Terminale S/Questions de cours, affirmation, qcm

1. Cours - Suites :

Exercice réservé 5741

Soit ℓ un nombre réel. On considère une suite (u_n) qui converge vers ℓ alors le réel ℓ vers lequel converge la suite (u_n) est unique.

Exercice réservé 3281

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

"Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A"

Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$*

Exercice réservé 5496

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant :

- Il existe n_0 tel qu'à partir de n_0, les termes des deux suites : $n \geqslant n_0 \implies v_n \geqslant u_n$
- $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty$

Etablir que : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = +\infty$

Exercice réservé 5497

On considère une suite (u_n) croissante.

Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ finie alors tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à ℓ.

Exercice réservé 5498

1. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout entier naturel n :
   $\mathcal{P}_n$: "pour tout nombre réel x tel que $x > 0$: $(1+x)^n \geqslant 1 + n \cdot x$"
   Cette relation s'appelle l'inégalité de Bernoulli
2. Montrer que pour tout nombre réel q tel que $q \in]1 ; +\infty[$, on a la limite :
   $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = +\infty$

2. Cours - Exponentielle :

Exercice réservé 5499

On admet l'existence d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions : $f' = f \quad ; \quad f(0) = 1$

Montrer que cette fonction f est unique. On la notera exp.

Indications :

Cette démonstration s'effectue en deux étapes :

- On montre que toute fonction vérifiant ces deux conditions ne peut pas s'annuler. Pour cela, on considére la fonction h définie par :
  $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$
  et on montre que la fonction h est constante.
- En supposant qu'il existe deux fonctions f et g vérifiant ces deux conditions, on considère la fonction j définie par : $j(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
  et on montre que la fonction j est constante. Plus précisément que : $j(x) = 1$

Exercice réservé 5500

Etablir les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{n \mapsto -\infty} e^x = 0$

Exercice réservé 3642

Restitution organisée de connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y : $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x : $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n : $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$

Exercice réservé 3657

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Démontrer que : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x \cdot e^{-x} = 0$

3. Cours - Logarithme :

Exercice réservé 3890

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u\circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.

On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et que pour tout x de $\left]0\,;+\infty\right[$, on a :
$$\exp\left(\ln x\right)=x$$

A partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ qui à x associe $\frac{1}{x}$.

Exercice réservé 3963

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$, positive sur $\left[1\,;+\infty\right[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1=0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y, \\ \qquad \ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif } x,\ \left[\ln(x)\right]'=\dfrac{1}{x} \\ \ln(2)\approx 0{,}69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.} \end{cases}$$

On considère la fonction f définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :
$$f(x)=\sqrt{x}-\ln x$$

1. Etudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $\left]0\,;+\infty\right[$.
2. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x>1$:
$$0<\frac{\ln x}{x}<\frac{\sqrt{x}}{x}$$
3. En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

4. Cours - Integrales :

Exercice réservé 5501

Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $\left[a\,;b\right]$, la fonction F définie sur $\left[a\,;b\right]$ par :
$$F\colon x\longmapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
est dérivable sur $\left[a\,;b\right]$ et admet pour dérivée la fonction f.

Exercice réservé 5502

Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$. On admet qu'une fonction positive f définie sur $\left[a\,;b\right]$ admet pour primitive la fonction $x\longmapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

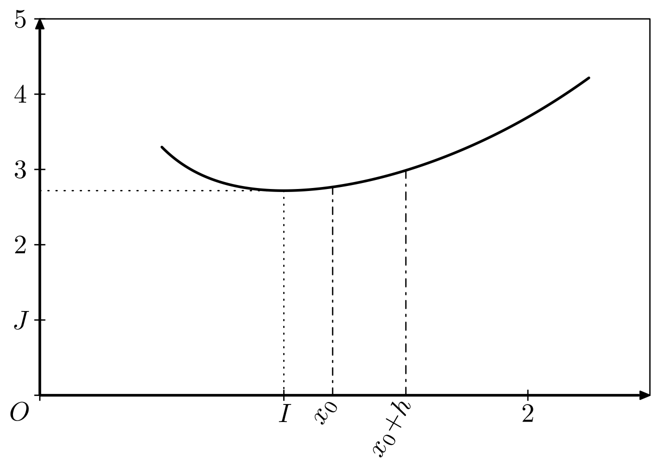
1. Montrer que toute fonction continue sur l'intervalle $\left[a\,;b\right]$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
(On admettra que toute fonction continue sur un intervalle $\left[a\,;b\right]$ fermé admet un minimum).
2. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\left[a\,;b\right]$ admettant la fonction F pour primitive. Montrer que pour toute autre primitive G de la fonction f, il existe un réel k tel que :
$$G(x)=F(x)+k.$$

Exercice réservé 3298

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni. Pour tout réel x_0 de $[1\,;+\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=x_0$.

On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $\left[1\,;+\infty\right[$ est une primitive de f.

1. Que vaut $\mathscr{A}(1)$?
2. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\,;+\infty[$ et h un réel strictement positif.
Justifier l'encadrement suivant :
$$f(x_0)\leqslant\frac{\mathscr{A}(x_0+h)-\mathscr{A}(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)$$
3. Lorsque $x_0>1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h<0$ tel que $x_0+h\geqslant 1$?
4. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$.
5. Conclure.



Exercice réservé 3962

Soit a et b deux réels tels que $a<b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b\left[f(t)+g(t)\right]\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- Si pour tout $t\in[a\,;b]$, $f(t)\geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.

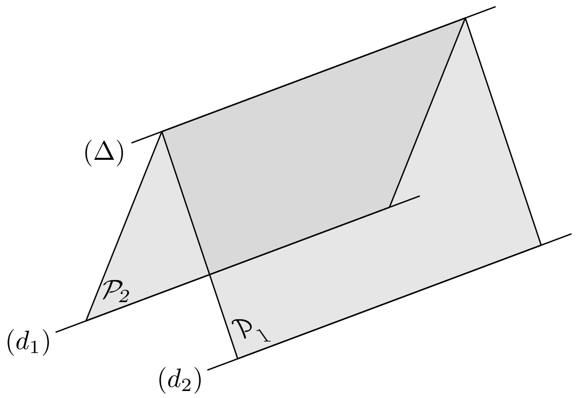
Montrer que : si pour tout $t\in\left[a\,;b\right]$ alors :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Cours - Vecteurs et espaces :

Exercice réservé 5503

Dans l'espace, on considère deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ contenant respectivement les droites (d_1) et (d_2) parallèles entre elles.

Si les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants entre eux alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans.



Exercice réservé 5504

On considère l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé :

1. $(\mathcal{P})$ un plan passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ pour vecteur normal.

   Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ admet pour équation cartésienne l'équation suivante :
   $a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z + d = 0 \quad$ où $d\in\mathbb{R}$.

2. Soit a, b, c, d quatre nombres réels où a, b, c sont tous non-nuls. Montrer que l'ensemble des points vérifiants l'équation cartésienne ci-dessous est un plan de l'espace :
   $a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z + d = 0$

Exercice réservé 5505

Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

6. Cours - Nombres complexes :

Exercice réservé 4101

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z=a+\mathrm{i}{\cdot}b$ où a et b sont deux nombres réels.
On note $\overline{z}$ le nombre complexe défini par : $\overline{z} = a - \mathrm{i}{\cdot}b$

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z' :
   $\overline{z{\times}z'} = \overline{z}{\times}\overline{z}$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z :
   $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

Exercice réservé 3300

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :
  $$\left|z_1{\times}z_2\right| = \left|z_1\right|{\times}\left|z_2\right|.$$
- pour tout nombre complexe z non nul :
  $$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

Exercice réservé 3299

On rappelle les deux résultats suivants :

- Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :
  $$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \quad \text{à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z = r\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big) \\ r > 0 \end{cases}$$
- Pour tous nombres réels a et b :
  $$\begin{cases} \cos\,(a{+}b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin\,(a{+}b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :

$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

$\arg(z_1z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$ à 2π près.

Exercice réservé 3301

On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a :
$|z| = \|\vec{w}\| \quad ; \quad \arg(z) = \left(\vec{u}\,;\,\vec{w}\right)$ à 2π près.

Prérequis : on sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :
$\arg(z{\cdot}z') = \arg(z) + arg(z')$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :
$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Exercice réservé 3849

Le plan complexe est rapporté au repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

On rappelle que :

" Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a :
$|z| = \|\overrightarrow{w}\|$; $\arg(z) = (\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{w})$ ".

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

1. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = (\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{MP})$

2. Interpréter géométriquement le nombre : $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

Exercice réservé 6812

Restitution organisée de connaissance

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\cdot y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe définie par : $\overline{z} = x - \mathrm{i}\cdot y$

Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 : $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul : $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

7. Cours - Probabilités :

Exercice réservé 3778

Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indérpendants pour la probabilité p si, et seulement, si :
$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire :

1. Démontrer que : $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B \cap A) + \mathcal{P}(B \cap \overline{A})$

2. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

Exercice réservé 4267

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle λ où λ est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, on a :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant t) = \int_0^t \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x$$
La fonction R définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
$R(t) = \mathcal{P}(\mathcal{X} > t)$
est appelée fonction de fiabilité.

1. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$

2. Démontrer que la variable $\mathcal{X}$ suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $\mathcal{P}_{\mathcal{X}>t}(\mathcal{X} > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

Exercice réservé 4318

Soit $\mathcal{X}$ une variable aéatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ *(λ strictement positif)*, c'est-à-dire que la probabilité s'exprime par :
$$F(t) = \mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant t) = \mathcal{P}([0\,;\,t]) = \int_0^t \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x$$
Restitution organisée de connaissances :

Pré-requis :

- $\mathcal{P}_B(A) = \dfrac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$ où A et B sont deux évènements tels que $\mathcal{P}(B) \neq 0$;
- $\mathcal{P}(\overline{A}) = 1 - \mathcal{P}(A)$ où A est un évènement ;
- $\mathcal{P}([a\,;b]) = F(a) - F(b)$ où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$.

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s, on a :
$$\mathcal{P}_{[t\,;+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)}$$
et que $\mathcal{P}_{[t\,;+\infty[}([t\,;\,t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

Exercice réservé 5506

On considère un espace probabilisé $(\Omega\,;\mathcal{P})$.

Soit A et B deux évènements indépendants. Montrer que les évènements $\overline{A}$ et B sont égalements indépendants.

Exercice réservé 5507

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. L'espérance de cette variable aléatoire a pour valeur :
$$E(\mathcal{X}) = \lim_{x \mapsto +\infty} \int_{-x}^{x} t \cdot \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

Exercice réservé 5508

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tout réels t et h positifs, on a l'égalité :
$\mathcal{P}_{(\mathcal{X} \geqslant t)}(\mathcal{X} \geqslant t+h) = \mathcal{P}(\mathcal{X} \geqslant h)$

Exercice réservé 5509

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(0\,;1)$. Pour tout nombre réel $\alpha \in \left]0\,;1\right[$, il existe un unique réel positif u_α tel que :
$$\mathcal{P}(-u_\alpha \leqslant \mathcal{X} \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Exercice réservé 5510

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]0\,;1\right[$ et $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite *($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$)*.
On note u_α l'unique réel positif vérifiant l'égalité :
$\mathcal{P}(-u_\alpha \leqslant \mathcal{Z} \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$

Soit $\mathcal{X}_n$ une variable suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$. Considérons la variable aléatoire $F_n=\dfrac{\mathcal{X}_n}{n}$ associée à la fréquence du succès.

Etablir la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}\Big(p-u_\alpha\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant F_n\leqslant p+u_\alpha\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\Big)=1-\alpha$$

8. Questions de cours après 2012 (nouveau programme) :

Exercice réservé 6247

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Montrer que pour tous réels positifs t, on a l'égalité :
$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}\geqslant t)}\big(\mathcal{X}\geqslant t+h\big)=\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant h\big)$

Exercice réservé 6250

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z=x+\text{i}\cdot y$ où $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z}=x-\text{i}\cdot y$.

Démontrer que :

1. Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 : $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
2. Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non-nul : $\overline{z^n}=\big(\,\overline{z}\,\big)^n$

Exercice réservé 6070

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et $\mathcal{X}_n$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $\mathcal{F}_n=\dfrac{\mathcal{X}_n}{n}$ et f la valeur prise par f la valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n asser grand, l'intervalle $\Big[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\Big[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

9. Cours - Raisonnement par l'absurde :

Exercice réservé 3282

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $\big]0\,;+\infty\big[$ et tel que $\lim\limits_{x\mapsto0}g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}g(x)=+\infty$.

On admet que l'on peut définir sur $\mathbb{N}$ une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n)=n$, et que cette suite est strictement croissante.

Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

10. Cours - ancien programme : Suites :

Exercice réservé 3291

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et u_n-v_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a :
$u_n\leqslant v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

"*Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite*".

Exercice réservé 3445

On considère les trois suites $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(v_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(w_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les conditions suivantes :

- Les deux suites $\big(v_n\big)$ et $\big(w_n\big)$ convergent vers un nombre réel ℓ.
- A partir d'un rang n_0 et pour tout entier n supérieur à n_0, on a :
  $v_n\leqslant u_n\leqslant w_n$

Montrer que la suite $\big(u_n\big)$ est convergente et, plus précisément, qu'on a la limite suivante :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=\ell$

Exercice réservé 3475

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si $\big(u_n\big)$ et $\big(v_n\big)$ sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

- **Définition :**
Deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.
- **Propriété 1 :**
Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel :
$u_n \leqslant v_n$.
- **Propriété 2 :**
toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

11. Cours - ancien programme : Exponentielles et logarithmes :

Exercice réservé 3280

Restitution organisée des connaissances

Pré-requis :
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$;
Sa fonction dérivée est la fonction inverse : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$

Démontrer que pour tous réels strictement positifs α et x :
$\ln(\alpha x) = \ln(\alpha) + \ln(x)$

12. Cours - ancien programme : Equations différentielles :

Exercice réservé 3283

Pré-requis :

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions :
$x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\lambda x}$
où C est une constante réelle.

1. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'_λ) : $z' = -(\lambda z + 1)$
telle que $z(0) = 1$
2. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

Exercice réservé 3284

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \dfrac{1}{16}\cdot y$

1. On sait que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto K\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.
2. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

13. Cours - ancien programme : Espaces :

Exercice réservé 3906

Soit D le point de coordonnées $(x_D\,;y_D\,;z_D)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c{\cdot}z+d=0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.

Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par :
$$d(D,\mathcal{P}) = \frac{|a{\cdot}x_D + b{\cdot}y_D + c{\cdot}z_D + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exercice réservé 4090

Soit a, b, c et d des réels tels que : $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c{\cdot}z+d=0$.

On considère le point I de coordonnées $(x_I\,;y_I\,;z_I)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a\,;b\,;c)$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathscr{P}$ est égale à :
$$\frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan

$\mathscr{P}$.
Déterminer, en fonction de a, b, c, x_I, y_I et z_I, un système d'équations paramétriques de Δ.

2. On note H le point d'intersection de Δ et $\mathscr{P}$.

a. Justifier qu'il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{IH}=k\cdot\overrightarrow{n}$.

b. Déterminer l'expression de k en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I.

c. En déduire que : $IH=\dfrac{|a\cdot x_I+b\cdot y_I+c\cdot z_I|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

14. Cours - ancien programme : Probabilités :

Exercice réservé 4014

Restitution organisée de connaissances :

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

Soient les deux intégrales définies par :

$$I=\int_0^{\pi} e^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \quad ; \quad J=\int_0^{\pi} e^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$$

1. Démontrer que : $I=-J$; $I=J+e^{\pi}+1$

2. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Exercice réservé 4172

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p\leqslant n$ alors :

$$\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Démontrer que pour tout nombre entier nqturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1\leqslant p\leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$$

15. Cours - ancien programme : Intégrations :

Exercice réservé 3996

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\,;b]$ de I.

16. Cours - ancien programme : Nombres complexes :

Exercice réservé 3853

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C alors :
   - $\left|\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\dfrac{CB}{CA}$
   - $\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$

2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
   $z=e^{i\cdot\theta}$ si, et seulement si, $|z|=1$ et $\arg(z)=\theta+2\cdot k\cdot\pi$ où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point m d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z'-\omega=e^{i\cdot\omega}\cdot(z-w)$$

17. Affirmation :

Exercice réservé 6907

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse
Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
  $f(x)=\dfrac{3}{4+6\cdot e^{-2x}}$
  - **Affirmation 1 :** L'équation $f(x)=0{,}5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
  - On considère l'algorithme :


```
X ← 0
Y ← 3/10
Tant que Y<0,5
    X ← X+0,01
    Y ← 3/(4+6·e^(-2X))
Fin Tant que
```

Affirmation 2 : A la fin de l'exécution de cet algorithme, la variable X a pour valeur 0,54 :

- Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
  Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
  Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.

  ➩ **Affirmation 3 :** Zoé utilise la voiture un jour sur deux.

- Dans l'ensemble des E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B.

  ➩ **Affirmation 4 :** Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

- Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de 700 personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

  On admet que le fait qu'une personne accepte de répondre ou pas est indépendant des autres personnes interrogés et que la probabilité qu'elle accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

  ➩ **Affirmation 5 :** La probabilité d'avoir au moins 400 personnes qui ont répondu à la question a une probabilité de 0,93 arrondie au centième près.

255. Exercices non-classés :

Exercice réservé 6362

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B.

"*Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.*"

