Terminale S/Suites: raisonnement par récurrence

1. Manipulations algébriques (pour l'hérédité) :

Exercice 5810

Etablir l'égalité suivante pour tout entier naturel n différent de 6 :

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\cdot n+4\right)-6}{n-6}=\frac{1}{3}$$

Exercice 5805

Etablir l'identité ci-dessous pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$$

Exercice 5811

Etablir l'identité suivante pour tout entier naturel n :

$$\frac{\frac{10\cdot n+1}{n+10}-1}{\frac{10\cdot n+1}{n+10}+1}=\frac{9}{11}\times\frac{n-1}{n+1}$$

Exercice 5809

Etablir l'identité suivante pour tout entier naturel n :

$$\frac{n\cdot\frac{1+(0{,}5)^n}{n}+1}{2\cdot(n+1)}=\frac{1+(0{,}5)^{n+1}}{n+1}$$

Exercice 5807

Etablir l'identité suivante pour tout entier naturel n :

$$\frac{(n+2)\cdot(1+2\cdot n)+1}{n+1}=1+2\cdot(n+1)$$

Exercice réservé 5808

Etablir l'identité suivante pour tout entier naturel n :

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Exercice 5806

Etablir l'identité suivante pour tout entier naturel n :

$$\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\cdot(4\cdot n^2+12\cdot n+5)+\frac{6}{n+1}$$
$$=4\cdot(n+1)^2+12\cdot(n+1)+5$$

Exercice réservé 6168

Etablir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\frac{3\times\frac{3^n}{3^n+1}}{1+2\times\frac{3^n}{3^n+1}}=\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}+1}$$

2. Introduction au raisonnement par récurrence :

Exercice 3437

1. Soit (u_n) une suite dont le terme de rang n est définie, pour tout entier naturel n, par :
   $$u_n=\frac{2\cdot n}{n+1}$$
   Donner l'expression simplifiée des termes u_{n+1} et u_{n+2} en fonction de n.
2. Soit (v_n) une suite dont le terme de rang n s'écrit en fonction de n :
   $v_n=3^{n-1}+4^{n+1}$ pour tout entier naturel n.

   Donner une expression des termes v_{n+1} et v_{n+2} en fonction de n.
3. Pour tout entier naturel n non-nul, on a l'égalité :
   $$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$
   Donner l'écriture de cette identité au rang $(n+1)$.

Exercice réservé 5213

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définie pour tout entier naturel n supérieur à 2.

$$u_n=\sum_{k=1}^{n-1}k^2 \quad ; \quad v_n=\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2\cdot n-1)}{6}$$

On complétera le tableau ci-dessous en donnant, pour chaque ligne, une expression, en fonction de n, du terme de la suite (u_n) et de la suite (v_n) au rang demandé.

	Terme de la suite	
Au rang	(u_n)	(v_n)
2		
3		
4		
$n-1$		
n		
$n+1$		
$n+2$		
$n+3$		

2. On remarque que ces premiers termes vérifient la propriété : $u_n \geqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comment peut-on justifier que tous les termes de la suite (u_n) vérifient cette propriété?

Exercice 5176

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence et vérifiant les conditions :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+2} = 2\cdot u_{n+1} - u_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. a. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
   b. Emettre une conjecture quant à la nature de la suite (u_n).
   c. Que reste-t-il à montrer pour établir cette récurrence?
2. a. Donner l'expression simplifiée de $u_{n+2} - u_{n+1}$.
   b. Cela suffit-il pour justifier la conjecture?

Exercice réservé 3430

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\Big(u_n + \frac{2}{u_n}\Big) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On considère la suite f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\Big(x + \frac{2}{x}\Big)$$
Dresser le taleau de variation de la fonction f.
2. Peut-on conjecturer une minoration de la suite (u_n) pour les termes de rang supérieur ou égal à 2.

Exercice 6129

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 7 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}\cdot u_n + \frac{3}{2}$$

1. Donner les valeurs approchées au millième près des six premiers termes de la suite (u_n).

3. Récurrence - inégalités :

Exercice 5802

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier entier naturel n, on a l'encadrement : $0 < u_n < 3$.

Exercice 3428

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3}{2}\cdot u_n - 1 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Etablir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 3$
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Exercice réservé 5033

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -3 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{u_n}{2}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer la valeur du terme de rang 1 de la suite (u_n).
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$

Exercice réservé 3286

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $u_n \geqslant 0$.

Exercice 4102

1. Montrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on a : $2\cdot n^2 \geqslant (n+1)^2$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 : $2^n \geqslant n^2$

4. Récurrence - égalités :

Exercice 6130

On considère la suite (u_n) défine sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression :

$$u_n = n^2 + n$$

Exercice 3295

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$2u_n = 5^{n+2} + 3.$$

Exercice réservé 6131

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + 3\times 0{,}5^n.$$

Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0{,}5^n$$

Exercice 6827

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 0{,}5\cdot u_n + 0{,}5\cdot n - 1{,}5$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$u_n = 10\times 0{,}5^n + n - 5$$

Exercice 6950

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = 9\times 2^n - u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Exercice 3292

On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice réservé 5801

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{n\cdot u_n + 1}{2(n+1)} \quad \text{pour tout entier } n\in\mathbb{N}^*$$

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$u_n = \frac{1 + (0{,}5)^n}{n}$$

Exercice 3438

Pour $x\neq 1$, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Exercice 3425

Etablir la propriété suivante, à l'aide d'un raisonnement par récurrence pour tout $n\geqslant 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 6152

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$w_0 = 1 \quad ; \quad n\cdot w_n = (n+1)\cdot w_{n-1} + 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence qu'on a la relation suivante pour tout entier naturel n non-nul :

$$w_{n+1} - w_n = 2$$

Exercice réservé 4307

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 1 \quad ; \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} \quad \text{pour } n\geqslant 0.$$

Démontrer par à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot u_n + 1$$

Exercice 4645

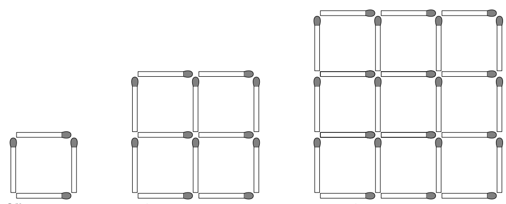
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - 2n + 11 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. A l'aide du logiciel de votre choix, tracer le nuage de points associé au 15 premiers termes de cette suite.
2. Faire une conjecture quant à la nature de la courbe passant par ces points.
3. A l'aide de trois points choisis de cette courbe, déterminer l'expression de la fonction f réalisant l'égalité ci-dessous pour les trois abscisses de ces points :
   $u_n = f(n)$
4. Etablir, par récurrence, l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de leur rang n.

Exercice 6133

On considère les constructions suivantes :



1^{er} étape $\quad$ $2^{\text{ième}}$ étape $\quad$ $3^{\text{ième}}$ étape

On note (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ où u_n représente le nombre d'allumettes nécessaire à la construction de la $n^{\text{ième}}$ étape.

1. Déterminer une relation de récurrence entre un terme de la suite (u_n) et de son prédécesseur.
2. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression :
   $u_n = 2\cdot n^2 + 2\cdot n$

5. Récurrence - problèmes :

Exercice 3290

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$
On admet les propriétés suivantes de la fonction f :

- La fonction f est croissante sur $[1\,;2]$
- Si $x \in [1\,;2]$, alors on a $f(x) \in [1\,;2]$

On définit la suite (v_n) définie par :
$v_0 = 2 \quad ; \quad v_{n+1} = f(v_n) \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etablir, par des raisonnements par récurrence, les deux propriétés suivantes de la suite (v_n) :

1. Pour tout entier naturel n : $\quad 1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
2. Pour tout entier naturel n : $\quad v_{n+1} \leqslant v_n$.

Exercice réservé 5733

On considère que la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n} \text{ pour tout entier naturel } n$$
On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel, on a : $\quad u_n > 1$.
2. a. Etablir que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$$
   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 3279

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\,;y_n)$ de la façon suivante :
$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8 \cdot x_n - 0{,}6 \cdot y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6 \cdot x_n + 0{,}8 \cdot y_n \end{cases}$$
Pour tout entier naturel n, montrer que le point A_n appartient au cercle de centre O et de rayon 5.

Exercice 5736

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n + \frac{1}{3} \cdot n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$u_n \leqslant n+3$
   b. Démontrer que pour tout entier ntaurel n :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \cdot (n+3-u_n)$$
   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

Exercice 3423

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:
$$w_0 = 1 \quad ; \quad n \cdot w_n = (n+1) \cdot w_{n-1} + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Compléter le tableau de valeurs de la suite (w_n) ci-dessous :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
1						

2. a. Faire une conjecture quant à la nature de la suite (w_n) et ses caractéristiques.
   b. Ecrire la relation de récurrence donnant $n \cdot w_n$ pour le rang $(n+1)$.
   c. Etablir, par un raisonnement par récurrence, que la suite (w_n) est arithmétique ; on précisera les éléments caractéristiques de cette suite.

Exercice réservé 3419

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot u_{n-1} + \frac{6}{n} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. a. Calculer u_1.
   b. Les valeurs de u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11} sont respectivement égales à :
   45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
   A partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\quad d_n = u_{n+1} - u_n$.
2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = 4n^2 + 12n + 5$
4. Valider la conjecture émise à la question 1. b. .

Exercice réservé 6041

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul n définie par :
$$u_1 = 7 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot u_n - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

1. Soit (v_n) la suite définie par :
$v_n = \dfrac{u_n}{n} \quad$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. En déduire une expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n.

6. Récurrence forte :

Exercice 6203

On considère la suite définie par les relations :
$u_0=3 \quad ; \quad u_1=8 \quad ; \quad u_{n+1}=5{\cdot}u_n-6{\cdot}u_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

1. Déterminer les valeurs des termes u_2 et u_3.
2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n non-nul, on a :
$u_n = 2^n + 2\times3^n$

Exercice 6867

On considère la suite $\big(u_n\big)$ définie pour tout entier naturel n par :
$u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = 4{\cdot}u_n - 4{\cdot}u_{n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que les termes de la suite $\big(u_n\big)$ admettent pour expression :
$u_n = n{\cdot}2^n$

Exercice 3439

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k{\cdot}k^2 = (-1)^n{\cdot}\sum_{k=1}^{n}k$$

7. Limites et récurrences :

Exercice réservé 5814

On considère la suite définie par les relations :
$u_0=3 \quad ; \quad u_1=8 \quad ; \quad u_{n+1}=5{\cdot}u_n-6{\cdot}u_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

1. Déterminer les valeurs des termes u_2 et u_3.
2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n non-nul, on a :
$u_n = 2^n + 2\times3^n$
3. Déterminer la limite de la suite $\big(u_n\big)$.

Exercice réservé 5819

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{2{\cdot}x+1}$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Justifier que la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$

Partie B

On considère la suite $\big(u_n\big)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{u_n+2}{2{\cdot}u_n+1} \text{ pour tout entier } n\in\mathbb{N}$$

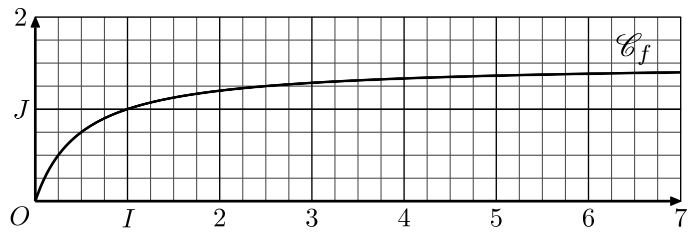
1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n, on a l'encadrement :
$\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$
2. a. Etablir que pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n+1}{2{\cdot}u_n+1}$$
   b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n-1 a le même signe que $(-1)^n$.

Exercice réservé 5748

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation suivante :

$$f(x) = \frac{3{\cdot}x}{1+2{\cdot}x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ dont la représentation est donnée ci-dessous :



1. a. Justifier que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$.
   c. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   d. On considère la droite (d), première bissectrice du plan, d'équation $y=x$. Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (d).
2. On considère la suite $\big(u_n\big)$ définie par les relations :
$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3{\cdot}u_n}{1+2{\cdot}u_n}$$
   a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, qu'on a l'encadrement suivant :
   $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ pour tout entier naturel n.
   b. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'égalité suivante :
   $$u_n = \frac{3^n}{3^n+1} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$
   c. En déduire la limite de la suite $\big(u_n\big)$.

Exercice 3583

On définit les suites réelles $\big(u_n\big)_{n\geqslant0}$ et $\big(v_n\big)_{n\geqslant0}$ par :

$u_0 = 2$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\left\{\begin{aligned} u_{n+1} &= \dfrac{{u_n}^2+5}{2 \cdot u_n} \\ v_n &= \dfrac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}} \end{aligned}\right.$

On admet que les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$. C'est à dire qu'on a pour tout entier naturel n :

$u_n \neq 0$; $v_n \neq -\sqrt{5}$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $v_{n+1} = {v_n}^2$. En déduire la relation : $v_n = {v_0}^{(2^n)}$ pour tout $n \geqslant 0$.

2. Montrer que $v_0 = \dfrac{-1}{(2+\sqrt{5})^2}$ et en déduire la majoration : $|v_0| \leqslant \dfrac{1}{16}$.

   Déterminer alors la limite de la suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$, puis celle de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3420

On définit :

- la suite (u_n) par :
$$\left\{\begin{aligned} u_0 &= 13 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{4}{5} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{aligned}\right.$$
- la suite (S_n), pour tout entier naturel n, par :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.

   En déduire la limite de la suite (u_n).

2. a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

   b. Calculer S_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 5831

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 1$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} \cdot u_n + n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n = \frac{25}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} \cdot n - \frac{21}{4}$$

2. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel n par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

3. On considère la suite (L_n) définie par :
$$L_n = \frac{S_n}{n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$
   Déterminer la valeur de la limite de la suite (L_n).

Exercice réservé 3708

1. Soient les suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

   $u_0 = 1$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\left\{\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - 2 \\ v_n &= 2^{u_n} \end{aligned}\right.$

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Déterminer ses éléments caractéristiques.

   b. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

   Etablir la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} S_n = \frac{8}{3}$

2. On définit la suite (x_n) définie par :

   $x_0 = 0$; $x_{n+1} = \dfrac{1}{2} x_n + \dfrac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :
$$x_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{3}{2^n}$$

   b. En déduire une expression simple de x_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (x_n).

Exercice réservé 3424

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$\left\{\begin{aligned} & u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ & u_{n+2} = \frac{4}{3} \cdot u_{n+1} - \frac{1}{3} \cdot u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}\right.$$

1. Déterminer la valeur exacte des cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

   $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.

   a. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

   b. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique ; on précisera ses éléments caractéristiques.

3. Par un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n = \frac{3}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

4. En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} u_n$.

Exercice réservé 6905

Partie A :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{6} \\ v_0 &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{9}{10} \cdot u_n + \frac{2}{5} \cdot v_n \\ v_{n+1} &= \frac{1}{10} \cdot u_n + \frac{3}{5} \cdot v_n \end{aligned}\right. \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

   $w_n = u_n - 4 \cdot v_n$

   a. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.

   b. En déduire une expression des termes de la suite (w_n) en fonction de n.

2. a. Etablir, pour tout entier naturel n, l'égalité :
$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{10} \cdot w_n$$

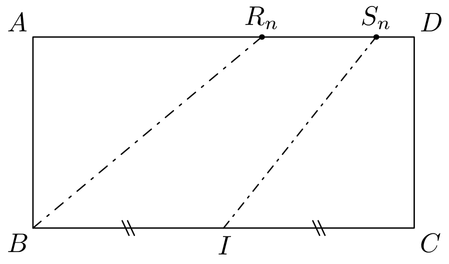
   b. Etablir par récurrence, l'identité suivante pour tout entier naturel n :
$$v_n = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

On admet pour le reste de l'exercice que la suite (u_n) est convergente et que : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$

Partie B

On souhaite partager un gâteau de forme rectangulaire représenté ci-dessous par le quadrilatère $ABCD$ tel que :

$AB = 1\,cm \quad ; \quad AD = 2\,cm.$



On définit la suite de points (R_n) et (S_n) sur le segment $[AD]$ par les relations vectorielles :

$\overrightarrow{AR_n} = u_n \cdot \overrightarrow{AD} \quad ; \quad \overrightarrow{DS_n} = v_n \cdot \overrightarrow{DA}$

Le point I est le milieu du segment $[BC]$.

1. Déterminer les aires des polygones AR_0B, R_0BIS_0 et IS_0DC.

2. On note R et S respectivement les positions limites des suites de points (R_n) et (S_n).

   a. Déterminer les aires des polygones ARB et $ISDC$.

   b. Quelle particularité représente ce découpage du gâteau?

8. Suites et probabilités :

Exercice 6202

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

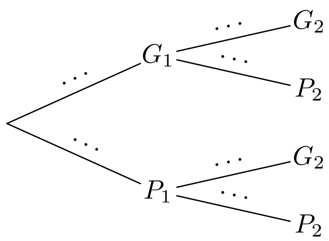
Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : "*Pierre gagne la n-ième partie*".
- P_n : "*Pierre perd la n-ième partie*".

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $p_n = \mathcal{P}(G_n)$.

1. Etudions les deux premières parties :

   a. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :

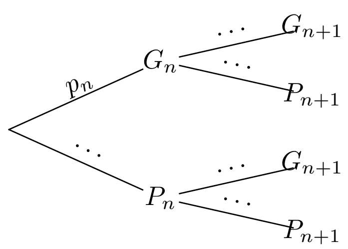


   b. Déterminer la probabilité de l'évènement G_2.

   c. Sachant que Pierre a gagné la seconde partie, quelle est la probabilité que ce soit Claude qui ait gagné la première partie?

2. Continuons à étudier les parties entre Pierre et Claude :

   a. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



   b. En déduire la relation :

   $p_{n+1} = 0{,}5 \times p_n + 0{,}2 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non-nul par la relation : $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

   c. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

   d. En déduire une expression des termes de la suite (v_n), puis des termes de la suite (p_n) en fonction de n.

   e. Déterminer la limite de (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

   f. Quelle interprétation peut-on donner de la valeur de la limite de la suite (p_n) relativement à l'énoncé de l'exercice?

Exercice 6813

Dans un espace probabilisé $(\Omega\,;\mathcal{P})$. On considère une suite d'évènements (A_n) vérifiant les relations suivantes :

$$\mathcal{P}(A_0) = 0{,}4 \;\; ; \;\; \begin{cases} \mathcal{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 0{,}6 \\ \mathcal{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0{,}4 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On note : $p_n = \mathcal{P}(A_n)$.

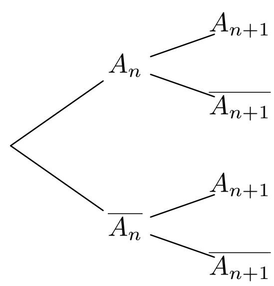
1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

2. Etablir que :

   $p_{n+1} = 0{,}2 \cdot p_n + 0{,}4$

3. Démontrer par récurrence que les termes de la suite (p_n) admettent pour tout entier naturel n :

   $p_n = -0{,}1 \times 0{,}2^n + 0{,}5$



9. Un peu plus loin: raisonnement par récurrence :

Exercice réservé 3287

On considère la suite $\big(u_n\big)$ définie par :

$$u_n=\frac{n^{10}}{2^n} \qquad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{10}\leqslant 1{,}9$$

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier nateurel n supérieur ou égal à 16, on a l'encadrement suivant :

$$0\leqslant u_n\leqslant 0{,}95^{n-16}\cdot u_{16}$$

Exercice réservé 6206

Etablir à l'aide d'un raisonnement par récurrence que l'égalité ci-dessous est vérifiée pour tout entier naturel n non-nul :

$$1^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3=2{\cdot}n^4-n^2$$

Exercice réservé 3440

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul, on a la propriété suivante :

$$\big(1+x\big)^n\geqslant 1+n{\cdot}x$$

Exercice réservé 3478

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\Big(\sum_{k=1}^{n}k\Big)^2$$

Exercice 6037

On considère les deux suites $\big(u_n\big)$ et $\big(v_n\big)$ définies pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}k \quad ; \quad v_n=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

1. Etudier la suite $\big(w_n\big)$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :
$$w_n=\frac{v_n}{u_n}$$

2. En déduire une expression de la suite $\big(v_n\big)$ en fonction de n.

255. Partage :

Exercice 9009

Soit n un entier naturel.

1. On considère la proposition suivante écrite "au rang n" :

   P_n : "Le nombre de cordes reliant n points distincts d'un cercle est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$" avec $n\geqslant 2$;

   a. Écrire cette proposition au premier rang n_0, puis indiquer si elle est vraie pour ce rang n_0.

   b. Écrire la proposition au rang $n+1$.

   c. On suppose cette proposition est vraie pour **un** rang $n\geqslant n_0$.
   Démontrer qu'elle est encore vraie au rang $n+1$.

2. Soit un réel $a>0$.

   On considère maintenant la proposition suivantes :
   - Q_n : "$(1+a)^n\geqslant 1+na$" avec $n\geqslant 0$;
   - R_n : "$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$" avec $n\geqslant 1$.

   Reprendre les questions précédentes pour chacune de ces propositions.

255. Exercices non-classés :

Exercice réservé 3443

Faire comme l'exercice du fichier "DS 04 pp" pour l'exercice 4

Exercice réservé 3444

voir pourquoi la suite

$u_0=3$

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}\cdot\Big(u_n+\frac{2}{u_n}\Big)$$

est alternee autour de 1

Exercice 6952

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

- **Question 1**

  On considère la suite $\big(u_n\big)$ définie par :
  $$u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1}=2{\cdot}u_n+2{\cdot}n+1$$

  Affirmation :

  La suite $\big(u_n\big)$ est une suite géométrique.

- **Question 2**

  On considère la suite $\big(u_n\big)$ définie par :
  $$u_0=0 \quad ; \quad u_{n+1}=u_n+2{\cdot}n+2$$

  Affirmation :

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = n^2 + n$

- **Question 3**

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 4 et de raison $\frac{1}{2}$.

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
u ← 4
n ← 0
S ← u
Tant que 8−S⩾10^(−2)
     u ← 0,5×u
     n ← n+1
     S ← S+u
Fin tant que
```

Affirmation :

A la fin de l'exécution de l'algorithme, la variable `n` a pour valeur 10.

Exercice réservé 3487

Faire un exercice avec la fonction f definie par $f(x) = (2x+1)/(x+1)$

dont l image de $[1;2]$ est $[1;2]$

$u-n$ est definie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

representer des points de la suite

montrer que pour tout entier nqturel $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

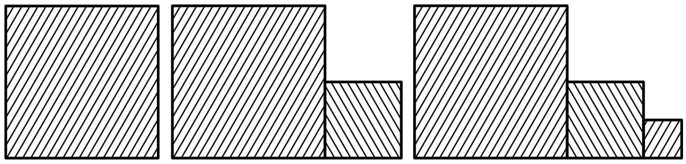
Montrer qu elle converge vers $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Phi - u_{n+1} = \dfrac{\Phi - u_n}{(\Phi+1)(u_n+1)}$

$\Phi - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(\Phi - u_n)$

$\Phi - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

Exercice réservé 4626



Etape n^{o}1 Etape n^{o}2 Etape n^{o}3

Le premier carre fait 4 de cote

1. Donner une relation de recurrence definissant l'aire totale de ces figures :
   $u_{n+1} = u_n + \dfrac{16}{2^{2n}}$
2. Par récurrence, etablir l'égalité suivante :
   $u_n = x\left(1 - y^n\right)$

