Terminale S/Annales sur les suites

1. Etudes de suites :

Exercice 6762

Soit u la suite définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1}=2{\cdot}u_n+2{\cdot}n^2-n$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n=u_n+2{\cdot}n^2+3{\cdot}n+5$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules `C2` et `B3` et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et u_n en fonction de n uniquement.

Exercice 6256

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0=0 \quad ; \quad u_{n+1}=u_n+2{\cdot}n+2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On considère les deux fonctions ci-dessous, extrait d'algorithmes, prenant pour argument un entier `n` :

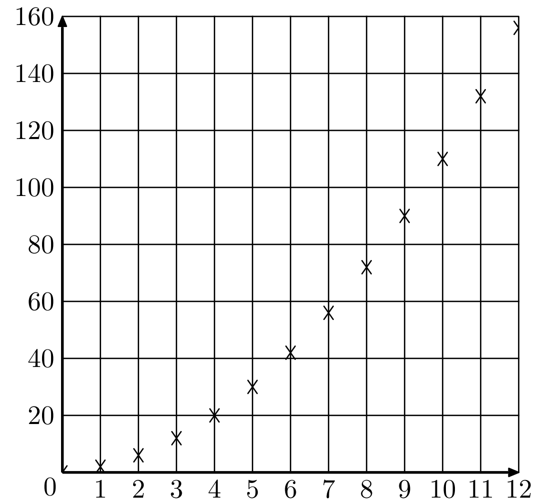
Algorithme 1
```
Fonction f(n)
  u ← 0
  Pour i allant de 1 à n
    u ← u+2·i+2
  Fin pour
  Renvoyer u
```

Algorithme 2
```
Fonction f(n)
  u ← 0
  Pour i allant de 0 à n−1
    u ← u+2·i+2
  Fin pour
  Renvoyer u
```

De ces deux fonctions, laquelle renvoie la valeur du terme u_n de rang `n`, la valeur fourni en argument lors de l'appel à la fonction?

3. A l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n)?
Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n : $\quad u_n=a{\cdot}n^2+b{\cdot}n+c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par :
$v_n=u_{n+1}-u_n$

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n)?

b. On définit, pour tout entier naturel n :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} v_k=v_0+v_1+\cdots+v_n$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$S_n=(n+1)(n+2)$

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$S_n=u_{n+1}-u_0$,
puis exprimer u_n en fonction de n.

Exercice réservé 5079

Partie A

On considère la fonction `f`, extrait d'un algorithme, et dont l'argument est un entier naturel.

```
Fonction f(N)
    U ← 0
    Pour k allant de 0 à N−1
        U ← 3·U−2·k+3
    Fin Pour
    Renvoyer U
```

Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction lorsqu'elle est appelé avec la valeur 3 pour l'argument `N`?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier nature n :

$u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 2 \cdot n + 3$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$u_n \geqslant n$

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n :
$u_n = 3^n + n - 1$

5. Soit p un entier naturel non nul.

   a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

   b. Justifier que : $n_0 \leqslant 3 \cdot p$.

   c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

   d. Proposer une fonction qui, pour une valeur p passée en argument, renvoye la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Exercice 5019

1. On considère la fonction f, donnée ci-dessous et issue d'un algorithme, prenant les arguments a, b, N de valeurs entières non-nul :

```
Fonction f(a,b,N)
    u ← a
    v ← b
    n ← 0
    Tant que n<N
        n ← n+1
        u ← (a+b)/2
        v ← √((a²+b²)/2)
        a ← u
        b ← v.
    Fin Tant que
    Renvoyer (u;v)
```

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant y indiquant les valeurs prises par les variables de la fonction f lors d'une exécution pas à pas et lorsque l'appel est effectué avec les valeurs a=4, b=9 et N=2. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n > 0 \quad ; \quad v_n > 0$

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \leqslant v_n$.

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Exercice 3836

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4} \cdot u_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot u_n$

   a. Calculer v_0.

   b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

   c. En déduire que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

   a. Calculer w_0.

   b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} \cdot u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

   c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_{n+1} = w_n + 2$.

   d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n :
$u_n = \frac{2 \cdot n - 1}{2^n}$

5. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

Exercice 3210

La suite (u_n) est définie par :
$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. a. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$: $u_n \geqslant 0$.

   b. En déduire que pour tout $n \geqslant 4$: $u_n \geqslant n - 2$.

ⓒ. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On définit la suite (v_n) par : $v_n = 4u_n - 8n + 24$

ⓐ. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

ⓑ. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6.$$

ⓒ. Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

ⓓ. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Exercice réservé 3472

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\cdot u_n + n - 2 \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. ⓐ. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$:
$u_n \geqslant 0$.

ⓑ. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$:
$u_n \geqslant n - 3$

ⓒ. En déduire la limite de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

3. On définit la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n = -2\cdot u_n + 3\cdot n - \dfrac{21}{2}$.

ⓐ. Démontrer que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

ⓑ. En déduire que : pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{25}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}\cdot n - \frac{21}{4}.$$

ⓒ. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

2. Suites, variations et limites :

Exercice réservé 3415

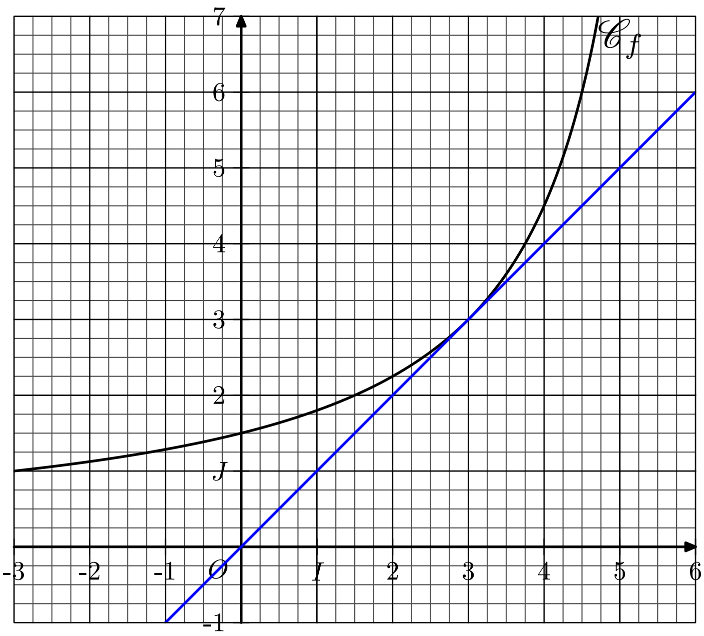
On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;6[$ par :

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit la suite (U_n) par :

$U_0 = -3$; $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. La courbe représentative de la fonction f est donné ci-dessous accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$.



Construire, dans le repère ci-dessus, les points :
$M_0(U_0\,;0)$; $M_1(U_1\,;0)$; $M_2(U_2\,;0)$; $M_3(U_3\,;0)$; $M_4(U_4\,;0)$

Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?

2. ⓐ. Démontrer que si $x < 3$ alors $\dfrac{9}{6-x} < 3$.

En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n.

ⓑ. Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

ⓒ. Que peut-on déduire des questions 2. ⓐ. et 2. ⓑ. ?

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n.

ⓐ. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

ⓑ. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.

ⓒ. Calculer la limite de la suite (U_n).

Exercice réservé 5864

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3\cdot u_n}{1 + 2\cdot u_n}$$

1. ⓐ. Calculer u_1 et u_2.

ⓑ. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n < 1$.

ⓐ. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

ⓑ. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n :
$$u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$$

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice réservé 3474

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. **Etude des propriétés de la fonction f :**

   a. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

   b. Résoudre dans l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ l'équation :
   $f(x) = x$.
   On note α la solution.

   c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\alpha\right]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[0\,;\alpha\right]$.
   De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $\left[\alpha\,;+\infty\right[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\alpha\,;+\infty\right[$.

2. **Etude de la suite (u_n) pour $u_0=0$:**

   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n+1}$$

   a. Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y=x$ et $y=f(x)$.
   Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n)?

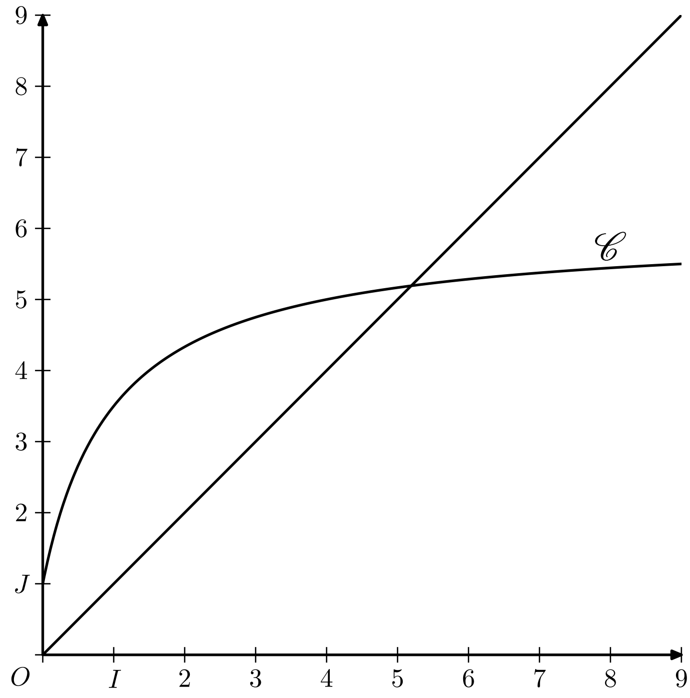
   b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel :
   $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Etude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0.

   Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0?



Exercice réservé 6269

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot{u_n}^2 + 3\cdot u_n - \frac{3}{2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.

2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.

3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :
$$v_n = u_n - 3$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n :
   $$v_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot{v_n}^2.$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
   $$-1 \leqslant v_n \leqslant 0.$$

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$v_{n+1} - v_n = -v_n\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot v_n + 1\right).$$

   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge?

5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).
   On admet que ℓ appartient à l'intervalle $\left[-1\,;0\right]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\cdot\ell^2$.
   Déterminer la valeur de ℓ.

6. Les conjectures faites dans la partie **A** sont-elles validées?

Exercice 6763

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation :

$u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ *(a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$)*

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 *cm*. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 *cm* au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille?

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$.

   a. Justifier que, pour tout entier naturel n :
   $h_{n+1} = 0{,}75 \cdot h_n + 30$

   b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variation de la suite (h_n). Démontrer cette conjecture *(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence)*.

   c. La suite (h_n) est-elle convergente? Justifier la réponse.

Exercice 6962

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n>0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.
On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$
- pour tout $n>0$: $u_0+u_1+\cdots+u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier $n>0$, on note :
   $s_n = u_0+u_1+\cdots+u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
   On a en particulier $s_1 = u_0$.

   a. Vérifier que pour tout entier $n>0$:
   $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$

   b. En déduire que pour tout entier $n>0$: $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$

   c. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$: $u_n > 1$.

3. On souhaite que la fonction f ci-dessous renvoie la valeur d'un des termes de la suite (u_n) où les arguments `u` et `n` de la fonction sont respectivement le premier terme de la suite (u_n) et le rang du terme souhaité.

```
Fonction f(u,n)
    s ← u
    Pour i allant de 1 à n
       u ← ...
       s ← ...
    Fin pour
    Renvoyer u
```

   a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-dessus.

   b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n)?

4. a. Justifier que pour tout entier naturel $n>0$: $s_n > n$.

   b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice réservé 5854

Soit deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=2$ et $v_0=10$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2 \cdot u_n + v_n}{3} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3 \cdot v_n}{4}$$

Partie A

On considère la fonction `f` extraite d'un algorithme où son argument `n` est un entier supérieur ou égal à 1 :
On appelle la fonction `f` avec pour argument la valeur `n=2`. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables en cours de cet appel :

```
Fonction f(n)
    K ← 0
    U ← 2
    V ← 10
    Tant que K<n
        K ← K+1
        W ← U
        U ← (2·U+V)/3
        V ← (W+3·V)/4
    Fin tant que
    Renvoyer (U;V)
```

K	W	U	V
0			
1			
2			

Partie B

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12} \cdot (v_n - u_n)$$

   b. Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = v_n - u_n$.
   Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$w_n = 8 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   b. Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n \leqslant 10 \quad ; \quad v_n \geqslant 2$

c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n$ est constante.
En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$

Exercice 5077

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la focntion définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{7}{x}\right) \qquad (*)$$
Démontrer que la fonction f admet un minimum.
En déduire que pour tout entier naturel n : $\quad u_n \geqslant \sqrt{7}$

2. a. Soit n un entier naturel quelconque. Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente?

   c. On déduit de la relation $(*)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que : $\quad \ell = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right)$.
   Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$$

4. On définit la suite (d_n) par :
$$d_0 = 1 \quad ; \quad d_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot d_n{}^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
   $$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n$$

   b. Voici une fonction issue d'un algorithme prenant pour argument `p` qui est un entier naturel.

```
Fonction f(p)
    d ← 1
    n ← 0
    Tant que  d>10^-p
        d ← 0,5·d^2
        n ← n+1
    Fin Tant que
    Renvoyer n
```

   En appelant la fonction avec la valeur 9, la valeur renvoyée est le nombre 5.
   Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5?
   Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

3. Suites et logarithmes :

Exercice 5966

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $\quad u_n > 1$

2. a. Etablir que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$$

   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire que le suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1 + 0{,}5u_n}{0{,}5 + u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

```
u ← 2
Pour i allant de 1 à n
    u ← (1+0,5u)/(0,5+u)
Fin Pour
```

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous indiquant les valeurs prises par les variables `i` et `u` lors de l'exécution pas à pas de cet algorithme. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996	1,000001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n par :
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 6264

On administre à un patient un médicatment par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de $10\,m\ell$ de médicament. On estime que $20\,\%$ du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi, $u_0=10$.

a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à $1\,\%$ de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de $10\,m\ell$ de médicament. On estime que $20\,\%$ du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en dessous de $5\,m\ell$, la machine réinjecte $4\,m\ell$ de produit.

Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang à la minute n.

L'algorithme suivant permet, au travers des valeurs prises par la variable v, d'obtenir la quantité restante de médicament minute par minute.

```
v ← 10
Pour n allant de 1 à 15
     v ← 0,8×v
     Si v<5
         Alors v ← v+4
     Fin Si
```

a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	10	8	6,4					8,15

n	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte $2\,m\ell$ de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à $6\,m\ell$ et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

Recopier l'algorithme précédente en le modifiant afin, qu'en fin d'exécution, la valeur de la variable b soit la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte $10\,m\ell$ de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte $1\,m\ell$ de médicament.

On estime que $20\,\%$ du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en $m\ell$, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a. Justifier que pour tout entier naturel n :
$w_{n+1} = 0{,}8\cdot w_n + 1$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = w_n - 5$.
Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

Exercice réservé 3234

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :
$$u_{n+1} \leqslant 0{,}95\, u_n \quad \text{si, et seulement si,} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1{,}9$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$$

a. Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha)=1{,}9$.

c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0-1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1{,}9.$$

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

b. Que peut-on déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :
$$0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}95^{n-16}\cdot u_{16}$$
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 3267

1. Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

a. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatres premiers termes de la suite u aux quatres premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$w_n = \frac{n}{n+1}.$$

c. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par :
$$v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
où ln désigne la fonction logarithme népérien :

a. Montrer que : $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$

b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$
Exprimer S_n en fonction de n.
Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Suites et intégrations :

Exercice 3161

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \quad \text{pour } n \geqslant 2 \end{cases} \quad ; \quad v_n = u_n - \ln n \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

1. a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul :
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$$

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :
$$u_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant u_n - \frac{1}{n} \quad ; \quad 0 \leqslant v_n \leqslant 1$$

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

b. En déduire le sens de variations de la suite (v_n).

4. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) *(on ne cherchera pas à calculer γ)*.
Quelle est la limite de la suite (u_n)?

Exercice 3144

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$$

a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. On note α_n cette solution.
Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0;1)$ et le point B_n de coordonnées $(n;0)$.

b. Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3. a. Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et α_n.

b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que :
$$f_{n+1}(\alpha_n) < 0$$

c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Etablir que $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

4. On désigne par $\mathscr{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \mathrm{e}$.

a. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\dfrac{\alpha_n^2}{n}$.

b. Etablir que : $(\mathrm{e} - \alpha_n)\ln\alpha_n \leqslant \dfrac{\alpha_n^2}{n} \leqslant (\mathrm{e} - \alpha_n)$

c. En déduire un encadrement de $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$.

d. la suite de terme général $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$ est-elle convergente? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n)?

255. Exercices non-classés :

Exercice 8144

