Terminale S/Fonctions trigonométriques

1. Rappels :

Exercice 5269

A l'aide des formules du cos et du sin des angles associés, exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les nombres suivants :

a. $\sin\left(3\pi+x\right)$ b. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$

c. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ d. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

e. $\sin\left(\pi-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

f. $3\cdot\sin\left(\pi+x\right)-2\cdot\sin\left(\pi-x\right)+4\cdot\sin\left(x-\pi\right)$

Exercice 5267

Simplifier l'argument de chacune des expressions suivantes :

a. $\tan\left(x+\pi\right)$ b. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ c. $\cos\left(x-\pi\right)$

d. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ e. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ f. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice réservé 5268

1. Montrer que : $\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}=0$

2. Simplifier au maximum le nombre suivant. *(on exprimera le résultat à l'aide de $\cos\frac{\pi}{7}$ et $\sin\frac{\pi}{7}$).*

$$2\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+3\cdot\cos\frac{8\pi}{7}-2\cdot\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$$

Exercice 5273

1. En remarquant que : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$

   Déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2. Déterminer les valeurs de : $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 5274

Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b)\cdot\cos(a-b)=\sin a\cdot\cos a+\cos b\cdot\sin b$$

Exercice réservé 5275

Déterminer une simplification des expressions suivantes :

1. $\cos 2x\cdot\cos x-\sin 2x\cdot\sin x$

2. $\sin 3x\cdot\cos 2x-\sin 2x\cdot\cos 3x$

Exercice 5272

1. Dans chacune des cas, tracer un cercle trigonométrique et représenter chacun des ensembles suivants :

   a. $\left\{\cos x \mid x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right]\right\}$

   b. $\left\{\sin x \mid x\in\left[\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right]\right\}$

2. A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$:

   a. $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos x\geqslant-\frac{1}{2}$ c. $\cos x<0$

Exercice 3345

Résoudre, dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$, les deux équations suivantes :

a. $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$ b. $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

c. $\cos\left(2x\right)=\cos\frac{\pi}{4}$ d. $\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice réservé 5270

1. Résoudre dans l'ensemble $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales, les équations suivantes :

   a. $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin x=-\frac{1}{2}$

   c. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a. $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\tan x=-1$

Exercice réservé 5271

Résoudre, dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ les équations suivantes :

a. $2\cos 2x=1$ b. $\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\cos 2x=\cos x$ d. $\sin 3x=\cos x$

Exercice 5276

1. Simplifier l'expression suivante :
   $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

2. Etablir l'égalité suivante :
   $$\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{\left(\sin 3x\right)^2}{\sin(2x)\cdot\sin(x)}$$

3. Résoudre, dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ l'équation suivante :
   $$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}$$

2. Propriétés des fonctions sinus et cosinus :

Exercice 2556

1. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :
$$u_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

2. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; préciser sa limite :
$$u_n = \frac{2n^2+\cos n}{3n^2+5}$$

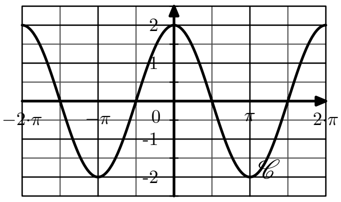
Exercice réservé 2568

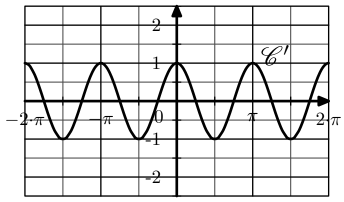
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $u_n = \dfrac{\cos n - 2n}{\sqrt{n}}$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3302

On considère les deux fonctions suivantes f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2\cdot\cos(x) \quad ; \quad g(x) = \cos(2\cdot x)$$
Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative représentée ci-dessous :





Exercice réservé 5040

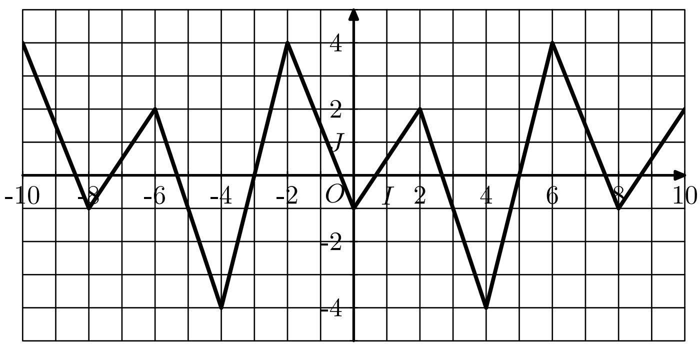
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de réels. Pour tout entier n, on pose :
$$u_n = \sin(a_n).$$
Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie :

Proposition : "On peut choisir la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$"

3. Périodicité et parité :

Exercice 2920

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on représente ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

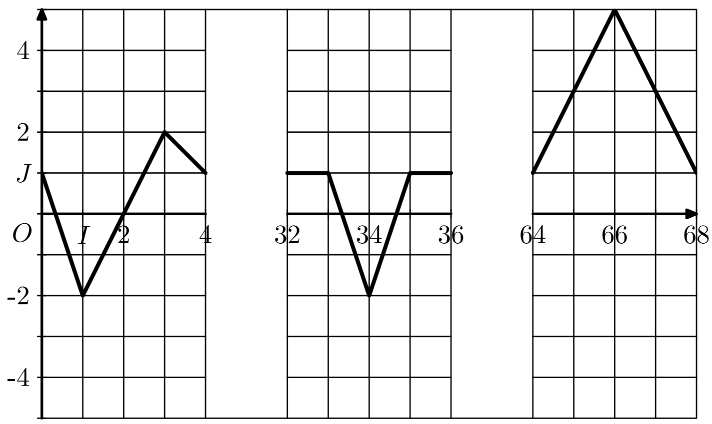


La fonction f est périodique de période T.

1. a. Déterminer, parmi les coordonnées ci-dessous, celle(s) d'un vecteur par lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est invariante :
   b. Déterminer la valeur de T.
2. Donner l'image, par la fonction f, des nombres suivants :
   a. 14 b. -16 c. 56 e. 58

Exercice 2922

On considère la fonction f périodique de période 12. Ci-dessous est donnée quelques parties de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



1. Reconstruire le tracé de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;12]$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[38\,;50]$.

Exercice 2921

Pour chaque question, montrer que la fonction f admet T pour période :

a. $f(x) = \sin(6x-3)$; $T = \dfrac{\pi}{3}$

b. $f(x) = \tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; $T = \pi$

c. $f(x) = \left(\cos x\right)^2 - \left(\sin x\right)^2$; $T = \pi$

d. $f(x) = \left|\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$; $T = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice réservé 3346

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par la relation :
$$f(x) = \cos x + \left[\cos(x)\right]^2$$
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Etudier la parité de la fonction f.

2. Etudier la périodicité de la fonction f.

3. a. En étudiant les images des nombres suivantes :

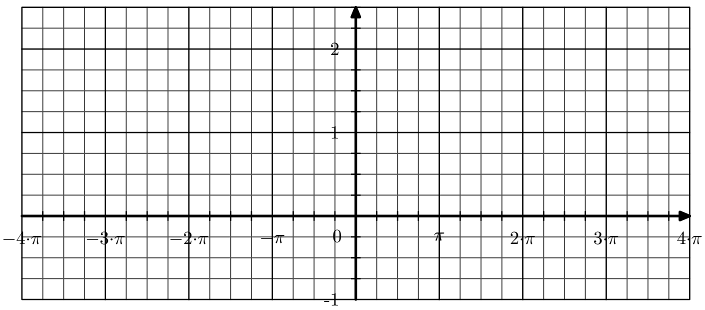
$$0\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{4\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{3}$$

et en admettant les propriétés suivantes :

- f est strictement décroissante sur $\left[0\,;\frac{2\pi}{3}\right]$;
- f est strictement croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$;
- $\mathscr{C}_f$ admet les tangentes horizontales aux points d'abscisse :
  $$0\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\ ;\ -\frac{4\pi}{3}$$

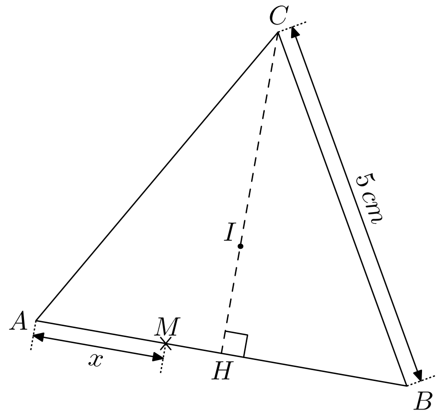
effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

b. Prolonger ce tracé à l'ensemble du graphique.



Exercice réservé 2923

On considère un triangle ABC équilatéral de côté $5\,cm$ où le point I est le centre de gravité :



On considère un point M décrivant le triangle ABC ; on repère la position du point M sur le triangle à l'aide du nombre x représentant la longueur parcourue le long du triangle ABC par le point M à partir du point A :

- x est positif si le point M parcourt le triangle dans le sens $A \to B$ à partir du point A ;
- x est négatif si le point M parcourt le triangle dans le sens $A \to C$ à partir du point A ;

On note f la distance IM mesurée en fonction de la valeur de x :

1. Etudions la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;5\right]$:

a. Montrer que l'image de x par la fonction f vérifie la relation suivante :
$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 + \frac{25}{9}}$$

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\left[0\,;5\right]$

2. Emettre une conjecture quant à la périodicité de la fonction f.

4. Dérivée :

Exercice 5277

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f : x \longmapsto x^2 + \cos x$ b. $g : x \longmapsto \sin(2x)$

c. $h : x \longmapsto \cos x \cdot \sin x$ d. $j : x \longmapsto \left(\sin x\right)^2$

Exercice 2878

Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ b. $g(x) = \left(3x^2 - 2\right) \cdot \left(\sin x\right)^2$

c. $h(x) = \dfrac{3}{2 \cdot \cos x}$ d. $j(x) = \dfrac{\cos x}{3x + \sin x}$

Exercice réservé 2907

Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions f, g, h définies ci-dessous :

a. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ b. $g(x) = (5x-3)^3 \cdot \cos x$

c. $h(x) = \dfrac{\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)}{x^2}$

Exercice réservé 2879

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 2x \cdot \sin\left(3x+1\right)$ b. $g(x) = \dfrac{2 \cdot \cos\left(2x\right)}{3 - \sin\left(1 - 2x\right)}$

5. Nombres dérivés et limites :

Exercice 3532

1. Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

   a. $f(x) = \left(\cos x\right)^2$ b. $g(x) = \sin x + \cos x$

   c. $h(x) = \tan(x^2+x)$ d. $j(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

2. Déterminer les limites suivantes :

   a. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\left(\cos x\right)^2 - 1}{x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto -\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x + \cos x}{x + \dfrac{\pi}{4}}$

   c. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\tan(x^2+x)}{x}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot \sin x}$

Exercice 3568

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sin x$

1. Donner le nombre dérivée de la fonction g en 0.
2. En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\sin x}{x}$

6. Etude de fonctions :

Exercice 6822

Préciser si l'affirmation suivante est vraie ou fasse, en justifiant la réponse.

Affirmation

L'équation $x-\cos x=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice réservé 3540

1. On considère la fonction f définit sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x} & \text{pour } x\neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
   Montrer que la fonction f est continue en 0.

2. On considère la fonction g définie par la relation sur $\mathbb{R}$ par :
   $g(x) = E(x)\cdot \sin\left(\pi\cdot x\right)$

   a. Simplifier l'écriture de la fonction g sur chacun des intervalles suivants :
   $[-1\,;0[\quad ; \quad [0\,;1[\quad ; \quad [1\,;2[$

   b. Justifier que la fonction g est continue en 0 et en 1.

   c. Emettre une conjecture sur l'ensemble de continuité de la fonction f?

   d. Tracer la courbe représentative de cette fonction sur votre calculatrice.

Exercice 3582

On considère les deux suites de nombres réels, $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2}$$
$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

1. Démontrer que la suite v converge vers $\dfrac{1}{2}$.

2. a. Démontrer que chacune des trois fonctions numériques de la variable réelle :
$$x \longmapsto x - \sin x \quad ; \quad x \longmapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$
$$x \longmapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$
   ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   On pourra utiliser les variations de chacune de ces trois fonctions.

   b. Justifier que pour tout $n\geqslant 1$: $1^3+2^3+\cdots+n^3 \leqslant n^4$.
   Déduire du a. l'inégalité :
   $v_n - \dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   c. Démontrer que la suite u est convergente ; quelle est sa limite?

Exercice réservé 3559

1. On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0\,;\pi]$ par :
   $g(x) = x\cdot \cos x - \sin x$

   Etudier g et dresser son tableau de variation.
   En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\pi]$.

2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0\,;\pi[$ par :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x} & \text{pour } x\in\,]0\,;\pi] \end{cases}$$
   On rappelle que : $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
   Etudier les variations de f sur $]0\,;\pi]$.

3. Etude de f en 0.

   a. Prouver que, pour tout nombre réel $x\in[0\,;\pi]$:
   $0 \leqslant x - \sin x \leqslant \dfrac{x^3}{6}$
   (Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0\,;\pi]$ par :
   $\varphi(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$
   On calculera les dérivées φ', φ'' et φ''' et on en déduirea le signe de φ)

   b. Prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

4. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$. *(On prenda 3 cm pour unité).*

7. Primitive et intégrale :

Exercice réservé 5312

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \cos x + \sin x$ b. $g(x) = \sin(3x)$

c. $h(x) = \sin x \cdot \cos x$ d. $j(x) = 3x \cdot \cos\left(x^2\right)$

Exercice 3932

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ b. $g(x) = \mathrm{e}^{x+1} + 1$

c. $h(x) = 2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{x^2+1}$ d. $j(x) = \cos x$

e. $k(x) = \sin(3x)$ f. $\ell(x) = \left(\sin x\right)^2$

Exercice 5232

On considère les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi (\cos x)^2\,\mathrm{d}x \quad ; \quad J = \int_0^\pi (\sin x)^2\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer : $I+J$; $I-J$.
2. En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 5282

On considère la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cdot \cos t\,\mathrm{d}t$$

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   b. Etudier les variations de la suite (x_n).
   c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n)?
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
   b. En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice réservé 5208

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x\right)^2\,\mathrm{d}x$

Exercice réservé 5307

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\pi]$ par :

$$f(x) = \cos 3x \cdot \left(\cos x\right)^3$$

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ *(on prendra 3 cm comme unité)*, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.

1. a. Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
   $$f'(x) = -3 \cdot \left(\cos x\right)^2 \cdot \sin 4x$$
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. a. Montrer que, quel que soit le réel x appartenant à $[0\,;\pi]$, on a :
   $$f(x) = \frac{1}{8} \cdot \cos 6x + \frac{3}{8} \cdot \cos 4x + \frac{3}{8} \cdot \cos 2x + \frac{1}{8}$$
   (On utilisera entre autre la formule :
   $2 \cdot \cos x \cdot \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$*)*
   b. Calculer, en cm^2, l'aire de l'ensemble E limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{6}$.

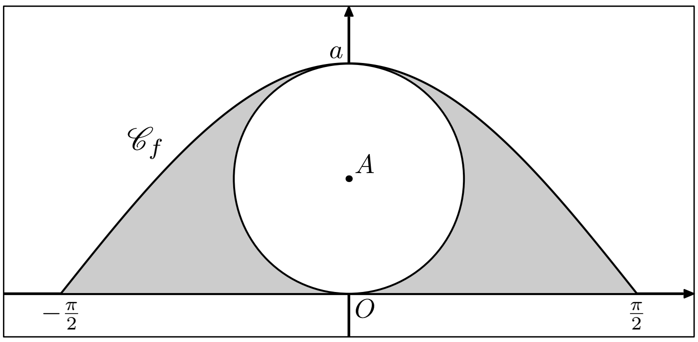
Exercice 6820

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles.

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.
La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = a \cdot \cos x$ avec $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{a}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de a inférieurs à 1,4.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=-\dfrac{\pi}{2}$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à $2 \cdot a$ d'unité d'aire.
2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte?

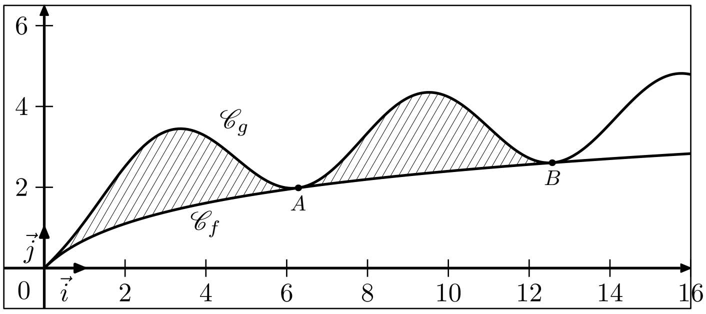


Exercice 6821

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;16]$ par :

$$f(x) = \ln\left(x+1\right) \quad ; \quad g(x) = \ln\left(x+1\right) + 1 - \cos(x)$$

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
Ces courbes sont données ci-dessous :



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

8. Nombres complexes :

Exercice 5280

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2}+\mathrm{i}\cdot\sqrt{6} \quad ; \quad z_2 = 2+2\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Ecrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et les arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 5281

On considère l'équation (E) suivante : $z^2+2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cdot z+1=0$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation :

"*L'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1.*"

9. Annales :

Exercice 5283

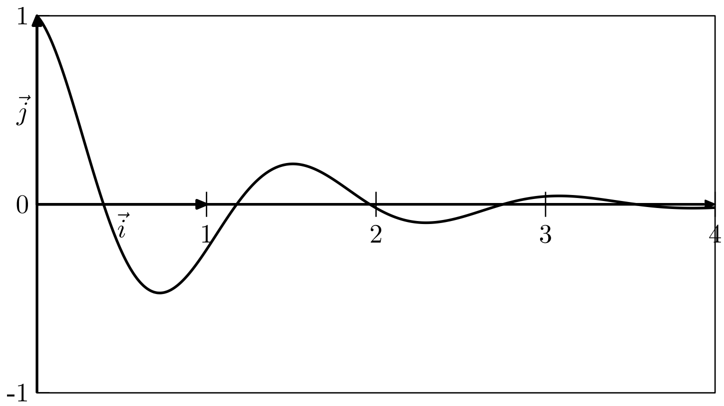
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cdot\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ en fin d'exercice. Ce graphique sera complété au fur et à mesure de l'exericce.

On considère également la fonction g définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

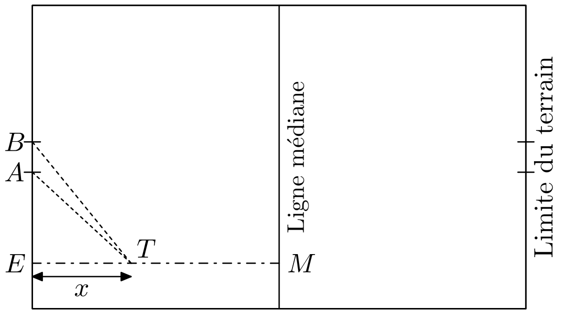
1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$:
   $$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$
   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.
3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_n=f\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.
4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$:
   $$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cdot\left[\cos(4x)+4\cdot\sin(4x)\right]$$
   b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
   Compléter le graphique donné en y traçant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.



Exercice 6823

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E *(voir figure ci-contre)* situé à l'extérieur du segment $[AB]$.
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droite de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.
La transformation est réussi si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Terrain vu du dessus



Pour maximimser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes :

$EM = 50\,m$; $EA = 25\,m$; $AB = 5{,}6\,m$

On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici que l'on peut observer sur la figure.

   On admet que pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

   $$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$

   Montrer que : $\tan\gamma = \dfrac{5{,}6\cdot x}{x^2+765}$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un maximum sur l'intervalle $]0\,;50[$ de la fonction f définie par :

   $$f(x) = \frac{5{,}6\cdot x}{x^2 + 765}$$

   Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

