Terminale S/Espace et repères

1. Résolution de systèmes :

Exercice 6348

1. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ x - y + 3z = 3 \end{cases}$$
(On montrera que ce système admet un unique triplet solution).

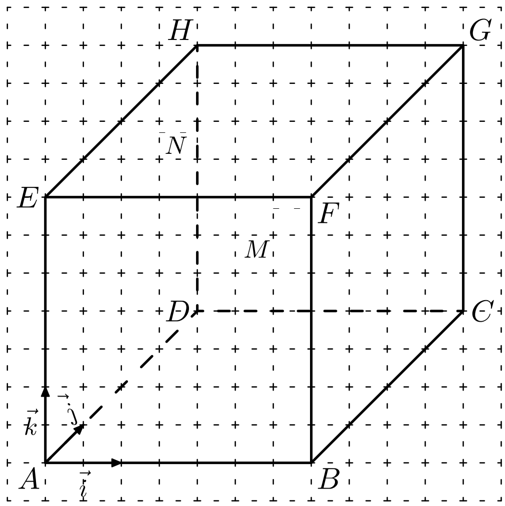
2. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x + 5y - 9z = -5 \end{cases}$$
(On montrera que ce système n'admet aucune solution)

3. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x - y + 4z = -2 \\ 5x - y + 7z = 1 \end{cases}$$
(On montrera que ce système admet une infinité de solution qu'on écrira sous la forme $(\dots;\dots;z)$ où $z \in \mathbb{R}$)

2. Repérage dans l'espace :

Exercice réservé 2814

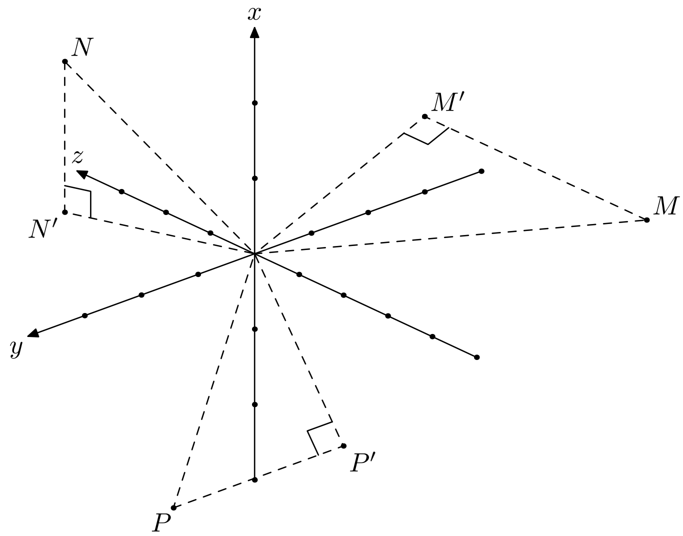
Dans l'espace munit du repère $\left(A\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ et les deux poitns M et N.



1. Déterminer les coordonnées du point M quand :
   a. M est un point du plan (EFB).
   b. M est un point du plan (HGD).
2. Déterminer les coordonnées du point N quand :
   a. N est un point du plan (EFH).
   b. N est un point du plan (EAD).

Exercice réservé 2793

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé représenté ci-dessous :

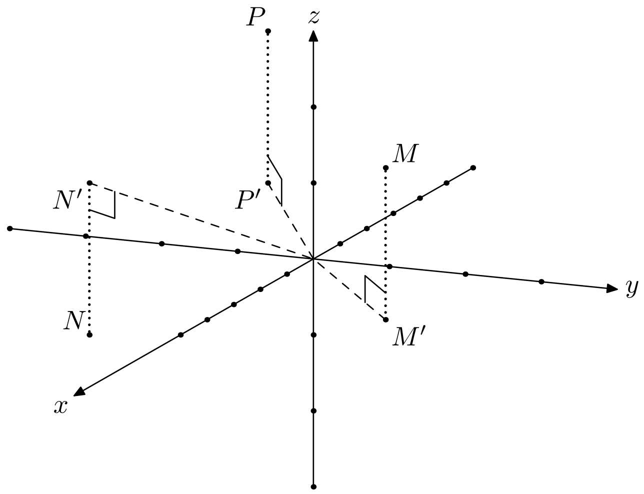


On considère les trois points M, N, P :

1. a. Le point M' est le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy).
   Déteminer les coordonnées du point M' dans ce plan.
   b. Le point N' est le projeté orthogonal de N sur le plan (Oyz).
   Déteminer les coordonnées du point N' dans ce plan.
   c. Le point P' est le projeté orthogonal de P sur le plan (Oxz).
   Déteminer les coordonnées du point P' dans ce plan.
2. Déterminer les coordonnées des trois points M, N, P dans ce repère.

Exercice 2776

On munit d'un repère orthonormé dont les graduations sur les axes sont représentées ; on considère les trois points M, N, P et leurs projections respectives M', N', P' sur le plan (OIJ) dont voici les représentations :



1. a. Déterminer les coordonnées du point M' appartenant au plan (OIJ).
   b. Donner les coordonnées du point M.
2. Déterminer les coordonnées du point N et du point P.

Exercice 2779

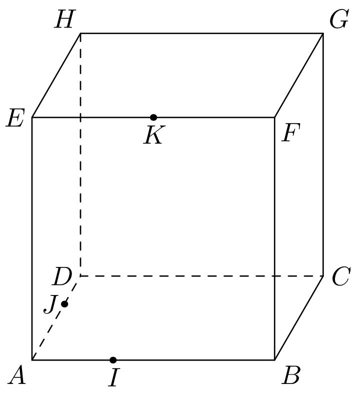
1. Montrer que les couples suivants de vecteurs sont coliéaires :
   a. $\overrightarrow{u}\,(6\,;21\,;9)$; $\overrightarrow{v}\,(4\,;14\,;6)$
   b. $\overrightarrow{u}\left(3\,;5\,;\dfrac{4}{3}\right)$; $\overrightarrow{v}\left(\dfrac{6}{5}\,;2\,;\dfrac{8}{15}\right)$
2. Justifier que les deux vecteurs suivants ne sont pas colinéaires :

   $\overrightarrow{u}\,(5\,;8\,;3)$; $\overrightarrow{v}\left(3\,;\dfrac{24}{5}\,;\dfrac{8}{5}\right)$

Exercice 2792

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre et les trois points définis par :

- Le point K est le milieu de $[EF]$;
- le point I vérifie la relation $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$;
- le point J vérifie la relation $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AD}$.



En utilisant le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$, montrer que les droites (IJ) et (KH) sont parallèles.

Exercice 6880

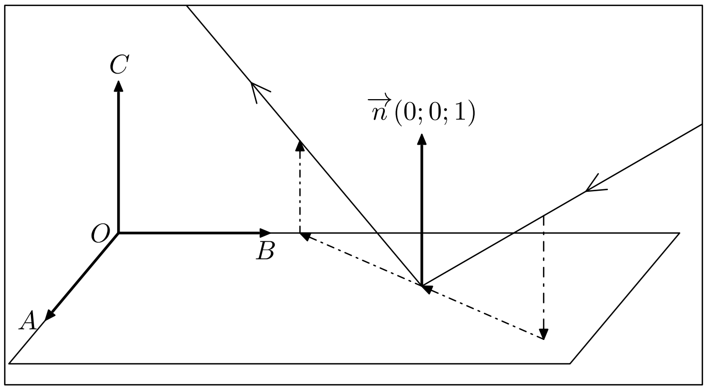
Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de "*coin de cube*", les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $(O\,;\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC})$ soit un repère orthonormé.
On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux *admises* :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\,;b\,;c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\,(a\,;b\,;-c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\,;b\,;c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\,(-a\,;b\,;c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\,;b\,;c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\,(a\,;-b\,;c)$;



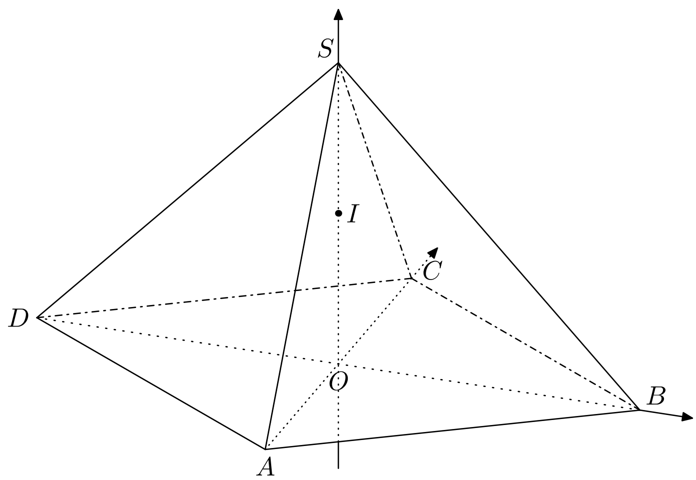
Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)

Propriété des catadioptres

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\,;b\,;c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Exercice 6886

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constitué de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB=1$.
On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $(O\,;\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OS})$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OS})$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK}=\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{SD}$ et on

note I le milieu du segment $[SO]$.

a. Déterminer les coordonnées du point K.

b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c. On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d. Déterminer les coordonnées du point L.

3. Distance dans l'espace :

Exercice 2777

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J\,;K)$. On considère les trois points A, B, C définis par leurs coordonnées :

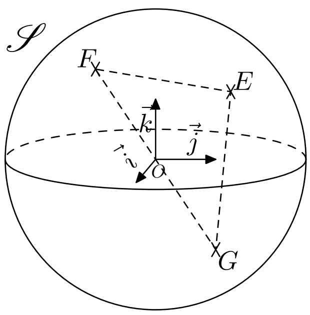
$A\,(180\,;153\,;96)$; $B\,(180\,;135\,;120)$; $C\,(190\,;133\,;106)$

1. Montrer que les points A, B, C appartiennent à une même sphère $\mathscr{S}$ de centre O.
2. Etablir que le triangle ABC est rectangle C.
3. a. Est-ce qu'un des côtés forment un diamètre de la sphère $\mathscr{S}$?

   b. Quelle propriété du plan ne peut sétendre à l'espace?

Exercice réservé 914

Dans l'espace munit du repère $(O\,;I\,;J\,;K)$ orthonormé, on considère la sphère $\mathscr{S}$ de centre O et dont le rayon a pour valeur 2 :
On considère les points E et F dont les coordonnées sont :
$E(0{,}96\,;1{,}28\,;1{,}2)$
$F\left(1{,}2\,;-\dfrac{\sqrt{15}}{5}\,;1{,}4\right)$



1. Montrer ques les points E et F sont des points de la sphère $\mathscr{S}$.
2. Soit G le point diamètralement opposé au point F dans la sphère $\mathscr{S}$. Justifier que le triangle EFG est rectangle.

Exercice 2963

Dans l'espace muni d'un repère $(O\,;I\,;J\,;K)$ orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :

$A(3\,;-1\,;5)$; $B(-2\,;2\,;3)$; $C(-1\,;-2\,;4)$; $D(5\,;8\,;4)$

1. Les points A, B, C sont-ils alignés?
2. Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.

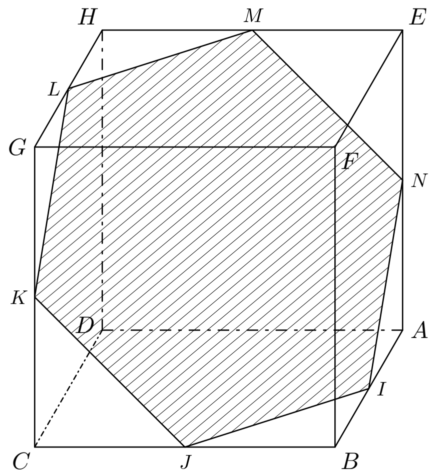
Exercice 6752

On rappelle les deux formules où A et B sont deux points du plan et I est le milieu du segment $[AB]$:

- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
On munit l'espace du repère $(C\,;\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CG})$ orthonormal.

Les points I, J, K, L, M, N sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[EA]$.



1. Déterminer les coordonnées des points I, K et L.
2. a. Déterminer les coordonnées du point O milieu du segment $[IL]$.

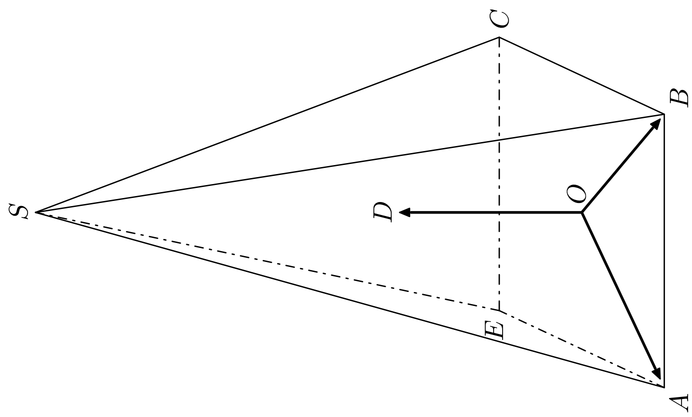
   b. Déterminer les longueurs OK et KL.
3. On admet que le polygone $IJKLMN$ est un hexagone régulier. Ainsi, le point O est le centre de ce polygone.

   a. Donner la mesure de l'angle $\widehat{KOL}$.

   b. Déterminer l'aire du triangle KOL.

Exercice réservé 6879

Dans l'espace, on considère une pyramide $SABCE$ à base carrée $ABCE$ de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $(O\,;\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OD})$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0\,;0\,;3)$ dans ce repère.



1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure.

3. On admet que le point $K\left(\frac{5}{6};-\frac{1}{6};0\right)$ est le pied de la hauteur issue de U dans le trapère $AUVE$. Déterminer l'aire du trapèze $AUVE$.

4. Représentations paramétriques d'une droite :

Exercice 5400

Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point A et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur dans chaque cas ci-dessous :

a. $A\,(3\,;0\,;-2)$; $\overrightarrow{u}\,(-1\,;-2\,;1)$

b. $A\,(2\,;-1\,;1)$; $\overrightarrow{u}\,(2\,;0\,;-4)$

Exercice 6347

On considère l'espace muni d'un repère $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\big)$ et la droite (d) admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

1. a. Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2};4;-\frac{5}{2}\right)$ appartient à la droite (d).

   b. Montrer que le point $B\left(-\frac{9}{4};\frac{3}{2};-\frac{23}{4}\right)$ n'appartient pas à la droite (d).

2. On considère la droite (d') admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{3}{2}\cdot t \\ y = 3 - 3t \\ z = -4 - \frac{9}{2}\cdot t \end{cases},\ \text{où } t\in\mathbb{R}$$

   a. Montrer que le point A appartient à la droite (d').

   b. Quelle est la position relative des droites (d) et (d')?

Exercice 5401

On considère l'espace muni d'un repère $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\big)$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentations paramétriques :

$$(d) : \begin{cases} x = 3 + 2\cdot t \\ y = -1 - 2\cdot t \\ z = 2 + 6\cdot t \end{cases} \quad (d') : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = -1 + t \\ z = - 3\cdot t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

1. Montrer que les droites (d) et (d') sont parallèles.

2. Montrer que Les droites (d) et (d') sont parallèles-strictes?
(on montrera qu'un point de (d) n'appartient pas à (d'))

Exercice réservé 5413

Dans l'espace muni d'un repère $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\big)$ orthonormé, on considère les deux points M et N de coordonnées :

$M\big(-1\,;2\,;3\big)$; $N\big(1\,;-2\,;9\big)$

$$(d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 9t \end{cases} \quad (d'): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = \text{-}6 - t \\ z = 12 - 2t \end{cases} \quad (d''): \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 6 - 2t \\ z = \text{-}3 + 3t \end{cases}$$

où t est un réel parcourant l'ensemble des réels.

1. a. A quelles droites appartient le point M?

   b. Parmi les droites (d), (d') et (d''), laquelle représente la droite (MN)?

2. Déterminer, par une autre méthode, une autre représentation de la droite (MN).

5. Représentations paramétriques d'une droite et résolution de systèmes :

Exercice 5402

On considère l'espace muni d'un repère $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\big)$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentation paramétrique :

$$(d) : \begin{cases} x = -t \\ y = -1 - t \\ z = 5 + 3t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R} \quad (d') : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont coplanaires et sécantes. On précisera les coordonnées du point d'intersection.

Exercice 5409

Dans l'espace muni d'un repère $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\big)$, on considère les deux droites (d) et (d') admettant pour représentations paramétriques :

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = - t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad (d') : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -6 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 5403

On considère l'espace muni d'un repère $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\big)$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentation paramétrique :

$$(d) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R} \quad (d') : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -1 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R}$$

Justifier que ces deux droites sont non-coplanaires.

6. Représentations paramétriques d'un plan :

Exercice 5424

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, on considère les trois points :

$A\,(2\,;0\,;-1)\quad;\quad B\,(1\,;0\,;3)\quad;\quad C\,(2\,;1\,;1)$

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. En choisissant $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ comme couple de vecteurs directeurs, montrer que le plan (ABC) admet pour représentation paramétrique le système suivant :
$$\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t' \\ z = 4t + 2t' - 1 \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R},\ t'\in\mathbb{R}$$
3. Justifier que le point $D\,(1\,;-2\,;-1)$ appartient au plan (ABC).

Exercice 5425

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, on considère les trois points :

$A\,(3\,;-1\,;2)\quad;\quad B\,(3\,;1\,;1)\quad;\quad C\,(2\,;-1\,;1)$

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).

Exercice 6350

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, on considère les trois points :

$A(2\,;0\,;-1)\quad;\quad B(1\,;2\,;2)\quad;\quad C(-1\,;1\,;-2)$

1. a. Les points A, B, C déterminent-ils un plan ? Justifier votre réponse.

   b. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC)
2. a. On considère le point $D\,(0\,;3\,;1)$. Le point D appartient-il au plan (ABC) ? Justifier votre réponse.

   b. On considère le point $E\,(7\,;0\,;4)$. Le point E appartient-il au plan (ABC) ? Justifier votre réponse.

7. Coplanéarité :

Exercice 6945

1. On considère les trois vecteurs :
   $\vec{u}\,(1\,;-1\,;2)\quad;\quad\vec{v}\,(1\,;1\,;3)\quad;\quad\vec{w}\,(-1\,;-9\,;-7)$
   Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.
2. On considère les trois vecteurs :
   $\vec{u}\,(2\,;-2\,;1)\quad;\quad\vec{v}\,(1\,;4\,;-2)\quad;\quad\vec{w}\,(1\,;-16\,;6)$
   Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 6947

On considère l'espace muni d'un repère. Dans chacun des cas et sans justification, donner la relation $\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}$ justifiant la coplanéarité des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

1. $\vec{u}\,(3\,;2\,;0)\quad;\quad\vec{v}\,(1\,;0\,;1)\quad;\quad\vec{w}\,(7\,;6\,;-2)$
2. $\vec{u}\,(1\,;0\,;-1)\quad;\quad\vec{v}\,(3\,;-1\,;2)\quad;\quad\vec{w}\,(1\,;-1\,;4)$

8. Produit scalaire :

Exercice 2778

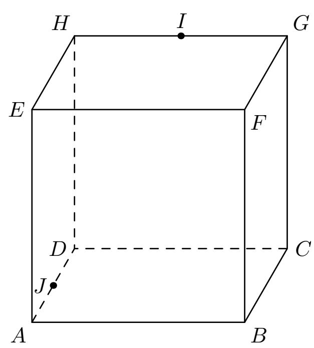
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points suivants :

$A\,(6\,;5\,;1)\quad;\quad B\,(-4\,;2\,;-4)\quad;\quad C\,(4\,;7\,;2)$

Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en C.

Exercice 5410

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-contre où les points I et J sont respectivement les milieux des segments $[GH]$ et $[AD]$.



1. En utilisant les propriétés du cube et du carrés, déterminer la valeur des produits scalaires :

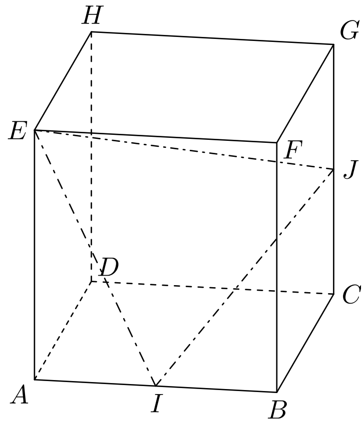
   a. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{DH}$ b. $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ c. $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HG}$
2. En utilisant également la relation de Chasles, déterminer la valeur des produit scalaires suivants :

ⓐ $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{GF}$ ⓑ $\overrightarrow{JF}\cdot\overrightarrow{AB}$ ⓒ $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{EF}$

Exercice réservé 4188

Dans cet exercice, une réponse par "VRAI" ou "FAUX", sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 0,4 point. Toute réponse erronée enlève 0,1 point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.

On donne le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.
Le candidat est appelé à juger chacune des 10 affirmations suivantes.



	Affirmation	Vrai	Faux
1.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}$		
2.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$		
3.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$		
4.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=AB\times IC\times\cos\dfrac{\pi}{3}$		

9. Déterminer la mesure d'un angle :

Exercice 4310

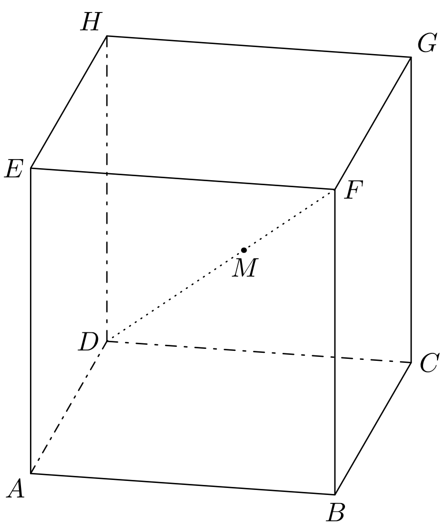
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les trois points :
$E(2\,;1\,;-3)$; $F(1\,;-1\,;2)$; $G(-1\,;3\,;1)$

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse :

une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{FEG}$, arrondie au degré, est 50^o.

Exercice 6967

On considère un cuble $ABCDEFGH$ dont la représentation en perspective cavalière est donnée ci-dessous :



Les arêtes sont de longueur A. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\big(D\,;\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH}\big)$

A tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que :
$\overrightarrow{DM}=x\cdot\overrightarrow{DF}$

On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$.
On a : $0\leqslant\theta\leqslant\pi$

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D? avec le point F?

2. On admet que le point M a pour coordonnées $M\,(x\,;x\,;x)$.

   Montrer que : $\cos(\theta)=\dfrac{3\cdot x^2-4\cdot x+1}{3\cdot x^2-4\cdot x+2}$
   (On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$)

10. Droites et orthogonalités :

Exercice 5414

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé, on considère le deux droites (d) et (d') définies par leur représentation paramétrique :

$$(d)\begin{cases} x = -3+2t \\ y = -4+3t \\ z = 3-t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R} \qquad (d')\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3-2t \\ z = -2t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R}$$

1. Montrer que les droites (d) et (d') sont orthogonales entre elles.
2. Les droites (d) et (d') sont-elles sécantes? Si oui, préciser le point d'intersection.

Exercice 6968

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé, on considère deux droites (d) et (d') admettant pour représentation paramétrique :

$$(d)\begin{cases} x = -3+2\cdot t \\ y = -t \\ z = -1+t \end{cases} t\in\mathbb{R} \quad ; \quad (d')\begin{cases} x = -1-2\cdot t \\ y = 1+3\cdot t \\ z = -t \end{cases} t\in\mathbb{R}$$

1. Montrer que les droites (d) et (d') sont sécantes. On déterminera les coordonnées de leur point M d'intersection.
2. a. On considère les deux vecteurs $\vec{u}\,(2;-1;1)$ et $\vec{v}\,(-2;3;-1)$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ qui soit orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   b. En déduire une représentation paramétriques de la droite (Δ) passsant par le point M et orthogonale aux deux droites (d) et (d').

Exercice réservé 4096

On admet que si (d) et (d') sont deux droites non coplanaires, il existe une unique droite (Δ) perpendiculaire à (d) et (d).

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On note (d) la droite des abscisses et (d') la droite admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 3+3\cdot t \\ z = 1-t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

On considère la droite (Δ) perpendiculaire commune à (d) et (d'). Prouver qu'il existe deux réels b et c tels que le vecteur : $\vec{w} = b\cdot\vec{j} + c\cdot\vec{k}$
soit un vecteur directeur de (Δ).

Exercice 6405

On considère l'espace muni d'un repère $\left(O;I;J;K\right)$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour équation paramétrique :

$$(d)\begin{cases} x = 3+t \\ y = -5+t \\ z = 4 \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R} \quad ; \quad (d')\begin{cases} x = 2+2\cdot t \\ y = 3+t \\ z = -2-t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R}$$

1. Montrer que les droites (d) et (d') sont non-coplanaires.
2. On suppose l'existence d'une droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) et perpendiculaire à la droite (d')

   a. Justifier l'existence d'un réel t tel que la droite (Δ) admette pour représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = 3+t+t' \\ y = -5+t-t' \\ z = 4+t' \end{cases} \quad \text{où } t'\in\mathbb{R}$$

   b. En déduire une équation paramétrique de la droite (Δ).

11. Vecteurs normaux à un plan :

Exercice 5411

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A(0;1;-1) \quad ; \quad B(1;-1;-8) \quad ; \quad C(-1;0;0)$$

Montrer que le vecteur $\vec{u}\,(3;-2;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 5412

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A\,(1;0;0) \quad ; \quad B\,(1;1;1) \quad ; \quad C(7;2;-1)$$

Montrer que le vecteur $\vec{u}\,(-1;2;-2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice réservé 4110

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

Pour chacune des questions, déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ non-nul et orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

1. $\vec{u}\,(2;-1;3)$ et $\vec{v}\,(-1;1;1)$.
2. $\vec{u}\,(5;0;1)$ et $\vec{v}\,(-1;1;2)$.

Exercice réservé 5415

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A(2;-1;-1) \quad ; \quad B(-1;3;1) \quad ; \quad C(1;1;-1)$$

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer un vecteur $\vec{u}$ non-nul à coordonnées entières et orthogonal au plan (ABC).

Exercice 5417

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère le plan $(\mathcal{P})$ admettant pour équation cartésienne :

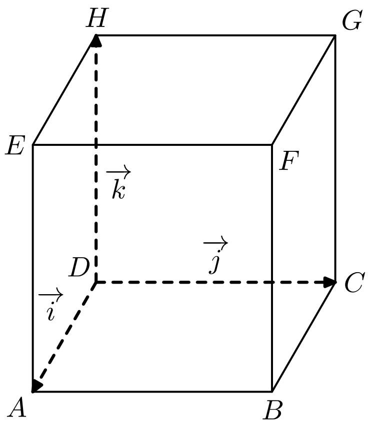
$$2\cdot x + 3\cdot y - z + 1 = 0$$

Le vecteur $\vec{u}\,(4;-2;2)$ admet-il un représentant inclus dans le plan $(\mathcal{P})$.

12. Equation cartésienne du plan :

Exercice 4125

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



On munit l'espace du repère $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$.

1. Nommer les plans admettant les équations cartésiennes suivantes :

   a. $z=0$ b. $y=1$

   c. $x+y=1$ d. $x+y+z=2$

   e. $x+y+z=1$ f. $x-y=0$

2. Déterminer l'équation cartésienne de chacun des plans suivants :

   a. (EHD) b. (FGH) c. (HDC)

3. a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{BG}$ est orthogonal au plan (EFC).

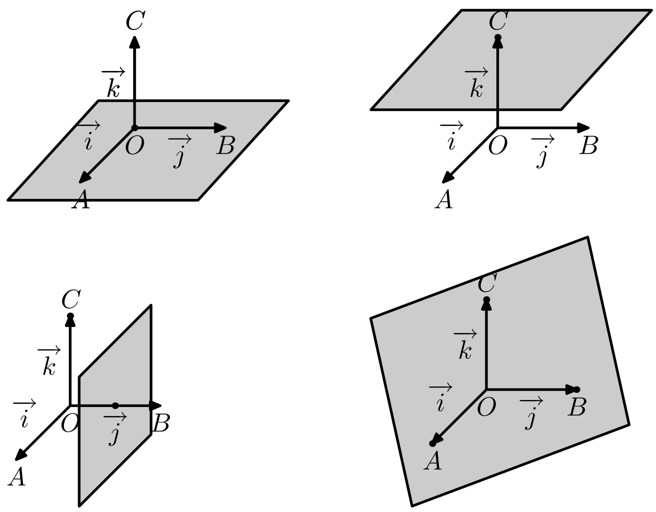
   b. En déduire une équation du plan (EFC).

Exercice 4119

On considère les quatre points suivants :

1. le plan $(\mathcal{P}_1)$ est parallèle au plan (OAB) et passe par le point C ;
2. le plan $(\mathcal{P}_2)$ est passent par les points A, B, C ;
3. le plan $(\mathcal{P}_3)$ médian du segment $[OB]$;
4. le plan $(\mathcal{P}_4)$ est parallèle au plan (OAB) et passe par le point O ;

Associer à chaque plan une des représentations ci-dessous et donner son équation cartésienne.



Exercice 5418

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $A\left(1\,;2\,;-1\right)$ et admettant le vecteur $\vec{n}\left(1\,;-1\,;3\right)$ pour vecteur normal.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. Les points $B\left(2\,;8\,;1\right)$ et $C\left(-2\,;5\,;1\right)$ appartiennent-ils au plan $\mathcal{P}$?

Exercice 5416

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point A et admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal où :

$A\left(3\,;1\,;2\right)$; $\vec{n}\left(2\,;1\,;-1\right)$

On considère les points M et N deux points de l'espace où :

$M\left(4\,;-2\,;1\right)$; $N\left(-2\,;8\,;2\right)$

Les points M et N appartiennent-ils au plan $(\mathcal{P})$?

Exercice réservé 4092

L'espace E est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $\left(1\,;0\,;2\right)$, $\left(1\,;1\,;4\right)$ et $\left(-1\,;1\,;1\right)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\left(3\,;4\,;-2\right)$.

   a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 4097

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
On considère les points :
$A\left(1\,;-1\,;4\right)$; $B\left(7\,;-1\,;-2\right)$; $C\left(1\,;5\,;-2\right)$

1. Justifier que les trois points A, B, C forment un plan.

2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;1\,;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. En déduire que $x+y+z-4=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice réservé 4095

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ orthonormé. On considère les deux points :
$A\,(8\,;0\,;8)\quad;\quad B\,(10\,;3\,;10)$

ainsi que la droite (d) admettant pour représentation paramétrique :

$$(d):\ \begin{cases} x=-5+3t \\ y=\ \ 1+2t \\ z=\ \ \ \ \ -2t \end{cases}\quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

1. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) définie par A et B.

   b. Démontrer que (d) et (Δ) sont non coplanaires.

2. Le plan $(\mathcal{P})$ est parallèle à (d) et contient (Δ). Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;-2\,;1)$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$.

13. Equation cartésienne du plan - recherche du vecteur normal :

Exercice 4111

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

On considère le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne suivante :
$(\mathcal{P}):\ 5\cdot x-2\cdot y+z-5=0$

1. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $(\mathcal{P})$.

2. Déterminer l'équation du plan $(\mathcal{Q})$ parallèle au plan $(\mathcal{P})$ et passant par le point $A(5\,;-1\,;2)$

Exercice réservé 5419

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, on considère les trois points :

$A(1\,;1\,;-2)\quad;\quad B(3\,;-1\,;2)\quad;\quad C\,(0\,;2\,;1)$

1. Justifier que les trois points définissent un plan.

2. Déterminer un vecteur normal non-nul au plan (ABC) ayant ses coordonnées entières.

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 4112

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

On considère les point $A(2\,;-3\,;-1)$ et $B(-1\,;1\,;0)$.

Déterminer l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$.

14. Positions relatives de droites et de plans :

Exercice 4088

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

On considère :

- $(\mathcal{P})$ est le plan passant par $A(3\,;1\,;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(1\,;-4\,;1)$;
- (d) est la droite passant par $B(1\,;4\,;2)$ de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;1\,;3)$.

1. Démontrer que le plan $(\mathcal{P})$ a pour équation cartésienne :
$x-4y+z-1=0$

2. Montrer que la droite (d) est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Exercice réservé 5451

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, on considère la droite (d) dont on donne une représentation paramétrique, et le plan $(\mathcal{P})$ dont on donne une équation cartésienne :

$$(d):\ \begin{cases} x=1-2t \\ y=t \\ z=-5-4t \end{cases}\quad \text{où } t\in\mathbb{R}\quad;\quad (\mathcal{P}):\ 3x+2y-z-5=0$$

Montrer que la droite (d) est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 5422

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, on considère la droite (d) admettant la représentation paramétrique et le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne définies par :

$$(d):\ \begin{cases} x=3-t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}\quad;\quad (\mathcal{P}):\ 2x-4y-2z+3=0$$

1. a. Justifier que la droite (d) est parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

   b. La droite (d) est-elle incluse dans le plan $(\mathcal{P})$?

2. On considère le plan $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :
$(\mathcal{P}'):\ 2x-4y-2z+c=0\quad$ où $c\in\mathbb{R}$

   Déterminer la valeur du paramètre c afin que la droite (d) soit incluse dans le plan $(\mathcal{P}')$.

Exercice réservé 4083

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé direct. On considère les points :

$$A(-2\,;0\,;1) \quad ; \quad B(1\,;2\,;-1) \quad ; \quad C(-2\,;2\,;2)$$

On admettra que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x-y+2z+2=0$

2. Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les plans d'équations respectives : $x+y-3z+3=0 \quad ; \quad x-2y+6z=0$

   Montrer que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants selon une droite (d) dont un système d'équations paramétriques est :
   $$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

3. Démontrer que la droite (d) et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 5423

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère la droite (d) admettant la représentation paramétrique et le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne définies par :

$$(d) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+2t \end{cases} \quad ; \quad (\mathcal{P}) : \ 3x-y+2z+1=0$$

1. Justifier que la droite (d) est sécante au plan $(\mathcal{P})$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et du plan $(\mathcal{P})$.

15. Positions relatives de plans :

Exercice 5420

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :

$$(\mathcal{P}) : \ 2x-y+z+3=0 \quad ; \quad (\mathcal{P}') : \ -4x+2y-2z-1=0$$

Justifier que ces deux plans sont parallèles.

Exercice réservé 5463

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on donne les trois points :

$$A(1\,;2\,;-1) \quad ; \quad B(-3\,;-2\,;3) \quad ; \quad C(0\,;-2\,;-3)$$

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\,;-1\,;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2. Soit $(\mathcal{P})$ le plan dont une équation cartésienne est : $x+y-z+2=0$

   Démontrer que les plans (ABC) et $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires.

Exercice réservé 5450

Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équations respectives :

$(\mathcal{P}) : \ x-y-z-2=0 \quad ; \quad (\mathcal{P}') : \ x+y+3z=0$

1. On considère la droite (d) admettant pour représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

   a. Justifier que la droite (d) est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

   b. Déterminer les coordonnées du point M d'intersection du plan $(\mathcal{P})$ avec la droite (d).

2. On considère la droite (Δ) ayant pour représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases} \quad \text{où } t'\in\mathbb{R}$$

   a. Justifier que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants.

   b. Montrer que la droite (Δ) est la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Exercice 3129

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. Soit $(\mathcal{P}_1)$ le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et $(\mathcal{P}_2)$ le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

1. Montrer que $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont perpendiculaires.

   On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si, et seulement si, un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
   Montrer qu'une représentation paramétrique de (d) est :
   $$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

Exercice 5421

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :

$$(\mathcal{P}) : \ x+2y-z+3=0 \quad ; \quad (\mathcal{P}') : \ 4x-2y+z-1=0$$

1. Justifier que ces deux plans sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Exercice réservé 4093

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonomal, on considère les deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ admettant pour équations cartésiennes :

$$(\mathcal{P}_1):\ 2x+y+2z+1=0 \quad ; \quad (\mathcal{P}_2):\ x-2y+6z=0$$

Montrer que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants selon une droite (d) dont on déterminera une représentation paramétrique.

Exercice réservé 4039

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. On considère :

- les quatre points :
  $A\,(0\,;0\,;3)$; $E\,(2\,;0\,;4)$; $C\,(-1\,;1\,;2)$; $D(1\,;-4\,;0)$
- les deux plans :
  $(\mathcal{P}_1):\ 7x+4y-3z+9=0$; $(\mathcal{P}_2):\ x-2y=0.$
- Les deux droites admettant pour représentation paramétrique :

$$(\Delta_1)\begin{cases} x=\ \ -1+\ t \\ y=\ \ -8+2t \\ z=-10+5t \end{cases} \text{où } t\in\mathbb{R} \ ;\ (\Delta_2)\begin{cases} x=7+2t' \\ y=8+4t' \\ z=8-\ t' \end{cases} \text{où } t'\in\mathbb{R}.$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Le plan $(\mathcal{P}_1)$ est	Le plan (ABC)	Le plan (BCD)	Le plan (ACD)	Le plan (AED)
La droite (Δ_1) contient	Le point A	Le point B	Le point C	Le point D
Position relative de $(\mathcal{P}_1)$ et de (Δ_1)	(Δ_1) est strictement parallèle à $(\mathcal{P}_1)$	(Δ_1) est incluse dans $(\mathcal{P}_1)$	(Δ_1) coupe $(\mathcal{P}_1)$	(Δ_1) est orthogonale à $(\mathcal{P}_1)$
Position relative de (Δ_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle à (Δ_2)	(Δ_1) et (Δ_2) sont confondues	(Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes	(Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires.
L'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et de $(\mathcal{P}_2)$ est une droite dont une représentation paramétrique est	$\begin{cases} x=t \\ y=-2+\frac{1}{2}t \\ z=3t \end{cases}$	$\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=3+6t \end{cases}$	$\begin{cases} x=5t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}$	$\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z=-3t \end{cases}$

16. Projeté orthogonal :

Exercice 4130

On considère l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{j}\right)$.

1. On considère la droite (d) passant par le point $A(1\,;-2\,;3)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\,(-2\,;0\,;1)$ pour vecteur directeur.
   Soit M le point de l'espace de coordonnées $(1\,;-1\,;13)$, déterminer les coordonnées du projeté H du point M sur la droite (d).
2. Soit $(\mathcal{P})$ le plan admettant pour équation cartésienne :
   $3{\cdot}x-y+2{\cdot}z=0$
   On considère le point $N(15\,;1\,;6)$. Déterminer les coordonnées du point I projeté orthogonal du point N dans le plan $(\mathcal{P})$.

Exercice réservé 6084

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation :
$x-y+3z+1=0$
et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

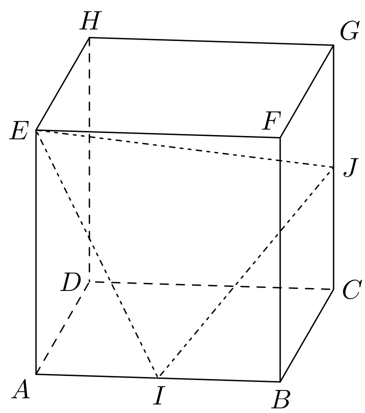
$$\begin{cases} x\ =\ \ 2t \\ y\ =\ \ \ 1\ +\ \ t \\ z\ =\ -5\ +\ 3t \end{cases} ,\quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

On donne les points :
$A\,(1\,;1\,;0)$; $B\,(3\,;0\,;-1)$; $C\,(7\,;1\,;-2)$

1. Justifier que la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
2. Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont-ils parallèles? Justifier votre réponse?
3. Déterminer les coordonnées du point M projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 6068

On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et on note I et J les milieux des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. On utilisera le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$



1. Déterminer l'équation cartésienne du plan EFJ.
2. Déterminer les coordonnées du point P projeté du point I sur le plan (EFJ).
3. Déterminer la distance IP.
4. Montrer que le volume du tétraèdre $EFIJ$ est égal à $\dfrac{1}{6}$

Exercice réservé 4131

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ d'équations respectives :
$x+y+z=0$; $2x+3y+z-4=0$

1. Montrer que l'instersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ est la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$

2. Soit λ un nombre réel.
On considère le plan $(\mathcal{P}_\lambda)$ d'équation :
$(1-\lambda)\cdot(x+y+z)+\lambda\cdot(2x+3y+z-4)=0$

a. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\left(1+\lambda\,;1+2\lambda\,;1\right)$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P}_\lambda)$.

b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_\lambda)$ sont confondus.

c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_\lambda)$ sont perpendiculaires?

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d'), intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_{-1})$.
Montrer que les droites (d) et (d') sont confondus.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans lévaluation.*

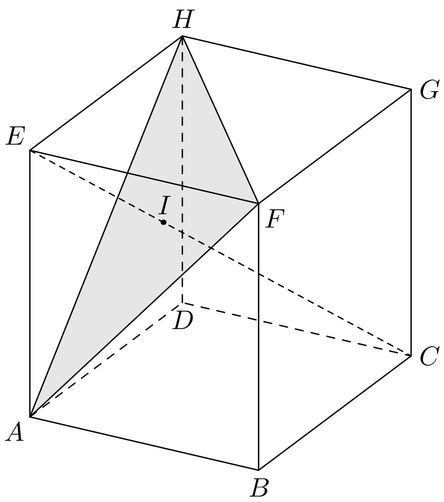
On considère le point $A\left(1\,;1\,;1\right)$.

Déterminer la distance du point A à la droite (d), c'est à dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite (d).

17. Un peu plus :

Exercice 4317

On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1.
On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).



1. On se place dans le repère $\left(D\,;\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH}\right)$. Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

$A\left(1;0;0\right)$; $B\left(1;1;0\right)$; $C\left(0;1;0\right)$; $D\left(0;0;0\right)$
$E\left(1;0;1\right)$; $F\left(1;1;1\right)$; $G\left(0;1;1\right)$; $H\left(0;0;1\right)$

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).

c. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).
Que représente le point I pour le triangle AFH?

2. *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Définitions :

- Un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
- il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
- il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

Préciser de quel*(s)* type*(s)* est le tátraèdre $EAFH$.

Exercice réservé 5462

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$.

Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $3x+y-z-1=0$ et (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

1. a. Le point $C\left(1\,;3\,;2\right)$ appartient-il au plan $(\mathcal{P})$? Justifier.

b. Démontrer que la droite (d) est incluse dans le plan $(\mathcal{P})$.

2. Soit $(\mathcal{Q})$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite (d).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$.

b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(\mathcal{Q})$ et de la droite (d).

c. Montrer que : $CI=\sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite (d) de coordonnées : $M_t\left(-t+1\,;2t\,;-t+2\right)$

a. Vérifier que pour tout nombre réel t, :
$CM_t{}^2=6t^2-12t+9$.

b. Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

255. Exercices non-classés :

Exercice 4036

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On note $\mathcal{D}$ la droite des abscisses et $\mathcal{D}'$, la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \quad - \ t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - \ t \end{array}\right.$$

1. Justifier que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Prouver qu'il existe deux rélles b et c tels que le vecteur $\vec{w}=b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k}$ soit un vecteur directeur de Δ.

Exercice 4037

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On note (D) la droite passant par les points $A\big(1\,;-2\,;-1\big)$ et $B\big(3\,;-5\,;-2\big)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :
$$\left\{\begin{array}{l} x = \ \ 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - \ t \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$
2. On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 - \ k \\ y = 1 + 2k \\ z = \quad\ \ k \end{array}\right. \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}.$$
Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.
3. On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $4{\cdot}x+y+5{\cdot}z+3=0$.
   a. Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ contient la droite (D).
   b. Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les cordonnées.

Exercice 4038

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère le point A de coordonnées $\big(-2\,;8\,;4\big)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\big(1\,;5\,;-1\big)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exercice 4057

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. Soit A le point de coordonnée $\big(3\,;1\,;3\big)$.

On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\big(1\,;2\,;-1\big)$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2t \\ y = 3 + \ t \\ z = \quad\ \ t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Dire laquelle des trois affirmations suivantes est exacte. Aucune justification n'est demandée :

1. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et parallèles ;
2. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et sécantes ;
3. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non coplanaires.

Exercice 4066

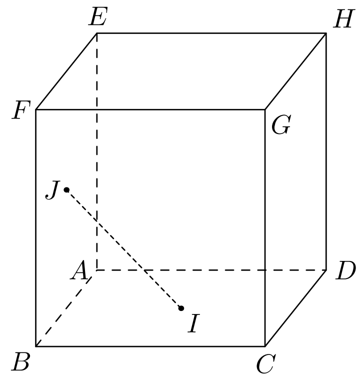
On considère les deux droites de représentation paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \ \ 2 - 3t \\ y = \ \ 1 + \ t \\ z = -3 + 2t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \ \ 7 + 2u \\ y = \ \ 2 + 2u \\ z = -6 - \ u \end{array}\right. \quad \text{où } u\in\mathbb{R}$$

Montrer que ces deux droites sont sécantes. Donner les coordonnées du point d'intersection.

Exercice 4129

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$. Les points I et J représentent respectivement les centres des faces $ABCD$ et $ABFE$.



On munit l'espace du repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Donner les coordonnées des points I et J.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. On considère la droite (Δ) admettant la représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + \ t \\ y = \dfrac{1}{2} + 2{\cdot}t \\ z = \quad - \ t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$
Démontrer que les droites (Δ) et (IJ) sont non-coplonaires.
3. a. Justifier que le plan (AGH) admet pour équation : $y-z=0$
   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (AGH).

Exercice 4035

Indiquer pour la proposition suivante si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

La droite de l'espace passant par le point B de coordonnées $(2\,;3\,;4)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\,(1\,;2\,;3)$ comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = 3t+1 \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Exercice 4065

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère les droites (d) et (d') admettant respectivement les représentations paramétriques suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+2\cdot t \\ y = -2-3\cdot t \\ z = -1-t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 2-k \\ y = 1+2\cdot k \\ z = k \end{array}\right. \quad \text{où } k\in\mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

Exercice 4067

1. On considère les deux droites (d) et (d') dont les représentations paramétriques sont respectivement :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2+4\cdot t \\ y = 1-2\cdot t \\ z = -3+t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 5-2\cdot k \\ y = -1+k \\ z = 2-\frac{1}{2}\cdot k \end{array}\right. \quad \text{où } k\in\mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont coplanaires.

2. On considère les droites (Δ) et (Δ') dont les représentations paramétriques sont respectivement :

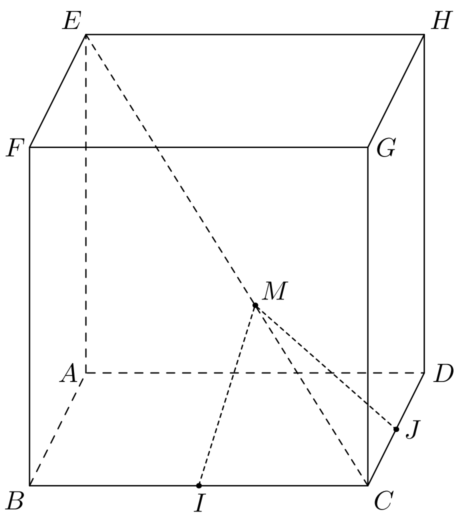
$$\left\{\begin{array}{l} x = 3+2\cdot t \\ y = -3-t \\ z = 6+3\cdot t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -1-k \\ y = 2+2\cdot k \\ z = 1-k \end{array}\right. \quad \text{où } k\in\mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (Δ) et (Δ') sont coplanaires.

Exercice 4313

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$. Soit M un point quelconque du segment $[CE]$.

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.



1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

   b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\,;1-t\,;t)$.

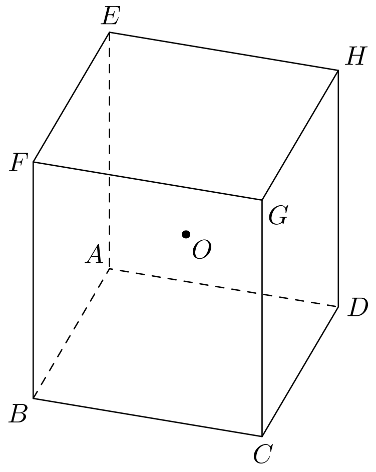
2. a. Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment $[IJ]$.

   b. En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.

   c. Exprimer IM^2 en fonction de t.

Exercice 4024

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous de centre O.



Déterminer les coordonnées des points de chacun des sommets du cube ainsi que du point O dans chacun des repères suivants :

a. $\left(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BF}\right)$ b. $\left(A\,;\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$

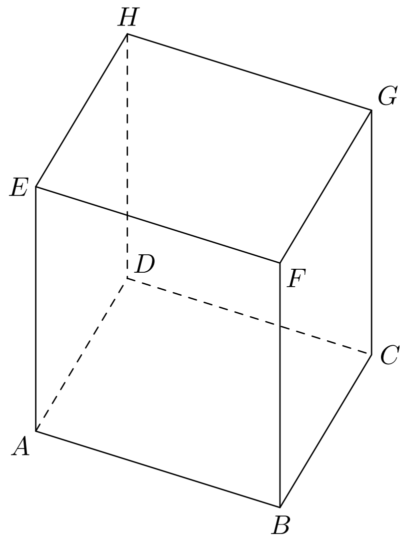
c. $\left(O\,;\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OG}\,;\overrightarrow{OE}\right)$

Exercice 4247

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 3

On choisit le repère orthonormé $\left(D\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{i} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DA} \quad ; \quad \vec{j} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DC} \quad ; \quad \vec{k} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DH}$$



1. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C\,;2)\,;\,(E\,;1)\}$.

On admet que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ ont les coordonnées suivantes :

$$\overrightarrow{AE}\,(0\,;0\,;3) \quad ; \quad \overrightarrow{DL}\,(1\,;2\,;1)$$

Soit $(a\,;b)$ un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que : $\overrightarrow{AM}=a\cdot\overrightarrow{AE}$
et N le point de la droite (DL) tel que : $\overrightarrow{DN}=b\cdot\overrightarrow{DL}$

2. Montrer que les vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple $(a\,;b)$vérifie le système :

$$\begin{cases} -a+2b=1 \\ 3a-b=0 \end{cases}$$

3. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

4. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

