Terminale S/Logarithmes

1. Introduction :

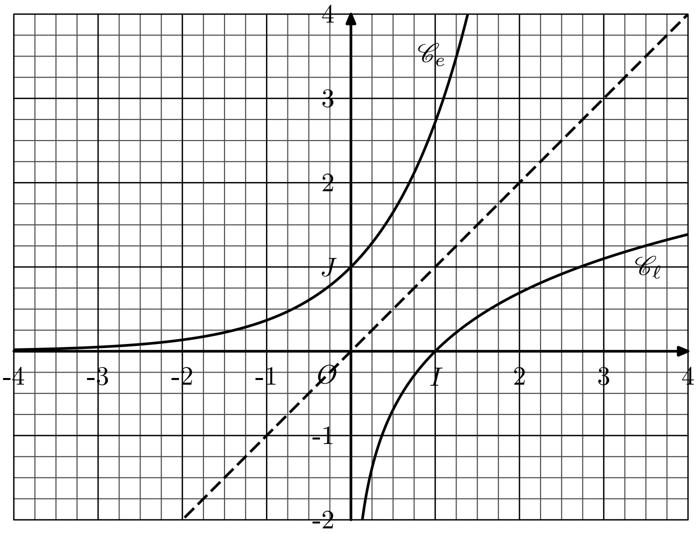
Exercice 3709

Soit f la fonction définie par sur $[0\,;1]$:
$f(x)=x-2\sqrt{x}+1$

Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$:
$(f\circ f)(x)=x$

Exercice 3877

Dans le plan munit du repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_e$ et $\mathscr{C}_\ell$ représentatives des fonctions exponentielle et logarithme :



1. Graphiquement déterminer les valeurs des deux images suivantes :
$(\exp\circ\ln)(1)$; $(\ln\circ\exp)(0)$

2. En utilisant la première bissectrice du plan, déterminer, si possible, la valeur des images suivantes :
   a. $(\exp\circ\ln)(2)$
   b. $(\exp\circ\ln)(3)$
   c. $(\exp\circ\ln)(-1)$
   d. $(\ln\circ\exp)(-1)$
   e. $(\ln\circ\exp)(1)$
   f. $(\ln\circ\exp)(1{,}5)$

Exercice réservé 3878

Résoudre les équations suivantes :

a. $e^x=3$ b. $e^{3x-1}=4$ c. $2\cdot e^x=-2$

d. $\ln(x)=2$ e. $\ln(2\cdot x+1)=5$ f. $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right)=3$

Exercice 3879

1. a. Résoudre chacune des inéquations suivantes :
$3x+1>0$; $-x+2>0$
   b. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g :
$f(x)=\ln(3x+1)$; $g(x)=\ln(-x+2)$

2. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :
   a. $h(x)=\ln x^2$
   d. $j(x)=\ln\left(e^x-1\right)$
   e. $k(x)=\ln\left(e^x-e^{-x}\right)$
   f. $\ell(x)=\dfrac{1}{\ln(x)-1}$

2. Manipulations algébriques :

Exercice 3880

Exprimer chacun des nombres suivants à l'aide de $\ln 2$:

a. $\ln(4)$ b. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$ c. $\ln(6)-\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

d. $\ln\left(2\cdot e^2\right)$ e. $\ln\left(\dfrac{2}{e^3}\right)$ f. $\ln\left(\sqrt{e^5}\right)$

Exercice réservé 3881

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\ln\left(e^{2\cdot x}\right)$ b. $\ln\left(2\cdot e^{3x-1}\right)$

c. $2\cdot\ln x+\ln x$ d. $\ln(x+1)-\ln(x-1)$

Exercice 6874

Etablir les égalités suivantes :

a. $\ln(16)+\ln(4)=6\cdot\ln 2$ b. $\ln\left(\dfrac{7}{5}\right)=-\ln\left(\dfrac{5}{7}\right)$

c. $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)-\ln\left(\dfrac{9}{8}\right)=\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$ d. $\dfrac{\ln\left(\sqrt{8}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)}=3$

Exercice 6875

On considère la fonction f définie par :
$f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Sur $\mathbb{R}$, établir l'identitié : $f(x)=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$
3. En déduire que la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6876

1. Que peut-on dire de l'image de deux nombres opposés par la fonction exponentielle?
2. Que peut-on dire de l'image de deux nombres inverses

par la fonction logarithme?

Exercice 3882

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

1. On considère la fonction u définie par :
$$u(x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
Par une disjonction de cas, établir que la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Etablir que la fonction f est la fonction nulle.

Exercice 5174

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par : $f(x)=x+\mathrm{e}^{-x}$

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :
$$u_1=0\quad ;\quad u_{n+1}=f(u_n)=u_n+\mathrm{e}^{-u_n}$$

On admet que pour tout nombre x positif, on a la relation :
$$\ln(1+x)\leqslant x$$

1. En déduire que, pour tout entier naturel n non-nul :
$$\ln(n+1)\leqslant \ln(n)+\frac{1}{n}$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$f\big[\ln(n)\big]=\ln(n)+\frac{1}{n}$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non-nul :
$$\ln n\leqslant u_n$$

4. En déduire la limite de la suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$.

3. Equations et inéquations de logarithmes :

Exercice 3883

Pour chaque question, préciser l'ensemble de résolution de l'équation puis la résoudre :

a. $\ln(5x+1)=\ln(x-1)$ b. $2\cdot\ln(3-x)=\ln(2)$

c. $\ln(3x+1)=5$ d. $3\cdot\mathrm{e}^{2x-1}=2$

e. $\left(\ln x\right)^2-\ln x-2=0$ f. $\mathrm{e}^{2x}+4\cdot\mathrm{e}^{x}-1=0$

Déterminer l'ensemble de résolution de chacune de ces inéquations puis les résoudre :

a. $\ln(x)>9$ b. $\ln(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$

c. $\left(\ln x\right)^2-3\cdot\ln x+1\geqslant 0$ d. $-\left(\ln x\right)^2+4\cdot\ln x+1\geqslant 0$

e. $\mathrm{e}^{3\cdot x}<0$ f. $\mathrm{e}^{2\cdot x}-\mathrm{e}^{x}-6>0$

Exercice 3884

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les deux systèmes d'équations suivants :

a. $\begin{cases}2\cdot\ln x-3\cdot\ln y=-11\\ \ln x+\ln y=2\end{cases}$ b. $\begin{cases}\ln(2\cdot x+y)=0\\ \ln(x)+\ln(y)=1\end{cases}$

Exercice 5899

1. Résoudre dans $\left]-1\,;+\infty\right[$, l'inéquation :
$$(E):\quad \ln(x+1)\leqslant\ln\left(x^2+1\right)$$

2. Résoudre dans $\left]-3\,;2\right[$, l'inéquation :
$$(F):\quad \ln(4-2x)<\ln(x+3)$$

Exercice réservé 5897

On considère l'inéquation : $(E):\quad \ln(x+1)\leqslant\ln(2-x)$

1. Donner la plus grande partie I de $\mathbb{R}$ sur laquelle les deux expressions $\ln(x+1)$ et $\ln(2-x)$ sont définies.

2. Résoudre l'inéquation (E).

Exercice réservé 3885

Exercice 4192

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules :
75 % de particules A et 25 % de particules de B.

Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t=0$, on a $p(0)=0{,}75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a :
$p(t)=0{,}75\cdot\mathrm{e}^{-\lambda\cdot t}$ où λ est une constante réelle.

La demi-vie des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.

2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B?

3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B *(on arrondi à l'unité)*.

4. Equation et inéquation de puissances :

Exercice 3886

Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, les inéquations suivantes :

a. $5^n\geqslant 2$ b. $0{,}1^n\geqslant 2$

c. $\left(\ln 2\right)^n<\mathrm{e}^2$ d. $\ln\left(2^n\right)-\ln\left(3^n\right)\leqslant 2$

Exercice 5898

1. On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{2}{3}$.
   a. Quelle est la limite de la suite (u_n)?
   b. Déterminer le plus petit entier naturel n réalisant l'inégalité:
   $u_n < 0{,}01$
2. On considère la suite (v_n) géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{4}{5}$. On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (v_n) :
   $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
   a. Justifier que la suite (S_n) est croissante.
   b. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.
   c. Justifier qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (S_n) appartiennent à l'intervalle $[9{,}9\,;10]$.
   d. Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant $S_n \in [9{,}9\,;10]$.

Exercice 3288

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par:

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$$

1. Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.
2. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha)=1{,}9$.
3. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que: $n_0-1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a:
   $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1{,}9.$

Exercice 5204

Une entreprise fabrique des articles. Suite à une série de contrôle, un article est détecté possédant au moins un défaut avec une probabilité de 0,0494.

Un petit commerçant passe une commande d'articles à cette entreprise. Les stocks sont suffisamment grand pour que le choix de ces articles soit assimilé à un tirage successif et indépendant.

1. En commandant 25 articles, calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.
2. Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

5. Limites :

Exercice 3888

Déterminer la valeur des limites suivantes:

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2\cdot\ln x + x$

b. $\lim\limits_{x\mapsto-3^+} \ln(x+3) - 3\cdot x$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \ln(x) - \frac{1}{x}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln\left(e^x+1\right)$

e. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} e^{-2\cdot\ln x+1}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln\left(x^2-x\right)$

6. Limites par croissance comparée :

Exercice réservé 3889

Déterminer les limites suivantes:

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x\cdot\ln x$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \ln(x)\cdot(x^2+2)$

e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{x-2}{\ln x}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

7. Dérivées :

Exercice 3887

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes:

a. $f(x) = x\cdot\ln x$

b. $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2+1}$

c. $h(x) = \ln\left(\sqrt{1-x}\right)$

d. $j(x) = \ln\left(e^x-1\right)$

Exercice 5148

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x)=x^2\cdot\ln x$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$

2. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe $\mathscr{C}$ passant par O. Préciser une équation de cette tangente.

8. Etudes de fonctions :

Exercice réservé 4971

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :
   $g(x)=2+\dfrac{2}{x^2}\cdot\big(\ln x-1\big)$

   Démontrer que la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :
   $f(x)=x^2+\big(\ln x\big)^2$

   a. Déterminer l'expression de la dérivée f', puis de la dérivée seconde f'' de la fonction f.

   b. Démontrer que la fonction f admet un unique minimum sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice réservé 4316

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{\big(\ln x\big)^2}{x}$$

1. Etablir la relation : $g(x)=4\cdot\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

2. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

3. a. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Exercice réservé 3897

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\big)$. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :
$f(x)=-3-\ln x+2\cdot(\ln x)^2$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. a. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation : $f(x)=0$.
   (On pourra poser : $\ln x=X$).

   b. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation : $f(x)>0$.

2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   b. Calculer $f'(x)$.

   c. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.

4. On se propose d'étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$. Pour cela, on considère la fonction φ, définie sur $]0;+\infty[$ par :
   $\varphi(x)=f(x)-\left(4\cdot e^{-\frac{5}{4}}\cdot x-\dfrac{41}{8}\right)$

   a. Montrer que : $\varphi'(x)=\dfrac{4\cdot\ln x-1}{x}-4\cdot e^{-\frac{5}{4}}$
   puis calculer $\varphi''(x)$.

   b. Etudier le sens de variation de φ' sur $]0;+\infty[$.
   En déduire que, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a : $\varphi'(x)\leqslant 0$.

   c. Calculer $\varphi\Big(e^{\frac{5}{4}}\Big)$. Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, déterminer le signe de $\varphi(x)$.
   En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.

5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{T})$. *(unité graphique : 2 cm)*

Exercice réservé 5963

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I=]-2;+\infty[$ par : $f(x)=1+x\cdot\ln(x+2)$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\big)$.

Partie A : étude de la fonction f

1. Etude des variations de la dérivée f'.

   a. f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]-2;+\infty[$.

   b. Etudier les variations de f' sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

   c. Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.

2. Etude du signe de $f'(x)$.

   a. Montrer que sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0{,}6;-0{,}5]$.

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

3. Etude des variations de f

   a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

   b. Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

Partie B

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $]-2;+\infty[$, on appelle T_{x_0} la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse x_0.

On note, pour x appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$:

$$d(x) = f(x) - \left[f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)\right]$$

1. Etude des variations de d.

   a. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$:
   $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

   b. En utilisant la croissance de la fonction f', donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x. En déduire les variations de d sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.

2. Déterminer la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et de T_{x_0}.

Exercice 5149

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
   $f(x) = x\cdot e^x - 1$

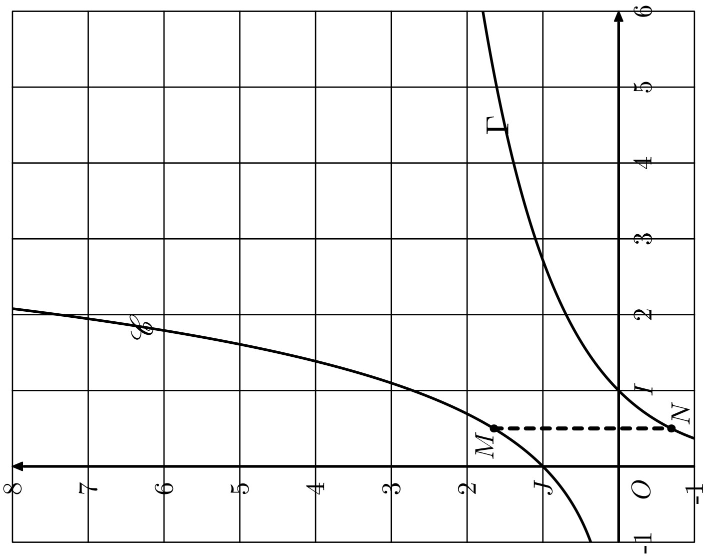
   a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.

   b. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

   c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

   Les courbes $\mathscr{C}_f$ et Γ sont données ci-dessous :



Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.

On rappelle que pour tout réel x strictement positif :
$e^x > \ln(x)$.

   a. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x=\alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur à 10^{-2} près.

   b. En utilisant la question 1., monter que : $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.
   En déduire que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

9. Etude de fonctions avec étude d'une fonction auxiliaire :

Exercice 109

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$$

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :
   $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$
   Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout x de $[1\,;+\infty[$:
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

   b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.

Exercice 5141

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=2x^3-1+2\cdot\ln x$

1. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.

3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.

3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. On prendra comme unités : $2\,cm$ sur l'axe des abscisses et $1\,cm$ sur l'axe des ordonnées.

Exercice réservé 3891

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité graphique $3\,cm$.

I- Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

1. Etudier les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

II- Etude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathscr{C}$

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat?

2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$.

4. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$.

5. Déterminer le point A de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente $\mathcal{T}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.

6. Dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, tracer les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 5959

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = 2x^2 - \left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(x^2+1\right)$

1. En détaillant les calculs effectués, montrer que :
$g'(x) = 2x - 2x\cdot\ln\left(x^2+1\right)$

2. Faire l'étude du sens de variation de g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α, dans l'intervalle $\left[\sqrt{e-1}\,;\sqrt{e^2-1}\right]$, tel que $g(\alpha)=0$; donner l'approximation décimale 10^{-2} près par défaut de α.

4. En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Partie B : Etude de la fonction f

La fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \quad ; \quad f(x)=\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} \quad \text{lorsque } x\neq 0$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$, dans le plan rapporté à un repère d'origine O est donnée ci-dessous :

1. a. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)}{x}=1$.
En déduire que f est dérivale en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

   b. Vérifier que, pour x strictement positif :
$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2\cdot\left(1+x^2\right)}$$
Faire l'étude du sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. a. Montrer que, pour $x\geqslant 1$: $\displaystyle 0\leqslant f(x)\leqslant\frac{\ln\left(2x^2\right)}{x}$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

10. Etude de familles de fonctions :

Exercice réservé 5962

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=\frac{1+2\cdot\ln x}{x^2}$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et soit $(\mathscr{C}')$ celle de la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{1}{x}$.

1. Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f.

2. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on pose :
$g(x)=1-x+2\cdot\ln x$

   a. Etudier les variations de la fonction g.

   b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0\,;2[$ et $]2\,;4[$.
Soit α la solution appartenant $]2\,;4[$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. a. Montrer que $f(x)-\dfrac{1}{x}=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en deux points.

   b. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :
$$0<f(x)\leqslant\frac{1}{x}$$

Partie B

On considère, pour tout entier n supérieure ou égal à 1, la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f_n(x)=\frac{1+2\ln x}{x^{2n}}$$

1. Calculer la dérivée f'_n de la fonction f_n.

2. Résoudre l'équation $f'_n(x)=0$. Soit x_n la solution de cette équation.

3. Déterminer la limite de la suite (x_n).

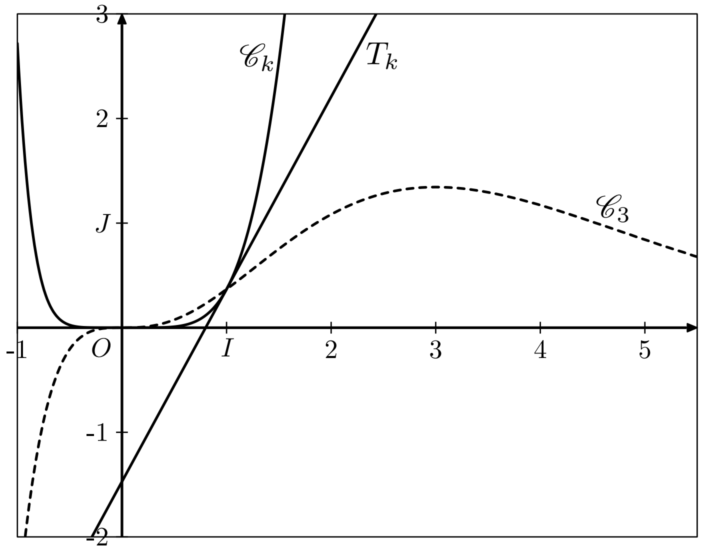
Exercice 5150

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie par :
$f_n(x)=x^n\cdot e^{-x}$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ du plan.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}\,;0\right)$.



1. a. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. Etudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.

   c. A l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2. a. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.

   b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x:
   $f'_n(x) = x^{n-1} \cdot (n-x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4. a. Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\,;0\right)$.

   b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

11. Suites :

Exercice 3925

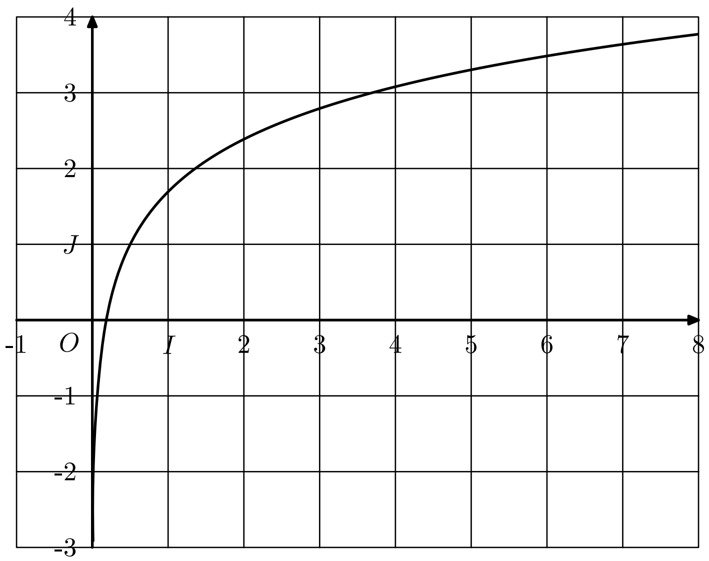
1. On considère la fonction g définie sur $[1\,;+\infty[$ par:
   $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$

   a. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.*
   Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1\,;+\infty[$ une unique solution notée α.

   b. Démontrer que: $\ln\left(2 \cdot \alpha\right) + 1 = \alpha$

2. Soit la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par:
   $u_{n+1} = \ln(2 \cdot u_n) + 1$.

   On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2 \cdot x) + 1$ dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Cette courbe est donnée ci-dessous:



   a. En utilisant la courbe (Γ), construire sur l'axe des abscisses les quatres premiers termes de la suite.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n:
   $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

   c. Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ converge vers α.

Exercice réservé 5861

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par:
$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n:
   $0 < u_n \leqslant 2$

   b. Déterminer le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.

   c. Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

2. On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie, pour tout entier naturel n, par: $v_n = \ln u_n - \ln 2$

   a. Démontrer que la suite $\left(v_n\right)$ est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

   b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$.

Exercice réservé 3289

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définies par:

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = u_n \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

Exercice réservé 3293

On considère la suite v de terme général (v_n) défini par :

$$v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On définit la somme S_n pour tout entier naturel non nul n par :

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = -\ln(n+1)$$

Exercice 5167

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

Partie A

1. Etudier les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif :
$$\ln(1+x) \leqslant x$$
On pourra étudier la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = x - \ln(1+x)$$
2. En déduire que, pour tout entier naturel n non-nul :
$$\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \frac{1}{n}$$
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$f\big[\ln(n)\big] = \ln(n) + \frac{1}{n}$$
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non-nul :
$$\ln n \leqslant u_n$$
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice réservé 5961

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$$

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$, puis la limite de f en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de f.

Partie B

Voici deux fonctions extraites d'algorithmes prenant pour argument un entier naturel supérieur ou égal à 1 :

Algorithme 1

```
Fonction f(n)
  a ← 0
  k ← 1
  Tant que ......
    a ← a+exp(-k)
    k ← k+1
  Fin Tant que
  Renvoyer k
```

Algorithme 2

```
Fonction g(n)
  a ← 0
  Pour i allant de 1 à n
    b ← ln[1+exp(−i)]
    ...
  Fin Pour
  Renvoyer a
```

1. Considérons la suite (a_n) définie par :
$$a_n = \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2} + \cdots + \mathrm{e}^{-n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$
On admet que la suite (a_n) est croissante et converge vers la valeur $\dfrac{1}{e-1}$
Compléter les pointillés de l'algorithme 1 afin que la valeur renvoyée par la fonction `f` soit le rang du premier terme de la suite (a_n) réalisant une valeur approchée de $\dfrac{1}{e-1}$ à 10^{-4} près lorsque la valeur fournie en argument soit la valeur 4.
2. On définit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n).$$
Compléter l'algorithme 2 afin que la valeur renvoyée par la fonction `g` soit la valeur du terme de rang n lorsque la valeur de rang est fournie à la fonction `g` en argument.

Partie C

1. Soient u et v les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$u(t) = \ln(1+t) - t \quad ; \quad v(t) = \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}\cdot t^2$$
   a. Etudier les variations de u et v.
   b. En déduire que, pour tout nombre réel t positif, on a :
$$t - \frac{1}{2}t^2 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$$
2. Soit n entier naturel non-nul $(n\geqslant 1)$. On considère le nombre :
$$S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{e-1} - \frac{1}{2}\times\frac{1-\mathrm{e}^{-2n}}{\mathrm{e}^2-1} \leqslant S_n \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{e-1}$$
   b. On admet la proposition suivante :

Proposition :
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que :
$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
convergentes respectivement vers les nombres k, ℓ et m. Alors, on a l'encadrement : $k \leqslant \ell \leqslant m$

et on admet que la suite (S_n) a une limite réelle L.
Montrer que : $\left|L - \dfrac{1}{e-1}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\cdot(\mathrm{e}^2-1)}$

12. Logarithmes et probabilités :

Exercice 4195

Dans un jeu aléatoire, l'évènement G "*la partie est gagnée*" a une probabilité de :

$$\mathcal{P}(G) = \frac{23}{180}$$

1. Un joueur répète six foix ce jeu de manière indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

2. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9?

Exercice réservé 4155

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant une entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieur à 0,999.

Exercice 6047

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement "*le joueur gagne la n-ième partie*" ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc : $p_1 = 0{,}1$

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$p_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot p_n + \frac{3}{5}.$$

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :
$$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

3. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

4. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on :
$$\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}?$$

