Terminale S/Suites, variations et limites

1. Théorèmes des gendarmes :

Exercice 2554

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par la relation explicite : $u_n=\dfrac{3n+(-1)^n}{2n-1}$

1. Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).

2. Etablir l'encadrement suivant :

   Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\dfrac{3n-1}{2n-1}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{3n+1}{2n-1}$

3. En déduire la valeur de convergence de (u_n).

Exercice 2567

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite de son terme de rang n :
$u_n=\sqrt{2\cdot n+1}-\sqrt{2\cdot n}$

1. Montrer l'égalité suivante pour tout $n\in\mathbb{N}$:
   $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{2\cdot n}}$

2. Etablir l'encadrement suivant :
   $0<u_n<\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot n}}$

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3441

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme de rang n est définie par la relation :

$$u_n=\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1. Etablir l'encadrement suivant pour tout entier naturel n non-nul : $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{n}{n+1}$

2. En déduire la convergence de la suite (u_n) ; on précisera la valeur de la limite.

Exercice réservé 2587

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie explicitement par la formule :

$$u_n=\frac{3}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{3}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\frac{3}{\sqrt{4n^2+n}}$$

1. Comparer les deux termes suivants :

$$\frac{3}{\sqrt{4n^2+1}}\quad\text{et}\quad\frac{3}{\sqrt{4n^2+n}}$$

2. Etablir que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{3}{2}$.

Exercice réservé 3446

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot\Big(u_n+\dfrac{5}{u_n}\Big) \quad \text{pour tout entier naturel } n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n>0$

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n-\sqrt{5}\geqslant 0$

3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n non-nul l'inégalité suivante :
   $u_n-\sqrt{5}\leqslant\dfrac{1}{2^n}$

4. Déduire des questions précédentes la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

Exercice 5034

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0=2\quad;\quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\Big(u_n+\frac{2}{u_n}\Big)\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. a. Etablir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{\big(u_n-\sqrt{2}\big)^2}{2\cdot u_n}$

   b. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n\geqslant\sqrt{2}$

2. a. Déduire des questions précédentes l'encadrement :
   $0\leqslant u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\big(u_n-\sqrt{2}\big)^2$

   b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'encadrement ci-dessous pour tout entier naturel n :
   $0\leqslant u_n-\sqrt{2}\leqslant\big(u_0-\sqrt{2}\big)^{(2^n)}$

3. a. Donner une valeur approchée de $\big|u_0-\sqrt{2}\big|$ au millième près.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. Variations de suites :

Exercice réservé 5817

On considère la suite (u_n) déinie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{n \cdot u_n + 1}{2(n+1)} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

On définit une suite auxiliaire (v_n) par :
$v_n = n \cdot u_n - 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
$u_n = \frac{1 + (0{,}5)^n}{n}$
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
$u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0{,}5n) \cdot (0{,}5)^n}{n \cdot (n+1)}$
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Convergences de suites monotones :

Exercice 5815

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{3 \cdot u_n}{1 + 2 \cdot u_n}$

1. a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n < 1$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. Démontrer que la suite (u_n) converge. *(on ne demande pas la valeur de la limite).*

Exercice 6910

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est majorée par 7.
2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice réservé 3418

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{5} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{2}{5} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Justifier que la suite (u_n) est convergente *(on ne demande pas la valeur de la limite).*

4. Divergence de suites monotones :

Exercice 3473

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + n - 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a. Démonter que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$: $u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$: $u_n \geqslant n - 3$
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice réservé 3442

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2. a. Etablir, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité suivante pour tout entier naturel n :
   $u_n > n^2$
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

5. Autres types de suites :

Exercice 5732

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leqslant 2$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Exercice réservé 5080

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2 \cdot n} \cdot u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n)?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

6. Suites définies conjointement :

Exercice 5900

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad v_0 = 1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2 \cdot v_n}{3} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

Partie A

1. Calculer u_1 et v_1.
2. On considère la fonction `f` extrait d'un algorithme où le paramètre `n` est un entier supérieur ou égal à 1 :

```
Fonction f(n)
    u ← 0
    v ← 1
    Pour k variant de 1 à n
        w ← u
        u ← (w+v)/2
        v ← (w+2·v)/3
    Fin Pour
    Renvoyer (u;v)
```

   a. On appelle la fonction `f` avec pour argument la valeur `n`=2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'appel à la fonction `f`.

k	w	u	v
1			
2			

   b. Pour un nombre entier N donné, à quoi correspond le couple de valeurs renvoy'ees par la fonction `f` par rapport à la situation étudiée dans cet exercice?

Partie B

1. a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout entier naturel, on a :
   $v_n - u_n > 0$

   b. En déduire que la suite (u_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante.
2. Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Partie C

1. On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
   $w_n = v_n - u_n$

   a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

   b. Justifier que les limites des suites (u_n) et (v_n) sont égales.
2. On considère la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $t_n = 2 \cdot u_n + 3 \cdot v_n$

   a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

   b. En déduire l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

7. Suites et fonctions :

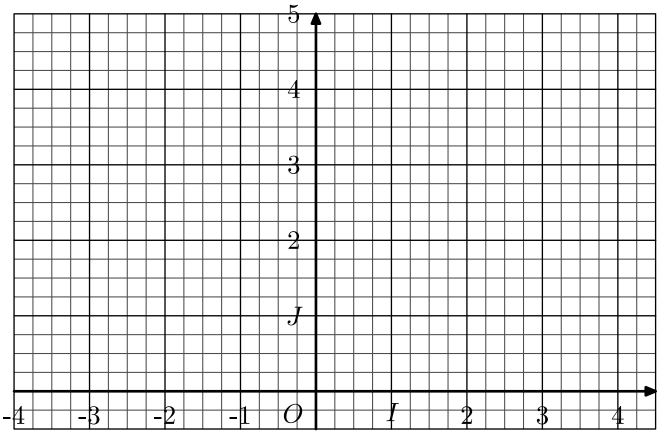
Exercice 3519

On se propose de montrer que les relations :

$$u_0 = -3 \quad ; \quad u_n = \frac{u_{n-1} - 8}{2{\cdot}u_{n-1} - 9} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

définissent bien une suite et que cette suite est convergente.

1. On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty\,;\frac{9}{2}\right[$ par :
$$f(x) = \frac{x-8}{2x-9}$$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
   a. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
   Citer les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   b. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   En déduire le tableau de variations de la fonction f.
   c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   d. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous, ainsi que de la droite d'équation $y = x$:



   e. En se servant de ce graphique, faire une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).
2. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 1$.
3. Démontrer que la suite est croissante et qu'elle converge. *(On ne demande pas la valeur de la limite)*

Exercice réservé 3416

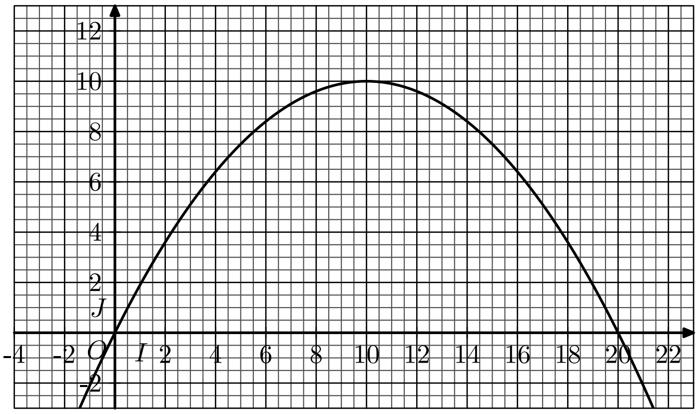
On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écrant plat, en fonction de l'année.

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n=0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}{\cdot}u_n{\cdot}\left(20 - u_n\right)$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;20]$ par :
$$f(x) = \frac{1}{10}{\cdot}x{\cdot}(20-x)$$
   a. En déduire que pour tout $x \in [0\,;20]$: $f(x) \in [0\,;10]$.
   b. On donne en annexe la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.
   Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. *(on ne demande pas la valeur de sa limite).*



Exercice 3422

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = 1{,}4{\cdot}v_n - 0{,}05{\cdot}{v_n}^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 1{,}4x - 0{,}05{\cdot}x^2$
   a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$
2. Etablir la convergence de la suite (v_n) *(on ne demandera pas la valeur de la limite).*

Exercice 5053

On considère la fonction f définit sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{8}{\cdot}x^2 + \frac{1}{2}{\cdot}x + \frac{1}{2}$$

1. Montrer que si $x \in [0\,;2]$ alors $f(x) \in [0\,;2]$
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évalution.*
On définit la suite (u_n) par :
$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
Etablir la convergence de la suite (u_n) *(on ne demande pas la valeur de la limite).*

8. Suite, exponentielles et logarithmes :

Exercice 288

Soit a un nombre réel quelconque. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par :

$$u_0 = a \quad ; \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} \cdot \left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right).$$

On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x$$

1. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x :
   $$g'(x) = \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(2\cdot\mathrm{e}^x + 1\right)$$
2. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
3. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right)$, étudier le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.

Exercice 6908

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n - \ln\left({u_n}^2 + 1\right)$$

On admet que la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right)$$

est croissante sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $\left[0\,;1\right]$.
2. Etudier les variations de la suite $\left(u_n\right)$.
3. Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente.
4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité :
   $$f(\ell) = \ell$$
   En déduire la valeur de ℓ.

Exercice réservé 6909

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier strictement positif n par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$ par :
   $$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   b. En déduire le signe de la fonction f.
2. a. Démontrer que pour tout entier strictement positif :
   $$u_{n+1} - u_n = f(n)$$
   b. En déduire le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.

