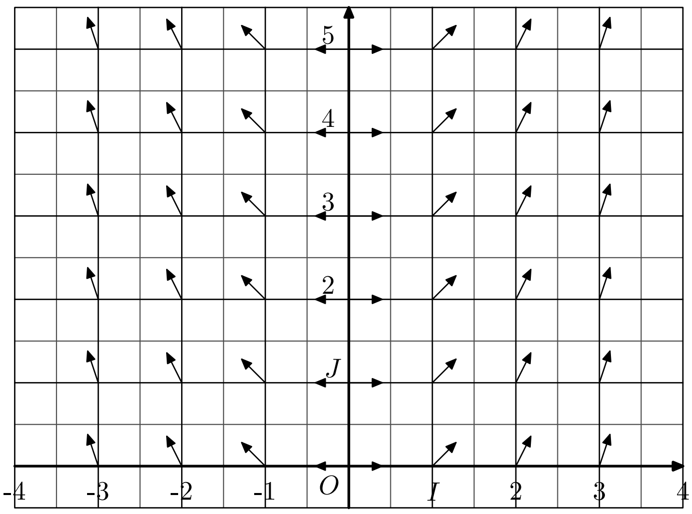
Terminale S/Exponentielles

1. Relations différentielles :

Exercice 3340

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :
$f'(x) = x \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. Donner au moins deux fonctions qui vérifie cette relation.
2. On propose le champs de tangentes représenté ci-dessous :

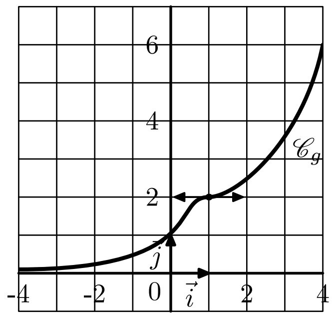


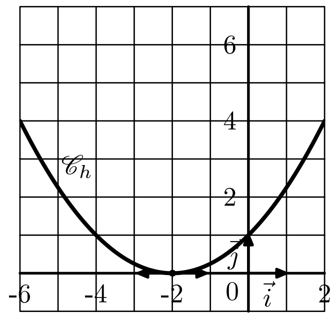
   a. Vérifier que chaque tangente représentée sur la droite d'équation $x=2$ a pour coefficient directeur 2.

   b. Vérifier que pour chaque tangente ayant pour origine le point de coordonnée $(x\,;y)$, son coefficient directeur est x.
3. On considère maintenant la fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes :
$$f(0) = \frac{3}{2} \quad ; \quad f'(x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$
Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.

Exercice 3580

On considère deux fonctions g et h dont les représentations graphiques sont données ci-dessous :





Justifier que, dans les deux cas, ces courbes ne vérifient pas les conditions d'une fonction f telle que :
$$f(0) = 1 \quad ; \quad f'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 3342

Le nombre d'atomes d'une source radioactive a tendance à diminuer dans le temps. On note $N(t)$ le nombre de noyau à l'instant t. En observant ce phénomène sur variation de temps, $\Delta\,t$, on se rend compte que le nombre d'atomes a connu une variation de $\Delta\,N(t)$ et on a réussi à établir la formule suivante :
$$\frac{\Delta\,N(t)}{N(t)} = -\lambda\cdot\Delta\,t$$
où λ est une constante dépendant uniquement de la nature des noyaux observées.

1. a. La durée de demi-vie du Radon-220 est de $56\,s$. Déterminer une valeur approchée de la constante λ dans le cas du Radon-220.

   b. On part d'un échantillon contenant $240\,g$ contenant environ $6{,}02\times10^{23}$ noyaux de radon.
   Déterminer le temps à attendre pour que la quantité observée pèse :
   $120\,g \quad ; \quad 60\,g$
2. a. Etablir l'égalité suivante : $\dfrac{\Delta\,N(t)}{\Delta\,t} = -\lambda\cdot N(t)$

   b. En supposant que la fonction N, dépendant du temps t, est dérivable, établir la formule suivante :
   $N'(t) = -\lambda\cdot N(t)$

2. Propriétés algébriques :

Exercice 3589

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\exp(3)\cdot\exp(5)$ $\qquad$ b. $\exp(-2)\cdot\exp(4)$

c. $\dfrac{1}{\exp(-5)}$ $\qquad$ d. $\big[\exp(5)\big]^3$

Exercice 3590

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\mathrm{e}^3\cdot\mathrm{e}^4$ $\qquad$ b. $\mathrm{e}^4\cdot\mathrm{e}^{-4}$

c. $\left(\mathrm{e}^4\right)^3\cdot\mathrm{e}^4$ $\qquad$ d. $\dfrac{\mathrm{e}^5\cdot\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}}$

e. $\left(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^4\right)^2-\left(\mathrm{e}^5+\mathrm{e}^4\right)^2$ $\qquad$ f. $\dfrac{\mathrm{e}^6-\mathrm{e}^3}{e\cdot\mathrm{e}^2}$

Exercice réservé 3608

Simplifier les expressions suivantes :

a. $e^5 \cdot e^6$ b. $\dfrac{e^6 \cdot e^{-2}}{e^{-4}}$

c. $(e^3)^{-2} \cdot e^5$ d. $(e^2+e^{-2})\cdot(e^2-e^{-2})$

Exercice 6873

Recopier les identités ci-dessous en complétant correctement les pointillés :

a. $e^x+e^{-x} = e^x\cdot(\ldots+\ldots)$ b. $\dfrac{e^x}{x^2} = \Big(\dfrac{e^{\cdots}}{\ldots}\Big)^2$

c. $1+e^{-x} = \dfrac{\ldots+\ldots}{e^x}$ d. $\dfrac{1+e^x}{e^{2x}} = \ldots+\ldots$

e. $\dfrac{e^{3x}-e^x}{e^{3x}+e^{2x}} = \dfrac{1-\ldots}{1+\ldots}$ f. $e^{16x} = (e^{\cdots})^2$

Exercice réservé 3591

Etablir, pour $x\in\mathbb{R}$, les égalités suivantes :

a. $\dfrac{1-e^x}{e^{2x}} = e^{-2x}-e^{-x}$ b. $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Exercice réservé 3610

Simplifier les expressions suivantes :

a. $e\cdot e^{2x+1}$ b. $e^{3-2x}\cdot e^{x+5}$

c. $(e^{5x})^2$ d. $(e^{3x})^2+(e^{-3x})^2-(e^{3x}-e^{-3x})^2$

e. $e^{9x}-2\cdot(e^{3x})^3$ f. $(e^{3x})^2-e^{2x}\cdot(e^{2x}+e^{-2})^2$

3. Equations et inéquations :

Exercice 3593

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. $\exp(x)=e$ b. $\exp(-x)=1$

c. $\exp(2x-1)=e$ d. $e^{x^2+x}=1$

e. $e^x-e^{-x}=0$ f. $e^{x^2+5} = (e^{x+2})^2$

Exercice réservé 3616

Résoudre les équations suivantes :

a. $e^x+e^{-x}=0$ b. $e^{3x+1}=e^{-2x+3}$

c. $e^{2x}-1=0$ d. $x\cdot e^{2x}-2\cdot e^{2x}=0$

Exercice 3594

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. $\exp(x)<e$ b. $\exp(-x)\geqslant 1$

c. $e^{2x-1}>e^x$ d. $e^x+e^{-x}<2$

(Pour la dernière inéquation, penser à une factorisation)

Exercice réservé 3617

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $e^x<1$ b. $e^{-x}>0$

c. $e^{-x}>1$ d. $e^x-e^{-x}>0$

e. $e^{2x}-1\geqslant 0$ f. $x\cdot e^{-x}-3\cdot e^{-x}<0$

4. Equations et inéquations avec changement de variables :

Exercice 5846

Résoudre l'équation et l'inéquation ci-dessous :

a. $e^{2x}+2\cdot e^x-3=0$ b. $e^{2x}+e^x-2<0$

Exercice 6872

Résoudre l'inéquation : $2\cdot e^{2\cdot x}+6\cdot e^x-8<0$

Exercice 5845

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{e^x+3}{e^x-1}>0$ b. $-e^{2x}-e^x+2>0$

5. Limites aux bornes de la fonction exponentielle :

Exercice 3614

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{-x+1}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^{2x+1}$ c. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{-x^2+1}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{\frac{1}{x}}$ e. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

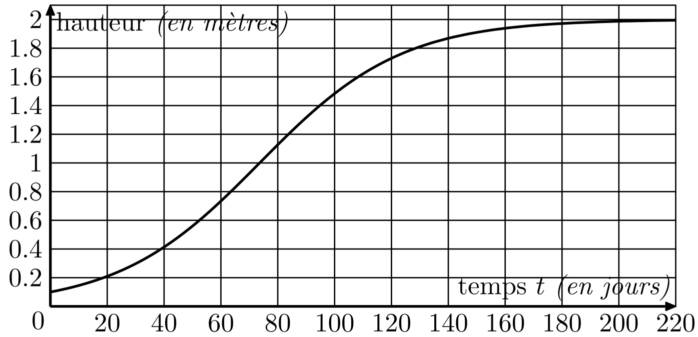
Exercice réservé 3707

Etablir la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x-1} = -\infty$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{e^x-1}{e^{2x}-1} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 5847

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.



On décide de modéliser cette croissante par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b{\cdot}\mathrm{e}^{-0{,}04\cdot t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure $0{,}1\,m$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de $2\,m$.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

6. Limites par comparaison de croissance :

Exercice 3661

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{x^2}{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{x}{\cdot}\big(x^2-x+1\big)$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}+1}{\mathrm{e}^{-x}-1}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{x^2+1}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{-x}+3x+1$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}$

Exercice réservé 3615

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} (x+1){\cdot}\mathrm{e}^{x}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x+1}{\mathrm{e}^{x}}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{2x}-3{\cdot}\mathrm{e}^{x}+1$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{2x}-3{\cdot}\mathrm{e}^{x}+1$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$

Exercice 3710

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$$

Le but de cet exercice est de déterminer les deux limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-} f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^+} f(x)$

1. Soit $X=\dfrac{2}{x-1}$. Prouver l'égalité :

$$\frac{2}{(x-1)^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{e}{2}\cdot X^2\cdot\mathrm{e}^{X}$$

2. En déduire la valeur des limites recherchées.

7. Limites par identification aux nombres dérivées :

Exercice 3662

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} x{\cdot}\big(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\big)$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} x{\cdot}\big(\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}-1\big)$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} x^3{\cdot}\big(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\big)$

Exercice réservé 3777

1. On considère la suite (u_n) définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = 1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\cdots+\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x{\cdot}\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} x^2-2(x-1)\mathrm{e}^{x-1}$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}{\cdot}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}{\cdot}\big(x^2+x\big)$$

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}$

Peut-on prolonger g sur $\mathbb{R}$ par continuité.

8. Dérivées :

Exercice 3592

Déterminer l'expression des fonctions dérivées suivantes :

a. $f(x) = e^{-x}$ b. $g(x) = x\cdot e^{x}$

c. $h(x) = e^{x^2+x}$ d. $j(x) = \dfrac{1}{1-e^{x}}$

Exercice réservé 3613

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ b. $g(x) = x\cdot e^{x^2+1}$

c. $h(x) = x\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ d. $j(x) = \dfrac{e^{-2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$

Exercice 3612

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x\cdot e^{x+1}$ b. $g(x) = e^{x^2+1}$

c. $h(x) = \big(x^2+1\big)\cdot e^{3x+1}$ d. $j(x) = \dfrac{e^{x+1}}{2\cdot x+1}$

e. $k(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{e^{x}}$ f. $\ell(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$

Exercice réservé 5140

Dans le tableau ci-dessous, sont données des fonctions et l'expression de leurs dérivées. Vérifier l'exactitude de ce tableau :

	$f(x)$	$f'(x)$
a.	$3x\cdot e^{5x^2+3}$	$\big(30x^2+3\big)\cdot e^{5x^2+3}$
b.	$e^{3-x^2}\cdot e^{x^2+1}$	0
c.	$\dfrac{e^{2-x^2}}{2x}$	$-\dfrac{\big(2x^2+1\big)e^{2-x^2}}{2x^2}$
d.	$e^{x\sqrt{x}}$	$\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{x}\cdot e^{x\sqrt{x}}$
e.	$e^{\frac{2x}{2-x}}$	$\dfrac{4}{(x-2)^2}\cdot e^{\frac{2x}{2-x}}$

Exercice 6919

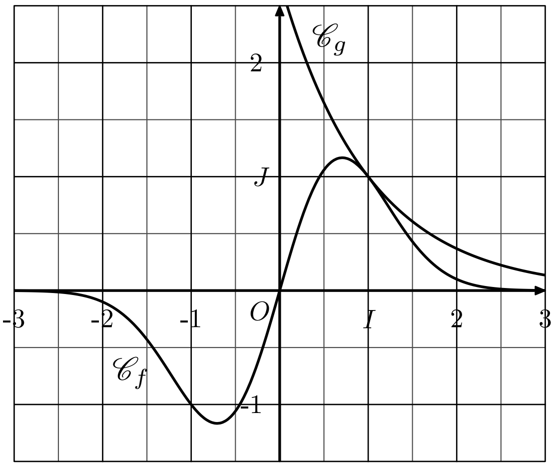
On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$f(x) = x\cdot e^{1-x^2}$

et la fonction g définie pour tout réel x par :

$g(x) = e^{1-x}$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentativees $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Justifier qu'au point d'abscisse 1, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent la même tangente.

Exercice 5754

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

- $f(x) = \dfrac{e^{1+x}+e^{1-x}}{2}$
- $g(x) = \dfrac{e^{1+x}-e^{1-x}}{2}$

Dans un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$, on donne les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ respectivement représentative des fonctions f et g :

1. Etablir que, pour tout nombre réel x : $f(x)-g(x)>0$

2. Etablir que, pour tout réel x, on a :
   $f'(x) = g(x)$; $g'(x) = f(x)$

3. Considérons a un nombre réel quelconque :
   a. Justifier que l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour expression :
   $y = g(a)\cdot\big(x-a\big)+f(a)$
   b. Justifier que l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour expression :
   $y = g(a)\cdot\big(x-a\big)+f(a)$

4. Justifier que les tangentes (T) et (T') sont sécantes et en déduire l'abscisse du point d'intersection.

9. Etudes de fonctions :

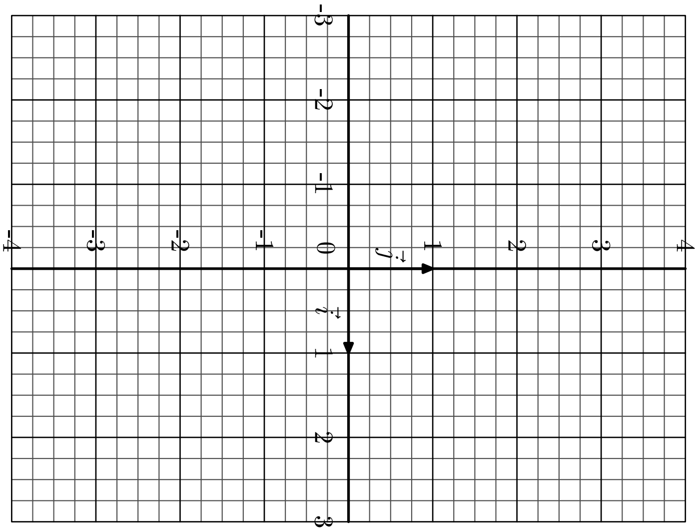
Exercice 3618

On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x) = \dfrac{1}{e^{x}-1}$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etablir le tableau de variations de la fonction f.
3. Préciser les différentes asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.



Exercice 3665

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \frac{4\cdot e^x}{e^x+7}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{4}{1+7e^{-x}}$
2. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptôtes dont on précisera les équations.
   b. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   c. Démontrer que pour tout réel x : $0 < f(x) < 4$.

Exercice réservé 3706

Soit f la fonction définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

1. Justifier que la fonction f admet $\mathbb{R}$ comme ensemble de définition.
2. Déterminer la valeur des limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Etablir que la fonction f' admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{-e^x\cdot\left(e^{2x} - 4e^x + 1\right)}{\left(e^{2x} - e^x + 1\right)^2}$$

Exercice 5851

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ par :

$$f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$$

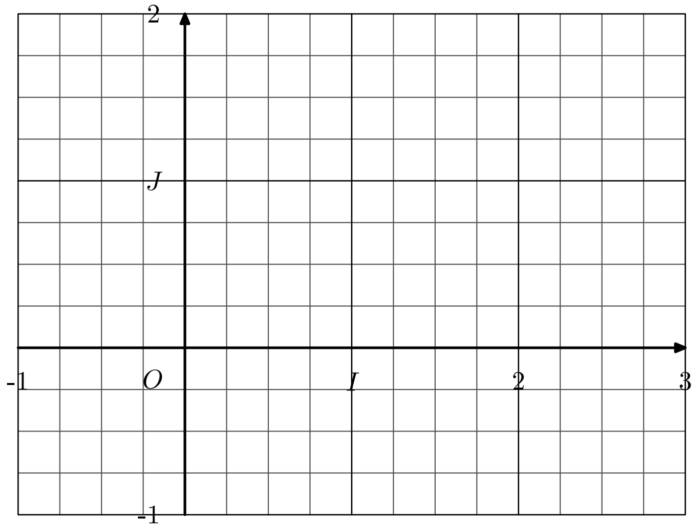
1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.
   b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.
2. Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle $\left[0\,;1\right]$:
$$x - e^{-x} + 1 = e^{-x} - x - e^{-1} + 1$$

Exercice 3677

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{9}{2}\cdot e^{-2x} - 3\cdot e^{-3x}$

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$ d'unité 1 *cm*.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = 3\cdot e^{-2x}\cdot\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right).$$
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
4. a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ intercepte l'axe des abscisses en un seul point.
   Donner la valeur approchée des coordonnées de ce point d'intersection.
5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous :



Exercice réservé 3643

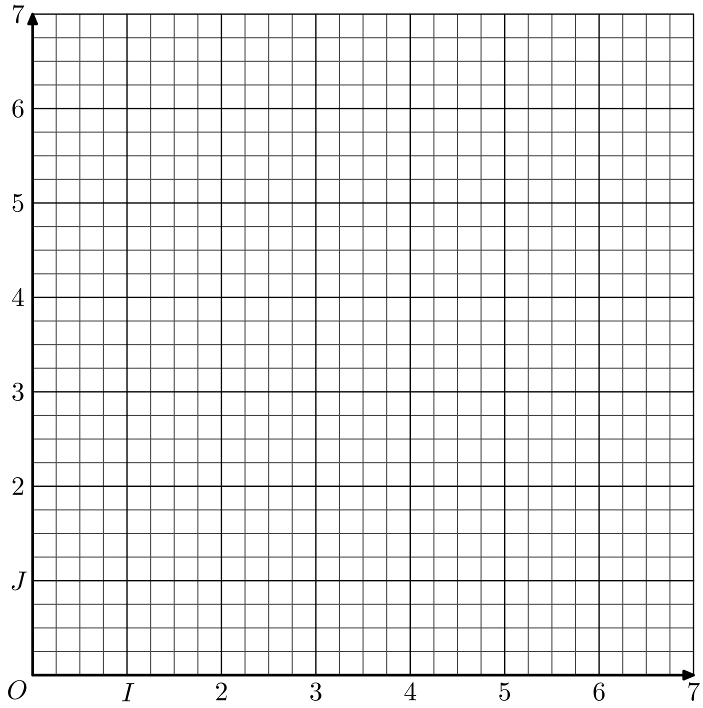
On note f la fonction définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$. L'unité graphique est 1 *cm*.

1. Etude des limites
   a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Etude des variations de la fonction f.
   a. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :
   $$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot(2x+1)$$
   b. Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.
   c. Démontrer que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.



10. Etudes de fonctions et problèmes :

Exercice réservé 3666

Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation :

(E) : $e^{2x}+4{\cdot}x{\cdot}e^{x}-4{\cdot}e^{x}-4=0$

Pour cela, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=e^{2x}+4{\cdot}x{\cdot}e^{x}-4{\cdot}e^{x}-4$.

1. Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty\,;0[$:
   $e^{2x}-4<0$; $4{\cdot}e^{x}(x-1)<0$
2. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;0[$.
3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$
4. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   On note α cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

Exercice réservé 107

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x{\cdot}e^{x-1}+1$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x : $f'(x)=(x+1){\cdot}e^{x-1}$
4. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si, et seulement si, a vérifie l'égalité :
   $1-a^2{\cdot}e^{a-1}=0$
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

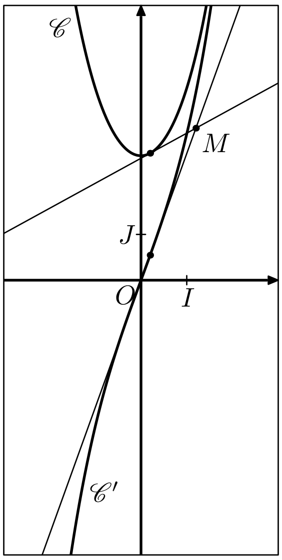
   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ de l'équation.
   $1-x^2{\cdot}e^{x-1}=0$
4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Exercice 5990

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

- $f(x)=\dfrac{e^{1+x}+e^{1-x}}{2}$
- $g(x)=\dfrac{e^{1+x}-e^{1-x}}{2}$

Dans un repère orthonormé $(O;I;J)$, on donne les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ respectivement représentative des fonctions f et g :



Partie A : étude de la position relative des deux courbes

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ se situe toujours au dessus de la courbe $\mathscr{C}'$.

Partie B : étude d'un lieu géométrique

Soit a un nombre réel quelconque. On considère :

- la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a ;
- la tangente (T') à la courbe $\mathscr{C}'$ au point d'abscisse a ;

On admet que les droites (T) et (T') ne sont jamais parallèles. On note M leur point d'intersections.

2. a. Donner l'expression de l'équation réduite de la tangente (T) en fonction de a.

 b. Donner l'expression de l'équation réduite de la tangente (T') en fonction de a.

3. Déterminer l'abscisse du point du point M.

4. a. Déterminer les coordonnées du M.

 b. Justifier que le point M appartient à la courbe d'une des fonctions de références qu'on précisera.

11. Etude de fonctions avec dérivées secondes ou fonctions annexes :

Exercice 5235

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :
$g(x)=x\cdot(e^x-e)+e-2$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0;+\infty[$.
 Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0\ +\infty[$ par :
 $g''(x)=(2+x)e^x$

2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0;+\infty[$.

3. Etablir que l'équation $g'(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0;+\infty[$.
 Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$.

Exercice réservé 3904

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=e^x-x\cdot e^x+1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Etudier les variations de la fonction g.

3. Donner le tableau de variations de g.

4. a. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[0;+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

 b. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

 c. Démontrer que : $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ telle que :

$$A(x)=\frac{4x}{e^x+1}$$

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$ où g est la fonction définie dans la partie **A**.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0;+\infty[$.

Exercice réservé 3704

Soit la fonction f définie explicitement sur une certaine partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ au moyen de la formule :

$$f(x)=\frac{x^2}{e^x-x-2}$$

On propose l'étude de cette fonction f.

1. On pose : $g(x)=e^x-x-2$.

 a. Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ de la dérivée $g'(x)$.

 b. Trouver, par une mise en facteur de e^x, la limite de $g(x)$ lorsque $x\mapsto+\infty$.

 c. En déduire qu'il existe deux réels, notés a et b, avec $a<b$, tels que : $g(a)=g(b)=0$

 d. Montrer que : $-2<a<-1$; $1<b<2$

2. a. Déterminer dans D la dérivée de la fonction f et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :
 $$f'(x)=\frac{x\cdot u(x)}{[g(x)]^2}$$

 b. Calculer la dérivée u'' de u' et étudier son signe.

 c. Déduire de la question b. les variations de u', ainsi que celles de u et montrer qu'il existe un réel, noté c tel que $u(c)=0$. Montrer que $c<-2$.

 d. Trouver enfin le signe de cette fonction u et le signe de la dérivée $f'(x)$.

3. Dresser le tableau de varitaion de f. Montrer que la fonction f admet un minimum m dans un l'intervalle $]-\infty;a[$. Montrer que :

$$m = \frac{c \cdot (2-c)}{c+1}.$$

4. Déterminer les limites de f en $-\infty$, a, b, $+\infty$. *(Pour a et b, on distinguera les limites à droite et les limites à gauche).*

5. Rassembler tous les résultats précédents en dessinant l'allure du graphe de la fonction f.

12. Etudes de famille de fonctions :

Exercice 5856

Partie A

On considère la famille de fonctions (f_k) définie pour $k \in \mathbb{N}$ par : $\quad f_k(x) = (x+k) \cdot e^x + x$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans une repère orthonormé.

Quelle fonction de la famille (f_k) admet la droite (d) d'équation $y = x - e^{-2}$ comme tangente au point d'abscisse -2.

Partie B

1. On considère la fonction g définie par :
$g(x) = (x+1) \cdot e^x + e^{-2}$.
   a. Déterminer l'expression de la fonction g'.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

2. Déduire des questions précédentes la position relative de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite (d).

Exercice 5848

Etant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-k \cdot x}}$$

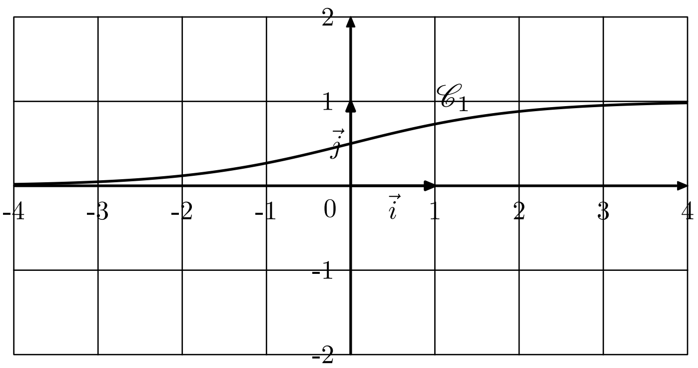
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie, on choisit $k = 1$. On a , pour tout réel x :

$$f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ est donnée ci-dessous :



1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x : $\quad f_1(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.

On note K milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x : $\quad f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur le repère ci-dessous.

Exercice réservé 5849

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :
$f(x) = (x+1) \cdot e^x$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout réel x : $\quad f'(x) = (x+2) \cdot e^x$.

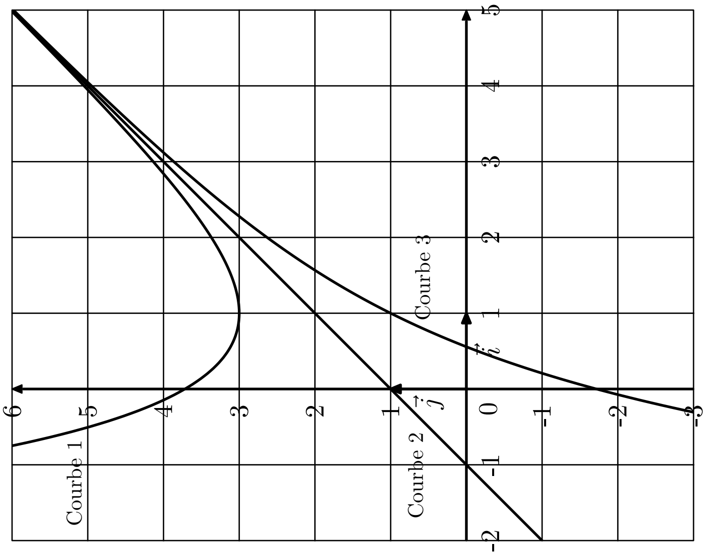
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :
$g_m(x) = x + 1 - m \cdot e^{-x}$
et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ du plan.

1. a. Démontrer que :
$g_m(x) = 0$ si, et seulement si, $f(x) = m$.
   b. Déduire de la partie **A**, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_e$ et $\mathscr{C}_{-e}$ *(obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).*



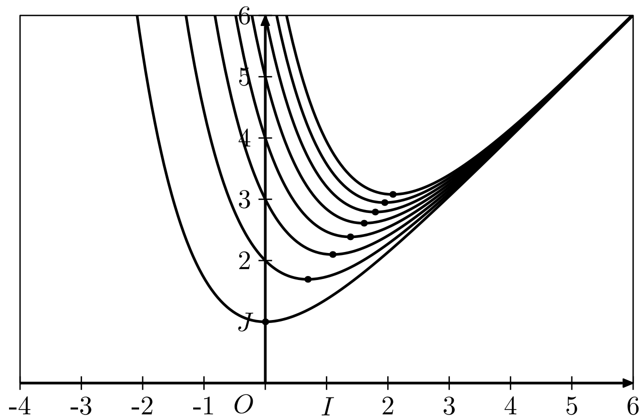
Identifier chacune de ces courbes sur la figure ci-dessous en justifiant.

3. Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x+1$ suivant les valeurs du réel m.

Exercice 6964

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_k(x) = x + k\cdot \mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est ce le cas?

13. Etude d'exponentielles avec utilisation du logarithme :

Exercice 3705

Soit f la fonction définie par la relation :
$$f(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction f.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que la fonction f' admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^x\cdot\left(\mathrm{e}^{2x} - 4\cdot\mathrm{e}^x + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1\right)^2}$$

3. a. Etudier le signe du polynôme x^2-4x+1.

   b. En déduire que la fonction f' admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On précisera les valeurs de a et de b.

4. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

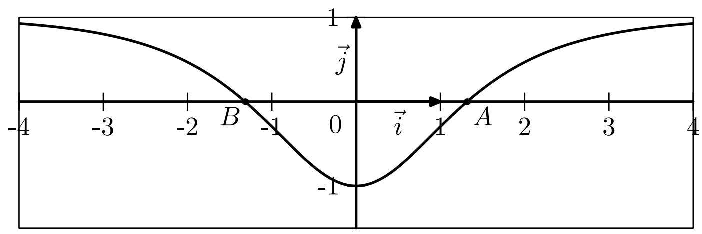
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. On y précisera les valeurs approchées de $f(a)$ et de $f(b)$.

Exercice 1255

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-\dfrac{4\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2\cdot x}+1}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

   a. Vérifier que pour tout réel x :
$$f'(x) = \frac{4\cdot\mathrm{e}^x\cdot\left(\mathrm{e}^{2\cdot x} - 1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2\cdot x} + 1\right)^2}$$

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$

2. La droite d'équation $x=0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
Démontrer que cette conjecture est vraie.
`(Question hors programme 2012)`

3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c=\mathrm{e}^a$.

   a. Démontrer que le réel c est une solution de l'équation :
   $x^2 - 4\cdot x + 1 = 0$
   En déduire la valeur exacte de a.

   b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Exercice réservé 6254

On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
$f(x) = 5\cdot\mathrm{e}^{-x} - 3\cdot\mathrm{e}^{-2x} + x - 3$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=x-3$ dans un repère orthogonal du plan.

On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de la droite $(\mathcal{D})$ sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, déterminer l'expression de la distance MN en fonction de x.
   On notera g cette fonction.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.
   Pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ que l'on déterminera.
   En donner une interprétation graphique.

255. Exercices non-classés :

Exercice 3611

Etablir les égalités suivantes :

a. $\dfrac{2+3\cdot\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} = 2\cdot\mathrm{e}^{-2x} + 3\cdot\mathrm{e}^{-x} + 1$

b. $\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{x}-1\right)^2 = 4\cdot\mathrm{e}^{x}$

c. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}+2}{\mathrm{e}^{3x}-1} = \dfrac{1+2\cdot\mathrm{e}^{-3x}}{1-\mathrm{e}^{-3x}}$

d. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2}$

Exercice 8133

On considère la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif par : $f(t) = a\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b$
où a et b sont deux nombres réels.
On admet que $f(0)=1\,000$ et que f vérifie la relation :
$f'(t) + \dfrac{1}{5}\cdot f(t) = 4$

Déterminer les valeurs de a et de b.

