triangle  $ABC$ . Justifier votre démarche.

### Exercice 2484

Dans le plan, on considère un triangle  $ABC$ . Soit  $I$  et  $J$  deux points vérifiant les relations vectorielles suivantes :

$$\vec{BI} = \frac{2}{3} \cdot \vec{BC} \quad ; \quad \vec{CJ} = \frac{1}{4} \cdot \vec{CA}$$

Soit  $O$  le point d'intersection des droites  $(AI)$  et  $(BJ)$ . On note  $K$  le point d'intersection de  $(CO)$  avec la droite  $(AB)$ .

Déterminer la valeur de  $\alpha$  vérifiant la relation suivante :

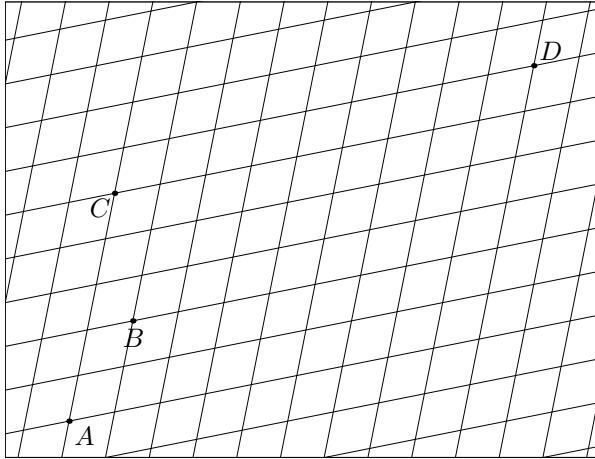
$$\vec{BA} = \alpha \cdot \vec{BK}$$

## 11. Barycentre de plusieurs points :

### Exercice 2862



On considère les quatre points  $A, B, C, D$  représentés ci-dessous :



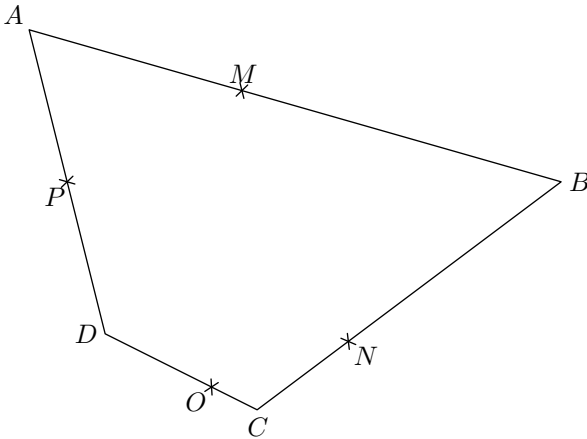
Déterminer la position du barycentre du système pondéré suivant :

$$\{(A; 3); (B; -5); (C; 2); (D; 1)\}$$

### Exercice 2863



Dans le plan, on considère le quadrilatère  $ABCD$  ci-dessous :



Pondérant les points de cette figure, on obtient les points  $M, N, O, P$  barycentre partiel respectivement des couples suivants  $(A; B), (B; C), (C; D), (D; A)$  :

- Déterminer la position du barycentre partiel du triangle  $BCD$ .
  - Déterminer la position du barycentre partiel du triangle  $ABC$ .
- En déduire la position du point  $G$  barycentre du quadrilatère  $ABCD$ .

### Exercice 2518



On considère le plan munit de quatre points  $A, B, C$  et  $D$ . Munis d'un poids, on obtient le système pondéré suivant  $\{(A; 1); (B; 2); (C; 1); (D; -2)\}$ ; on note  $G$  son barycen-

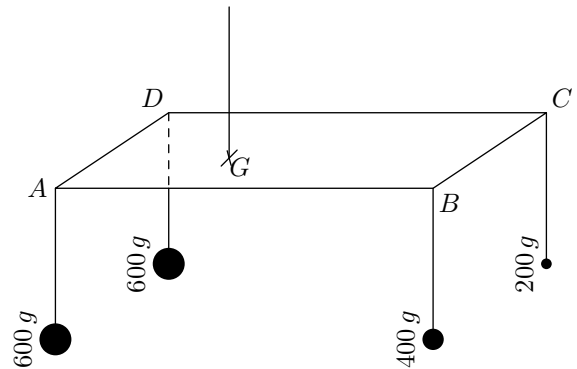
tre.

- Ecrire une relation vectorielle faisant intervenir ces cinq points du plan.
- En déduire que  $A$  est barycentre du système  $\{(B; \beta); (C; \gamma); (D; \delta); (G; \varepsilon)\}$  dont on déterminera les coefficients.

### Exercice 2892



Un lustre possède quatre ampoules distinctes en poids et en tailles; son armature en fer est de forme rectangulaire et de dimension  $30\text{ cm}$  sur  $10\text{ cm}$ . Une représentation de ce lustre est donnée ci-dessous :



- Tracer dans le plan le rectangle  $ABCD$  à l'échelle  $1/2$ .

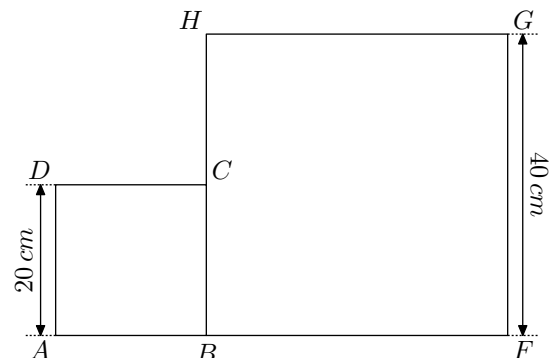
On souhaite trouver le centre de gravité de cette figure; pour cela, on associe à ce problème le système pondéré  $\{(A; 3); (B; 2); (C; 1); (D; 3)\}$  et on recherche la position du point  $G$  :

- Placer les points suivants :
  - $I$  barycentre partiel des points  $A$  et  $B$ .
  - $J$  le barycentre partiel des points  $B$  et  $C$ .
  - $K$  le barycentre partiel des points  $C$  et  $D$ .
  - $L$  le barycentre partiel  $A$  et  $D$ .
- En déduire la position du point  $G$  sur la figure.

### Exercice 2894



On considère une plaque de métal homogène et d'épaisseur constante; on effectue la découpe suivant.



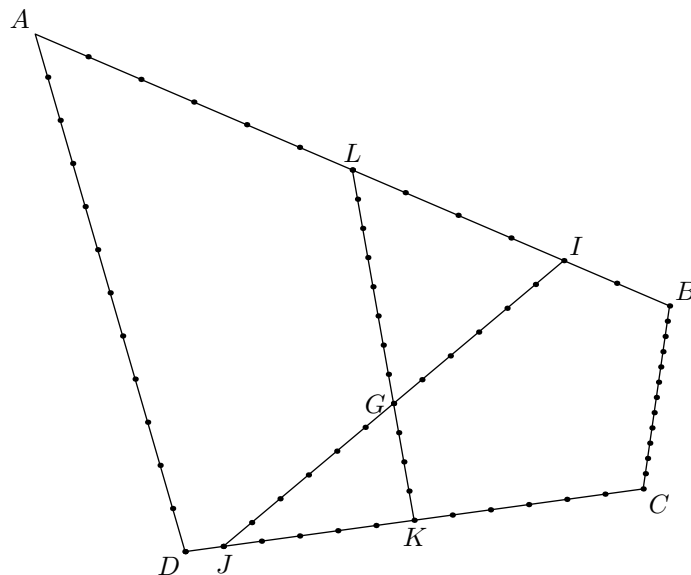


Les quadrilatères  $ABCD$  et  $CDEF$  sont deux carrés de côtés respectifs  $20\text{ cm}$  et  $40\text{ cm}$

- Déterminer l'aire respective des deux carrés.
- En déduire la position du centre de gravité de cette plaque.

### Exercice 2900

Dans le plan, on considère le quadrilatère  $ABCD$ ; chacun de ses côtés ont été partagés en douze parties égales. Les points  $I, J, K, L$  font parties de ce marquage; les segments  $[IJ]$  et  $[KL]$  ont été partagés de la même façon.



Déterminer deux pondérations non-homogènes du système  $\{A; B; C; D\}$  admettant le point  $G$  pour barycentre.

## 12. Barycentre et coordonnées :

### Exercice 2474

On munit le plan du repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On considère les points  $A, B, C$  de coordonnées respectives  $(2; 5)$ ,  $(3; -2)$ , et  $(-3; -1)$

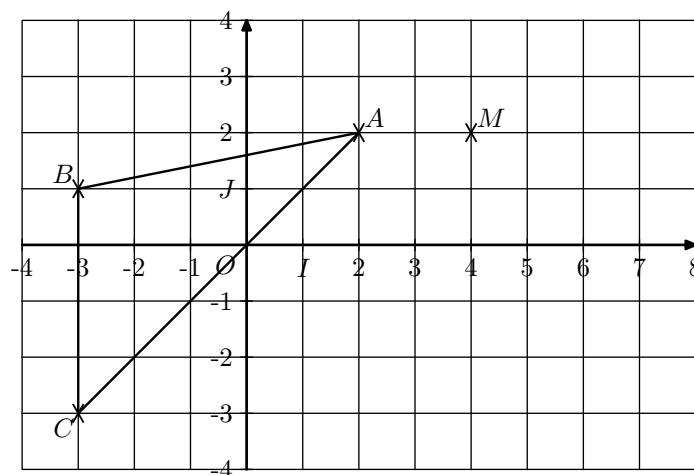
On considère le système pondéré suivant :

$$\{(A; 1); (B; 2); (C; 4)\}$$

Déterminer les coordonnées du point  $G$  barycentre de ce système.

### Exercice 2901

On considère le plan muni du repère orthonormé  $(O; I; J)$  représenté ci-dessous :



Les points  $A, B, C$  ont pour coordonnées respectives:  $(2; 2)$ ,  $(-3; 1)$ ,  $(-3; -3)$ .

On considère le système pondéré ci-dessous ayant pour le point  $G$  pour barycentre :

$$G\{(A; 2); (B; -1); (C; 1)\}$$

- Déterminer les coordonnées du point  $G$ .
  - Placer le point  $G$  dans le repère.
- Soit  $M$  le point du plan ayant pour coordonnée  $(4; 2)$ . Placer le point  $H$  vérifiant la relation :

$$\vec{MH} = 2 \cdot \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}$$

## 13. Barycentre et nombres complexes :



**Exercice 4073**

Dans le plan complexe rapporté au repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct, le point  $A$  a pour affixe  $i$ .

A tout point  $M$  d'affixe  $z$  avec  $z \neq i$ , on associe le point  $M'$  dont l'affixe est définie par :

$$z' = \frac{-z^2}{z-i}$$

On nomme  $G$  l'isobarycentre des points  $A$ ,  $M$  et  $M'$  et  $g$  l'affixe de  $G$  :

1. Vérifier l'égalité:  $g = \frac{1}{3 \cdot (z-i)}$

2. En déduire que: si  $M$  est un point du cercle de centre

$A$  de rayon  $r$ , alors  $G$  est un point du cercle de centre  $O$  de rayon  $\frac{1}{3 \cdot r}$ .

3. Démontrer que:  $\arg(g) = -\left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right)$

**Exercice 4108**

Le plan complexe est muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct. On prendra pour unité graphique 1 cm

On désigne par  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + 2i ; z_B = -3 ; z_C = -1 - 6i$$

Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_1$  des points  $M$  du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right\|$$

**14. Espace et isobarycentre :****Exercice 4084**

On munit l'espace d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère les points :

$$P(1; 2; 3) ; Q(4; 2; -1) ; R(-2; 3; 0)$$

Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane.

1. Montrer que le tétraèdre  $OPQR$  n'est pas régulier.
2. On nomme  $P'$  le centre de gravité du triangle  $OQR$ . Calculer les coordonnées de  $P'$ , centre de gravité du triangle  $OQR$ .
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan  $(OQR)$  est :  $3x + 2y + 16z = 0$
4. On considère la propriété  $(P)$  suivante :

$P$  : Dans un tétraèdre, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.

La propriété  $(P)$  est-elle vraie dans un tétraèdre quelconque?

**Exercice 4041**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère les points :

$$A(1; -1; 4) ; B(7; -1; -2) ; C(1; 5; -2)$$

1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs :  $\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{AC}$  ;  $\overrightarrow{BC}$   
 b. Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral.  
 c. En déduire que  $x+y+z-4=0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
2. Déterminer les coordonnées du point  $G$  isobarycentre des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

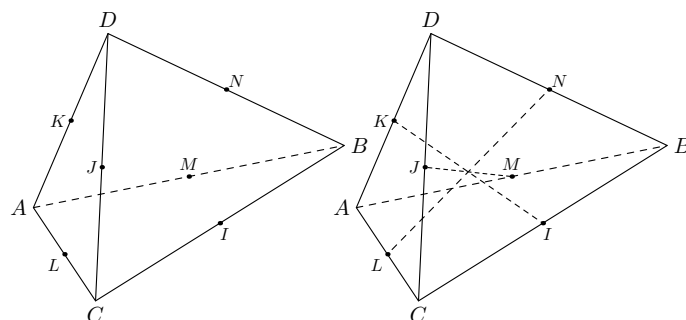
**Exercice 4244**

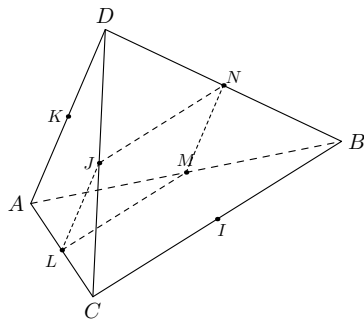
On considère un cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1.

1. Exprimer plus simplement le vecteur :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
2. En déduire que le produit scalaire  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$  est nul.
3. Démontrer de même que le produit scalaire  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}$  est nul.
4. Démontrer que la droite  $(AG)$  est orthogonale au plan  $(BDE)$ .

**15. Espace et barycentre :****Exercice 2486**

On considère le tétraèdre  $ABCD$  ci-dessous où  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  sont les milieux respectifs des côtés  $[BC]$ ,  $[DC]$ ,  $[AD]$ ,  $[AC]$ ,  $[AB]$ ,  $[BD]$ .





En se servant de l'isobarycentre du tétraèdre, montrer les deux questions suivantes :

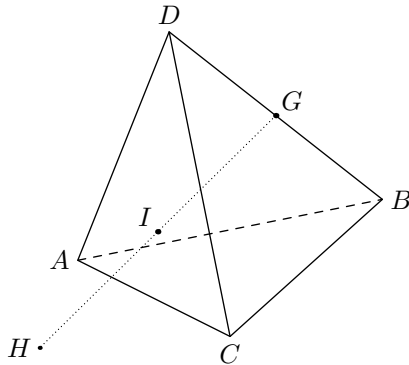
1. Montrer que les droites  $(JM)$ ,  $(KI)$ ,  $(LN)$  sont concurrentes.
2. Montrer que le quadrilatère  $JLMN$  est un parallélogramme.

Pour les deux questions suivantes, on se servira des théorèmes de géométrie classique :

3. Montrer que le quadrilatère  $JLMN$  est un parallélogramme.
4. En déduire que les trois droites reliant les milieux de côtés opposés sont concurrentes.

**Exercice 2519**

On considère le tétraèdre  $ABCD$  ci-dessous :



On considère :

- Le point  $G$  barycentre du système :  $\{(D; 2); (B; 2)\}$ .

**16. Espace, barycentre et droite :**

**Exercice 4252**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on donne les trois points :

$$A(1; 2; -1) \quad ; \quad B(-3; -2; 3) \quad ; \quad C(0; -2; -3)$$

On appelle  $G$  le barycentre du système pondéré :

$$\{(A; 1); (B; -1); (C; 2)\}$$

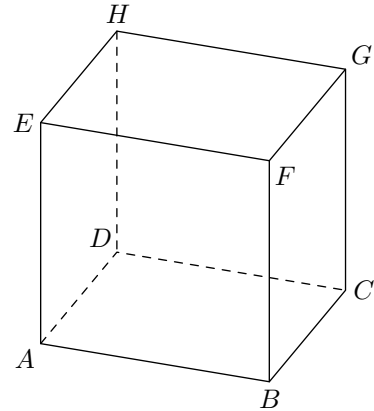
1. Démontrer que le point  $G$  a pour coordonnées  $(2; 0; -5)$ .
2. Démontrer que la droite  $(CG)$  est orthogonale au plan  $(P)$ .

- Le point  $H$  barycentre du système :  $\{(A; 3); (B; -2); (C; 3)\}$ .

On nomme  $I$  le milieu du segment  $[GH]$ . Justifier que le point  $I$  appartient au plan  $(ADC)$ .

**Exercice 4068**

On considère un cube  $ABCDEFGH$  d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormé  $(D; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  tel que :  $\vec{i} = \frac{1}{3} \cdot \vec{DA}$  ;  $\vec{j} = \frac{1}{3} \cdot \vec{DC}$  ;  $\vec{k} = \frac{1}{3} \cdot \vec{DH}$

1. Donner les coordonnées des points  $A$ ,  $C$  et  $E$ .
2. Déterminer les coordonnées du point  $I$  barycentre du système  $\{(C; 2); (E; 1)\}$
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\vec{AE}$  et  $\vec{DI}$ .

**Exercice 4246**

Dans l'espace, on considère trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On note  $G$  le barycentre du système :

$$\{(A; 1); (B; 1); (C; 2)\}$$

On considère la transformation, qui à tout point  $M$  de l'espace associe le point  $M'$  tel que :

$$\vec{MM'} = \vec{MA} + \vec{MB} + 2 \cdot \vec{MC}$$

Justifier que cette transformation est l'homothétie de centre  $G$  et de rapport 3.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(CG)$ .
4. Déterminer les coordonnées du point  $H$ , intersection du plan  $(P)$  avec la droite  $(CG)$ .

**Exercice 4060**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on les points :

$$A(0; 0; 2) \quad ; \quad B(0; 4; 0) \quad ; \quad C(2; 0; 0)$$

On désigne par  $G$  l'isobarycentre des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse :

La droite  $(AG)$  admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

### Exercice 4026



On considère l'espace muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé.

Pour tout réel  $k$ , on considère le point  $M_k$  dont les coordonnées sont définies par :

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 3 \cdot k \\ z = 2 + k \end{cases}$$

- Déterminer les points coordonnées du point  $M_k$  dans les trois cas suivants :  
 $k = 0$  ;  $k = 1$  ;  $k = -1$
  - Justifier que les points  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_{-1}$  sont alignés.
- On considère le point  $A$  de coordonnées  $(-1; 9; 4)$  :
  - Le point  $A$  appartient-il à l'ensemble des points  $M_k$  ?
  - Le point  $A$  appartient-il à la droite  $(M_0M_1)$  ?
- Montrer que, pour tout  $k$  réel, les vecteurs  $\overrightarrow{M_0M_k}$  et  $\overrightarrow{M_0M_1}$  sont colinéaires.
  - En déduire la nature de l'ensemble des points  $M_k$  lorsque  $k$  décrit  $\mathbb{R}$ .
  - Sans justification, donner la nature de l'ensemble des points  $M_k$  lorsque  $k$  décrit chacun des trois ensembles suivants :  
 $]-\infty; 0]$  ;  $[0; 1]$  ;  $[1; +\infty[$

### Exercice 4042



On considère le cube  $OABCDEFG$  d'arête de longueur 1

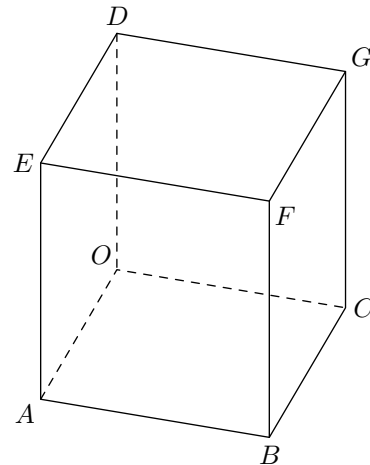
représenté ci-dessous. Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.

Soient Les points  $P$  et  $Q$  tels que :  
 $\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \overrightarrow{OA}$  ;  $\overrightarrow{OQ} = 4 \cdot \overrightarrow{OC}$

On appelle  $R$  le barycentre des points pondérés  $(B; -1)$  et  $(F; 2)$ .

L'espace est muni du repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD})$ .

- Démontrer que le point  $R$  a pour coordonnées  $(1; 1; 2)$ .
  - Démontrer que les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  ne sont pas alignés.
  - Quelle est la nature du triangle  $PQR$  ?
- On considère le plan  $(\mathcal{P})$  d'équation :  
 $4 \cdot x + 2 \cdot y + z - 8 = 0$ 
  - Montrer que les points  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  vérifient l'équation.
  - Vérifier que le point  $D$  n'appartient pas au plan  $(PQR)$ .

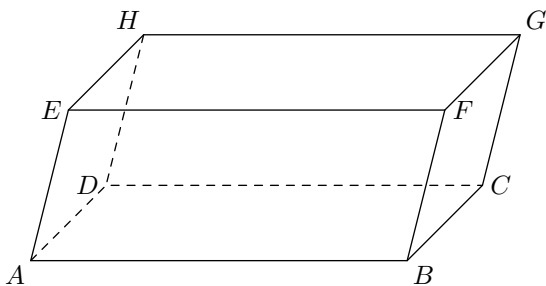


## 17. Espace, barycentre et recherche de la pondération :

### Exercice 2881



On considère le parallélépipède  $ABCDEFGH$  représenté ci-dessous :



Le système pondéré suivant admet le point  $N$  comme barycentre :

$$\{(A; 1); (B; -1); (E; -1); (D; -1)\}$$

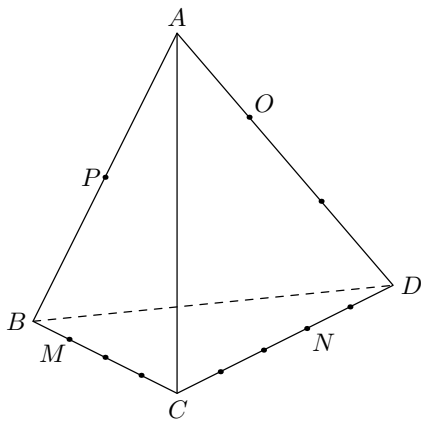
- Donner un représentant, à l'aide des points de cette figure, de la somme suivante :  
 $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}$

- Etablir que le point  $N$  est le milieu du segment  $[AG]$ .
- On munit l'espace du repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ . En se servant des coordonnées des points, établir que le point  $N$  est le milieu du segment  $[AG]$ .
  - On considère le système  $\{E; F; A; H\}$  ; déterminer la pondération de ce système afin que son barycentre soit le point  $N$

### Exercice 2870



On considère l tétraèdre  $ABCD$  présenté ci-dessous :



Les arêtes de ce tétraèdre ont été partagées en part égales. Les points  $M, N, O, P$  sont respectivement des points des arêtes  $[BC], [CD], [AD], [AB]$ .

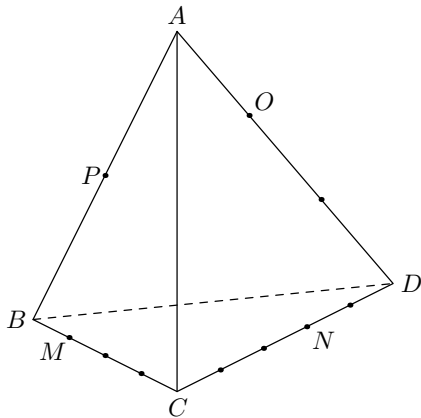
1. Déterminer la pondération, si elle existe, des sommets du tétraèdre afin que les points  $M, N, O, P$  soient les barycentres partiels des extrémités des arêtes auxquelles ils appartiennent.
2. Notons  $G$  le barycentre de ce tétraèdre :

- a. Justifier que le point  $G$  appartient à la droite  $(PN)$ .
- b. En déduire que les points  $M, N, O, P$  sont coplanaires.

**Exercice 2872**



On considère le tétraèdre  $ABCD$  présenté ci-dessous :



Les arêtes de ce tétraèdre ont été partagées en part égales. Les points  $M, N, O, P$  sont respectivement des points des arêtes  $[BC], [CD], [AD], [AB]$ .

1. Déterminer la pondération, si elle existe, des sommets du tétraèdre afin que les points  $M, N, O, P$  soient les barycentres partiels des extrémités des arêtes auxquelles ils appartiennent.
2. Notons  $G$  le barycentre de ce tétraèdre :

- a. Justifier que le point  $G$  appartient à la droite  $(PN)$ .
- b. En déduire que les points  $M, N, O, P$  sont coplanaires.

**Exercice 3114**



L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère les trois points  $A, B$  et  $C$  de coordonnées :  
 $A(-1; 1; 3)$  ;  $B(2; 1; 0)$  ;  $C(4; -1; 5)$

Peut-on écrire  $C$  comme barycentre des points  $A$  et  $B$ ?

**Exercice 3271**



On considère le tétraèdre  $ABCD$  ; on note  $I$  milieu du segment  $[AB]$  et  $J$  celui de  $[CD]$ .

1. a. Soit  $G_1$  le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A; 1); (B; 1); (C; -1); (D; 1)\}$$

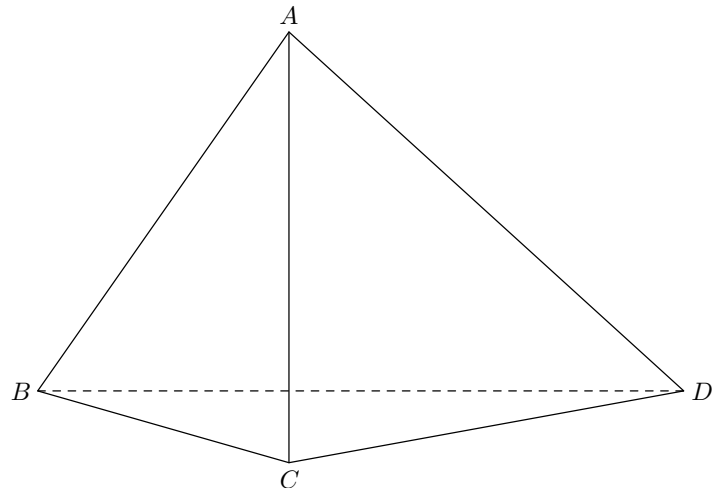
Exprimer  $\vec{IG}_1$  en fonction de  $\vec{CD}$ . Placer  $I, J$  et  $G_1$  sur la figure (voir feuille annexe).

- b. Soit  $G_2$  le barycentre du système de points pondérés  $\{(A; 1); (B; 1); (D; 2)\}$ .  
Démontrer que  $G_2$  est le milieu du segment  $[ID]$ . Placer  $G_2$ .
- c. Démontrer que  $IG_1DJ$  est un parallélogramme. En déduire la position de  $G_2$  par rapport aux points  $G_1$  et  $J$ .

2. Soit  $m$  un réel. On note  $G_m$  le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A; 1); (B; 1); (C; m-2); (D; m)\}$$

- a. Préciser l'ensemble  $\mathcal{E}$  des valeurs de  $m$  pour lesquelles le barycentre  $G_m$  existe.  
Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel  $m$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{E}$ .
- b. Démontrer que  $G_m$  appartient au plan  $(ICD)$ .
- c. Démontrer que le vecteur  $m\vec{JG}_m$  est constant.
- d. En déduire l'ensemble  $\mathcal{F}$  des points  $G_m$  lorsque  $m$  décrit l'ensemble  $\mathcal{E}$ .



**Exercice 4043**



L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère les points :

$$A(-1; 1; 3)$$
 ;  $B(2; 1; 0)$  ;  $C(4; -1; 5)$

Peut-on écrire le point  $C$  comme barycentre des points  $A$  et  $B$ .

## 18. Espace, barycentre et lieu géométrique :

### Exercice 4040



L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les points  $A(3; 1; 3)$  et  $B(-6; 2; 1)$ .

Déterminer les caractéristiques de l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :

$$\|4 \cdot \vec{MA} - \vec{MB}\| = 2$$

### Exercice 4048



L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère les points :

$$A(1; -1; 3) \quad ; \quad B(0; 3; 1) \quad ; \quad C(6; -7; -1)$$

$$D(2; 1; 3) \quad ; \quad E(4; -6; 2)$$

1. a. Montrer que le barycentre du système :

$$\{(A; 2); (B; -1); (C; 1)\}$$

est le point  $E$ .

- b. En déduire l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  de l'espace tels que :

$$\|2 \cdot \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 2 \cdot \sqrt{21}$$

2. Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $D$  définissent un plan.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(EC)$ .

### Exercice 4059



Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse :

Soit  $B$  et  $C$  deux points de l'espace. L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :

$$\|\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MB} - \vec{MC}\|$$

est la sphère de diamètre  $[BC]$ .

## 19. Ancienne annales et suites (avant 2012) :

### Exercice 3432



#### Partie A

On considère les suites de points  $A_n$  et  $B_n$  définies pour tout entier naturel  $n$  de la manière suivante : sur un axe orienté  $(O; \vec{u})$  donné en annexe, le point  $A_0$  a pour abscisse 0 et le point  $B_0$  a pour abscisse 12.

Le point  $A_{n+1}$  est le barycentre des points  $(A_n; 2)$  et  $(B_n; 1)$ , le point  $B_{n+1}$  est le barycentre des points pondérés  $(A_n; 1)$  et  $(B_n; 3)$ .

1. Sur le graphique, placer les points  $A_2$ ,  $B_2$ .
2. On définit les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  des abscisses respectives des points  $A_n$  et  $B_n$ . Montrer que :

$$a_{n+1} = \frac{2 \cdot a_n + b_n}{3}$$

On admet de même que : 
$$b_{n+1} = \frac{a_n + 3 \cdot b_n}{4}$$

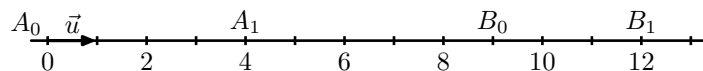
#### Partie B

1. On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par : 
$$u_n = b_n - a_n.$$

- a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique. En préciser la raison.
  - b. Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de l'entier naturel  $n$ .
  - c. Déterminer la limite de  $(u_n)$ . Interpréter géométriquement ce résultat.
2. a. Démontrer que la suite  $(a_n)$  est croissante (on pourra utiliser le signe de  $u_n$ ).
  - b. Etudier les variations de la suite  $(b_n)$ .
  3. Que peut-on dire des résultats précédents quant à la convergence des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ ?

#### Partie C

1. On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par : 
$$v_n = 3 \cdot a_n + 4 \cdot b_n$$
 Montrer que la suite  $(v_n)$  est constante.
2. Déterminer la limite des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

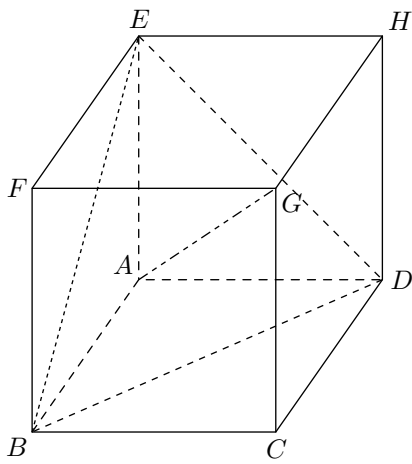


## 20. Ancienne annales et espaces (avant 2012) :

### Exercice 3265



On considère le cube  $ABCDEFGH$  ci-contre ;  $O_1$  et  $O_2$  sont les centres des carrés  $ABCD$  et  $EFGH$ , et  $I$  est le centre de gravité du triangle  $EBD$ .



Soit  $m$  un nombre réel et  $G_m$  le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(E; 1); (B; 1-m); (G; 2m-1); (D; 1-m)\}$$

### Partie A

- Justifier l'existence du point  $G_m$ .
- Préciser la position du point  $G_1$ .
- Vérifier que  $G_0 = A$ . En déduire que les points  $A$ ,  $I$  et  $G$  sont alignés.
- Démontrer que  $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$ . En déduire l'ensemble des points  $G_m$  lorsque  $m$  parcourt l'ensemble des nombres réels.
- Vérifier que les points  $A$ ,  $G_m$ ,  $E$  et  $O_1$  sont coplanaires.
  - Déterminer la valeur de  $m$  pour laquelle  $G_m$  se trouve sur la droite  $(EI)$ .

### Partie B

Dans cette question, l'espace est rapportée au repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

- Démontrer que la droite  $(AG)$  est orthogonale au plan  $(EBD)$ . En déduire une équation cartésienne du plan  $ABD$ .
- Déterminer les coordonnées du point  $G_m$ .
- Pour quelles valeurs de  $m$ , la distance de  $G_m$  au plan  $(EBD)$  est-elle égale à  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ?

### Exercice 3269

Dans le plan affine, on considère  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$ ,  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  et  $J$  le centre de gravité de  $ABC$ .

Pour tout réel  $m$ , différent de  $-\frac{1}{3}$ , on note  $G_m$  le barycentre du système de points pondérés :

$$S_m = \{(A; 1); (B; m); (C; 2m)\}$$

Pour tout point  $M$  du plan, on note  $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

Pour chacune des six affirmations suivantes, dite si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse donne 0,5 point, chaque réponse fausse ou illisible enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte

ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à 0.

Affirmation	V ou F
$G_1$ est le milieu du segment $[CI]$	
$G_1$ est barycentre de $\{(J; 2); (C; \frac{2}{3})\}$	
Pour tout point $M$ : $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$	
Pour tout $m$ , distinct de $-\frac{1}{3}$ , $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$	
$IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle	
Pour tout point $P$ de $(AG_{-1})$ , il existe un réel $m$ tel que $P = G_m$	

### Exercice 4064



Dans le plan  $(P)$ , on considère le triangle  $ABC$  isocèle en  $A$ , de hauteur  $[AH]$  tel que  $AH = BC = 4$ . On prendra le centimètre pour unité.

- En justifiant la construction, placer le point  $G$ , barycentre du système de points pondérés :  $\{(A; 2); (B; 1); (C; 1)\}$
- On désigne le point  $M$  un point quelconque de  $(P)$ .
  - Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$  est un vecteur dont la norme est 8.
  - Déterminer et construire l'ensemble  $E_1$  des points  $M$  du plan tels que :  $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{V}\|$
- On considère le système de points pondérés :  $\{(A; 2); (B; n); (C; n)\}$  où  $n$  est un entier naturel fixé.
  - Montrer que le barycentre  $G_n$  de ce système de points pondérés existe. Placer  $G_0, G_1, G_2$ .
  - Montrer que le point  $G_n$  appartient au segment  $[AH]$ .
  - Calculer la distance  $AG_n$  en fonction de  $n$  et déterminer la limite de  $AG_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Préciser la position limite de  $G_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
  - Soit  $E_n$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n \cdot \|\overrightarrow{V}\|$   
Montrer que  $E_n$  est un cercle qui passe par le point  $A$ .  
En préciser le centre et le rayon, notée  $R_n$ .
  - Construire  $E_2$ .

### Exercice 4069



Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$  (unité graphique : 2 cm).

On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :

$$z_A = -\frac{3}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} ; z_B = \overline{z_A} ; z_C = -3$$

### Partie A

- Ecrire les nombres complexes  $z_1$  et  $z_B$  sous forme exponentielle.



2. Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

3. Démontrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral.

### Partie B

Soit  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{1}{3} \cdot i \cdot z^2$ .

On note  $O'$ ,  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les points respectivement associés par  $f$  aux points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

1. a. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ .

b. Placer les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ .

c. Démontrer l'alignement des points  $O$ ,  $A$  et  $B'$  ainsi que celui des points  $O$ ,  $B$  et  $A'$ .

2. Soit  $G$  l'isobarycentre des points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On note  $G'$  le point associé à  $G$  par  $f$ .

a. Déterminer les affixes des points  $G$  et  $G'$ .

b. Le point  $G'$  est-il l'isobarycentre des points  $O'$ ,  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ ?

3. Démontrer que si  $M$  appartient à la droite  $(AB)$  alors  $M'$  appartient à la parabole d'équation :

$$y = -\frac{1}{3} \cdot x^2 + \frac{3}{4}$$

(On ne demande pas de tracer cette parabole)

#### Exercice 4241



On considère un tétraèdre  $ABCD$ . On note  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  les milieux respectifs des arêtes  $[AB]$ ,  $[CD]$ ,  $[BC]$ ,  $[AD]$ ,  $[AC]$  et  $[BD]$ .

On désigne par  $G$  l'isobarycentre des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

1. Montrer que les droites  $(IJ)$ ,  $(KL)$  et  $(MN)$  sont concourantes en  $G$ .

Dans la suite de l'exercice, on suppose que :

$$AB = CD \quad ; \quad BC = AD \quad ; \quad AC = BD$$

(On dit que le tétraèdre  $ABCD$  est équifacial, car ses faces sont isométriques)

1. a. Quelle est la nature du quadrilatère  $IKJL$ ? Préciser également la nature des quadrilatères  $IMJN$  et  $KNLM$ .

b. En déduire que  $(IJ)$  et  $(KL)$  sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites  $(IJ)$  et  $(MN)$  sont orthogonales et les droites  $(KL)$  et  $(MN)$  sont orthogonales.

#### Exercice 3223



On donne dans le plan trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  distincts non alignés.

Une urne  $U$  contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$  et  $3$ .

Une urne  $V$  contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre  $1$  et un carton le nombre  $-1$ .

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note  $a$  le nombre lu sur le carton de  $U$  et  $b$  celui lu sur le carton de  $V$ .

1. Justifier que les points pondérés  $(A; a)$ ,  $(B; b)$  et  $(C; 4)$

admettent un barycentre. On le note  $G$ .

2. a. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

•  $E_1$  : " $G$  appartient à la droite  $(BC)$ ";

•  $E_2$  : " $G$  appartient au segment  $[BC]$ ".

b. Montrer que la probabilité de l'évènement  $E_3$  : " $G$  est situé à l'intérieur du triangle  $ABC$  et n'appartient à aucun des côtés" est égale à  $\frac{2}{5}$ . On pourra faire appel des considérations de signe.

3. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On répète  $n$  fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes  $U$  et  $V$  puis à considérer le barycentre  $G$  de la question 1.

On désigne par  $\mathcal{X}$  la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement  $E_3$ .

a. Déterminer l'entier  $n$  pour que l'espérance de la variable aléatoire  $\mathcal{X}$  soit égale à 4.

b. Déterminer le plus petit entier  $n$  pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle  $ABC$  soit supérieure ou égale à 0,999.

#### Exercice 3233



L'espace  $E$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  de coordonnées respectives  $(1; 0; 2)$ ,  $(1; 1; 4)$  et  $(-1; 1; 1)$ .

1. a. Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

b. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(3; 4; -2)$ .

Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .

En déduire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

2. Soient  $P_1$  et  $P_2$  les plans d'équations respectives :

$$2x + y + 2z + 1 = 0 \quad ; \quad x - 2y + 6z = 0$$

a. Montrer que les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants selon une droite  $D$  dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

b. La droite  $D$  et le plan  $(ABC)$  sont-ils sécants ou bien parallèles?

3. Soit  $t$  un réel positif quelconque. On considère le barycentre  $G$  des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  affectés des coefficients respectifs 1, 2 et  $t$ .

a. Justifier l'existence du point  $G$  pour tout réel positif  $t$ .

Soit  $I$  le barycentre des points  $A$  et  $B$  affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point  $I$ .

Exprimer le vecteur  $\vec{IG}$  en fonction du vecteur  $\vec{IC}$ .

b. Montre que l'ensemble des points  $G$  lorsque  $t$  décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment  $[IC]$  privée du point  $C$ .

Pour quelle valeur de  $t$ , le milieu  $J$  du segment  $[IC]$  coïncide-t-il avec  $G$ ?

#### Exercice 3194



$ABCDEFGH$  est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille



annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

**Partie A.** Un triangle et son centre de gravité

1. Démontrer que le triangle  $BDE$  est équilatéral.
2. Soit  $I$  le centre de gravité du triangle  $BDE$ .
  - a. Calculer les coordonnées de  $I$ .
  - b. Démontrer que  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ . Que peut-on en déduire pour les points  $A, I, G$ ?
3. Prouver que  $I$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur le plan  $(BDE)$ .

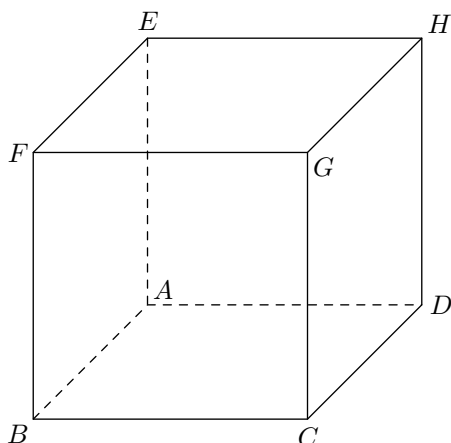
**Partie B.** Une droite particulière

Pour tout nombre réel  $k$ , on définit deux points  $M_k$  et  $N_k$ , ainsi qu'un plan  $\mathcal{P}_k$  de la façon suivante:

- $M_k$  est le point de la droite  $(AG)$  tel que  $\overrightarrow{AM_k} = k \cdot \overrightarrow{AG}$ ;
- $\mathcal{P}_k$  est le plan passant par  $M_k$  et parallèle au plan  $(BDE)$ ;
- $N_k$  est le point d'intersection du plan  $\mathcal{P}_k$  et de la droite  $(BC)$ .

1. Identifier  $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$ ,  $M_{\frac{1}{3}}$  et  $N_{\frac{1}{3}}$  en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance  $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$ .
2. Calcul des coordonnées de  $N_k$ .
  - a. Calculer les coordonnées de  $M_k$  dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .
  - b. Déterminer une équation du plan  $\mathcal{P}_k$  dans ce repère.
  - c. En déduire que le point  $N_k$  a pour coordonnées  $(1; 3 \cdot k - 1; 0)$ .
3. Pour quelles valeurs de  $k$  la droite  $(M_kN_k)$  est-elle orthogonale à la fois aux droites  $(AG)$  et  $(BC)$ ?
4. Pour quelles valeurs de  $k$  la distance  $M_kN_k$  est-elle minimale?
5. Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan  $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$ .

Tracer la droite  $(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}})$  sur la même figure.



**Exercice 3250**



Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

**Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention "vrai" ou "faux".**

Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.

Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

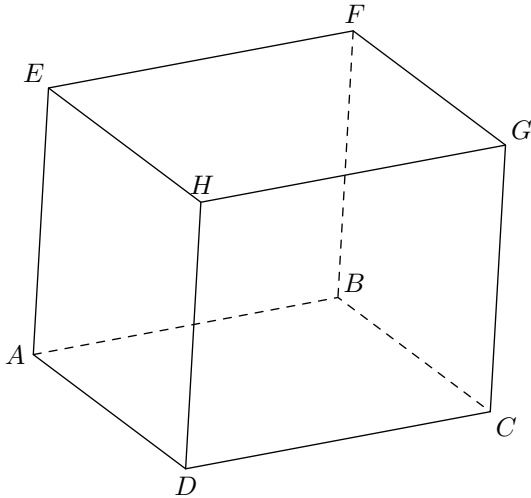
1. "Si  $a$  est un nombre réel quelconque et  $f$  une fonction définie et strictement décroissante sur  $[a; +\infty[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ "
2. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $[0; +\infty[$ ,  $g$  ne s'annulant pas :  
"Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$ "
3. "Si  $f$  est une fonction définie sur  $[0; +\infty[$  telle que  $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$  sur  $[0; +\infty[$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ "
4. On considère un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  du plan.  
"Si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  alors la droite d'équation  $x=0$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ "
5. "La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :  
 $y' - y = (2x + 3)e^x$ "
6. Soient  $A, B, C$  trois points du plan. On appelle  $I$  barycentre des points  $A$  et  $B$  affectés respectivement des coefficients 3 et  $-2$   
"Si  $G$  est le barycentre des points  $A, B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients 3,  $-2$  et 1 alors  $G$  est le milieu du segment  $[CI]$ "
7. Soient  $A, B, C$  trois points du plan et  $G$  le barycentre de  $A, B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients 3,  $-2$  et 1.  
"L'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  
 $\|3 \cdot \overrightarrow{MA} - 2 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$   
est le cercle de centre  $G$  et de rayon 1".
8. Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan. On désigne par  $M$  un point quelconque du plan.  
"Le produit scalaire  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  est nul si, et seulement si,  $M = A$  ou  $M = B$ ".

255. Exercices non-classés :

**Exercice 3135**



On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté  $ABCDEFGH$  et représenté ci-dessous :



Soit  $I$  le barycentre des points pondérés  $(E; 2)$  et  $(F; 1)$ ,  $J$  celui de  $(F; 1)$  et  $(B; 2)$  et enfin  $K$  celui  $(G; 2)$  et  $(C; 1)$ .

On veut déterminer l'ensemble des points  $M$  équidistants de  $I, J$  et  $K$ . On note  $\Delta$  cet ensemble

1. Placer les points  $I, J$  et  $K$  sur la figure ci-dessus.
2. Soit  $\Omega$  le point de  $\Delta$  situé dans le plan  $(IJK)$ . Que représente ce point pour le triangle  $IJK$ ?

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormé suivant :

$$\left( A; \frac{1}{3}\vec{AD}; \frac{1}{3}\vec{AB}; \frac{1}{3}\vec{AE} \right)$$

3. Donner les coordonnées des points  $I, J$  et  $K$ .
4. Soit  $P(2; 0; 0)$  et  $Q(1; 3; 3)$  deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite  $(PQ)$  est orthogonale au plan  $(IJK)$ .
5. Soit  $M$  un point de l'espace de coordonnées  $(x; y; z)$ .
  - a. Démontrer que  $M$  appartient à  $\Delta$  si, et seulement si, le triplet  $(x; y; z)$  est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de  $\Delta$ ?
  - b. Vérifier que  $P$  et  $Q$  appartiennent à  $\Delta$ . Tracer  $\Delta$  sur la figure.
6.
  - a. Déterminer un vecteur normal au plan  $(IJK)$  et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
  - b. Déterminer alors les coordonnées exactes de  $\Omega$