Terminale S/Annales sur les probabilités

1. Probabilités et suites :

Exercice 3188

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : "*Pierre gagne la n-ième partie*".
- P_n : "*Pierre perd la n-ième partie*".

On pose : $p_n = \mathcal{P}(G_n)$ et $q_n = \mathcal{P}(P_n)$.

1. Recherche d'une relation de récurrence.
   a. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $\mathcal{P}_{G_1}(G_2)$ et $\mathcal{P}_{P_1}(G_2)$.
   b. Justifier l'égalité : $p_n + q_n = 1$.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = 0{,}5 \cdot p_n + 0{,}2$.
2. Etude de la suite (p_n).

   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
   b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4326

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement "*le joueur gagne la n-ième partie*" ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc : $p_1 = 0{,}1$

1. Montrer que $p_2 = 0{,}62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première. *(on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près).*
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot p_n + \frac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul : $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

Exercice réservé 3155

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C. A l'instant 0, la puce est en A. Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
  - Soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;
  - Soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- Si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
  soit en C, soit en A de façon équiprobable.
- Si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n *(respectivement B_n, C_n)* l'événement "*à l'instant n la puce est en A*" *(respectivement en B, en C)*.

On note a_n *(respectivement b_n, c_n)* la probabilité de l'évènement A_n, *(respectivement B_n, C_n)*

On a donc : $a_0 = 1$; $b_0 = c_0 = 0$

Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer a_k, b_k et c_k pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n :
   $$a_n + b_n + c_n = 1 \quad ; \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot a_n \end{cases}$$
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n : $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n$
   c. En déduire que, pour tout entier naturel p :
   $$\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et} \quad a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} \quad b_{2p+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$$
3. Montrer que : $\lim_{n \mapsto +\infty} a_n = 0$.

   On admet que $\lim_{n \mapsto +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

 CC BY-NC

Exercice 6800

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux piéves.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1

```
Fonction f(n)
    a ← 0
    b ← 0
    Pour i allant de 1 à n faire
        d ← d'un entier
           aléatoire compris entre 1 et 6
        Si d⩽2
            Alors a ← 1−a
            Sinon
                Si d⩽4
                    Alors b ← 1−b
                Fin Si
        Fin Si
        s ← a+b
    Fin Pour
    Renvoyer s
```

   a. On appelle la fonction f avec pour argument n=3 et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4.
   Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation	X	X			X
1^{er} passage boucle Pour					
2^{e} passage boucle Pour					
3^{e} passage boucle Pour					

   b. L'appel à la fonction f permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile?

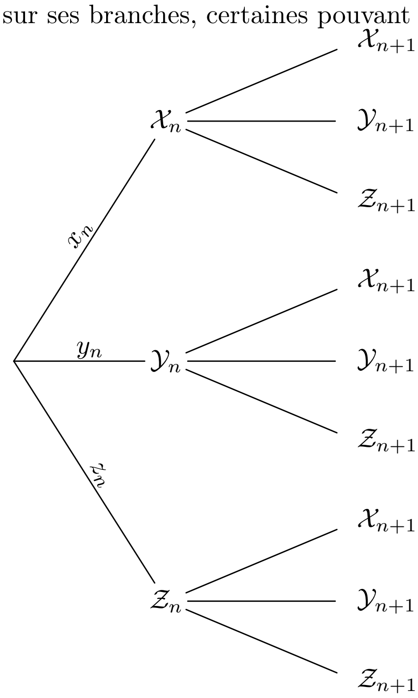
2. Pour tout entier naturel n, on note :
   - $\mathcal{X}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face*"
   - $\mathcal{Y}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face*"
   - $\mathcal{Z}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile*".

   De plus on note, $x_n=\mathcal{P}(\mathcal{X}_n)$, $y_n=\mathcal{P}(\mathcal{Y}_n)$ et $z_n=\mathcal{P}(\mathcal{Z}_n)$ les probabilités respectives des évènements $\mathcal{X}_n$, $\mathcal{Y}_n$ et $\mathcal{Z}_n$:

   a. Donner les probabilités x_0, y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

   b. Justifier que : $\mathcal{P}_{\mathcal{X}_n}(\mathcal{X}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$

   c. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



   d. Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

   e. En déduire que, pour tout entier naturel n, :
   $$y_{n+1} = -\frac{1}{3}\cdot y_n + \frac{2}{3}$$

   f. On pose, pour tout entier naturel n : $b_n=y_n-\dfrac{1}{2}$
   Montrer que la suite (b_n) est géométrique.
   En déduire que, pour tout entier naturel n :
   $$y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

   g. Calculer $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} y_n$.
   Interpréter le résultat.

2. Lois uniformes et exponentielles :

Exercice 3206

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda>0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en passe avant l'instant t est égale à :
$$P(\mathcal{X}\leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$$

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la proba-

 BY-NC

bilité $P(\mathcal{X}>6)$ soit égale à 0,3.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda=0{,}2$

2. A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $\mathrm{e}^{-0{,}4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans?

5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.
Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

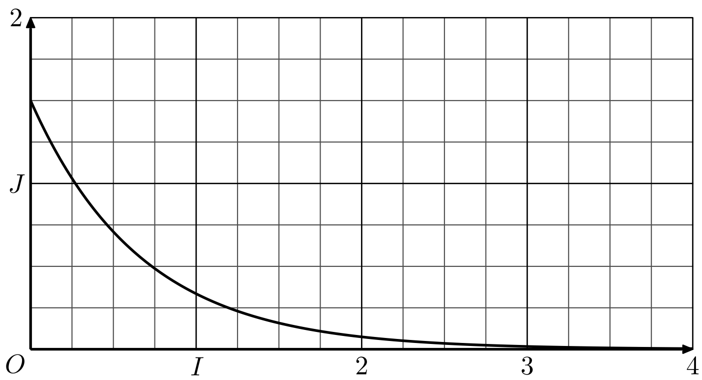
Exercice réservé 3181

Partie A

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que :

$$P(\mathcal{X}\leqslant a) = \int_0^a \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

La courbe donnée en ci-dessous représente la fonction densité associée :



1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(\mathcal{X}\leqslant 1)$.

2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Partie B

On pose $\lambda=1{,}5$.

1. Calculer $P(\mathcal{X}\leqslant 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.

2. Calculer $P(\mathcal{X}\geqslant 2)$.

3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante :
$P(1\leqslant\mathcal{X}\leqslant 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.

4. Calculer l'intégrale : $F(x)=\displaystyle\int_0^x 1{,}5 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-1{,}5t}\,\mathrm{d}t$.
Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas.
Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
   a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.
   b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification?

2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler un tirage à un tirage successif avec remise.
   a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés?
   b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé?

Exercice 3164

Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle $\mathcal{X}$ le nombre de composants défectueux achetés.
Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux?

Partie B

On suppose que la durée de vie $\mathcal{T}_1$ *(en heures)* de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1=5\times10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 *(en heures)* de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2=10^{-4}$ *(on pourra se reporter au formulaire ci-dessous)*

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
   a. si ce composant est défectueux ;
   b. si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités à 10^{-2} près.

2. Soit $\mathcal{T}$ la durée de vie *(en heures)* d'un composant acheté au hasard.
Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :
$P(\mathcal{T}\geqslant t) = 0{,}02 \cdot \mathrm{e}^{-5\times10^{-4}t} + 0{,}98 \cdot \mathrm{e}^{-10^{-4}t}$

 BY-NC

(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02)

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire : Loi exponentielle *(ou de durée de vie sans vieillissement)* de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$:

- Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $\quad P([a\,;b]) = \int_a^b \lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx$
- Pour $c \geqslant 0$, $\quad P([c\,;+\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx$

Exercice 3162

Cet exercice comporte ***deux parties indépendantes.*** *La partie **I** est la démonstration d'un résultat de cours. La partie **II** est un Q.C.M.*

Partie I : question de cours

Soient A et B deux évènements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie II

Pour chacune des question suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.

*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. L'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie **II** est ramenée à zéro.*

1. Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. `(hors programme 2012)`

   On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge?

   a. $\frac{75}{512}$ b. $\frac{13}{56}$ c. $\frac{15}{64}$ d. $\frac{15}{28}$

2. Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population. Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25

   Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe?

   a. $\frac{1}{120}$ b. $\frac{3}{40}$ c. $\frac{1}{12}$ d. $\frac{4}{40}$

3. Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

   Il gagne 10€ si le dé marque 1. Il gagne 1€ si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au gain du joueur.

   Quelle est la variance de $\mathcal{X}$?

   a. 2 b. 13 c. 16 d. 17

4. La durée d'attente $\mathcal{T}$, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t > 0$:

   $$P(\mathcal{T} < t) = \int_0^t \lambda\cdot e^{-\lambda x}dx \quad (\textit{avec } \lambda = \tfrac{1}{6})$$

   où t désigne le temps exprimé en minutes.

   Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité *(arrondie à 10^{-4})* que son temps total soit inférieur à 5 minutes?

   a. 0,2819 b. 0,3935 c. 0,5654 d. 0,6065

3. Loi normale et probabilité conditionnelle :

Exercice 6073

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.

On suppose que $\mathcal{X}$ suit une loi normale de moyenne $\mu_1 = 36$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0{,}2$ et que $\mathcal{Y}$ suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 6$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0{,}05$.

1. Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$. Quelle est une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité p_1 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur?

2. Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre 5,88 mm et 6,12 mm. Le tableau donné ci-contre a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il indique pour chacune des valeurs de k, la probabilité que $\mathcal{Y}$ soit inférieure ou égal à cette valeur.

k	$\mathcal{P}(\mathcal{Y} \leqslant k)$
5,8	3,16712E-05
5,82	0,000159109
5,84	0,000687138
5,86	0,00255513
5,88	0,008197536
5,9	0,022750132
5,92	0,054799292

k	$\mathcal{P}(\mathcal{Y} \leqslant k)$
5,94	0,11506967
5,96	0,211855399
5,98	0,344578258
6	0,5
6,02	0,655421742
6,04	0,788144601
6,06	0,88493033

k	$\mathcal{P}(\mathcal{Y} \leqslant k)$
6,08	0,945200708
6,1	0,977249868
6,12	0,991802464
6,14	0,99744487
6,16	0,999312862
6,18	0,999840891
6,2	0,999968329

   Déterminer à 10^{-3} près la probabilité p_2 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre *(on pourra s'aider du tableau ci-contre)*.

3. On prélève une pièce au hasard. On appelle L l'évènement "*la pièce est conforme pour la longueur*" et D l'évènement "*la pièce est conforme pour le diamètre*".

   On suppose que les évènements L et D sont indépendants.

   a. Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la

 CC BY-NC

longueur et pour le diamètre.

Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée *(le résultat sera arrondi à 10^{-2})*.

b. Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à p_2.

Exercice réservé 5511

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des comportes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination "*compote allégée*".

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est à dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %. On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :

- E : "*Le petit pot provient de la chaîne F_2*" ;
- C : "*Le petit pot est conforme*".

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : "*le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1*".
3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Partie B

1. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0{,}17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0{,}006$.

   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous :

α	β	$\mathcal{P}(\alpha \leqslant \mathcal{X} \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,0004
0,14	0,16	0,0478
0,15	0,17	0,4996
0,16	0,18	0,9044
0,17	0,19	0,4996
0,18	0,20	0,0478
0,19	0,21	0,0004

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la prodution de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que $\mathcal{Y}$ suit une loi normale d'espérance $m_2 = 0{,}17$ et d'écart-type σ_2.

   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.

   Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire définie par : $Z = \dfrac{\mathcal{Y} - m_2}{\sigma_2}$.

   a. Quelle loi la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit-elle?

   b. Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient $\mathcal{Z}$ lorsque $\mathcal{Y}$ appartient à l'intervalle $[0{,}16\,;0{,}18]$.

   c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

   On pourra utiliser le tableau ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$\mathcal{P}(-\beta \leqslant \mathcal{Z} \leqslant \beta)$
2,4324	0,985
2,4573	0,986
2,4838	0,987
2,5121	0,988
2,5427	0,989
2,5758	0,990
2,6121	0,991
2,6521	0,992
2,6968	0,993

4. Loi normale et loi binomiale :

Exercice réservé 6075

Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième.

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres. Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 *mm* ou supérieur à 11 *mm*.

Partie A

1. On appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en *mm*.

   On admet que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,4.

 BY-NC

Montrer qu'une valeur approchée à 0,000 1 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4. On pourra utiliser la table de valeurs donnéeen annexe.

2. On met en place un contrôle de production tel que 98 % des billes hors norme sont écartés et 99 % des billes correctes sont conservées.

On choisit une bille au hasard dans la production. On note :

- N l'évènement : "*la bille choisie est aux normes*" ;
- A l'évènement : "*la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle*".

a. Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité de l'évènement A.

c. Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.

On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,012 4.

On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

On appelle $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $\mathcal{Y}$?

2. Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$?

3. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme?

4. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme?

d	$\mathcal{P}(\mathcal{X}<d)$
0	3,06E-138
1	2,08E-112
2	2,75E-89
3	7,16E-69
4	3,67E-51
5	3,73E-36
6	7,62E-24
7	3,19E-14

d	$\mathcal{P}(\mathcal{X}<d)$
8	2,87$E-07$
9	0,00620967
10	0,5
11	0,99379034
12	0,99999971
13	1
14	1
15	1

d	$\mathcal{P}(\mathcal{X}<d)$
16	1
17	1
18	1
19	1
20	1
21	1
22	1

Exercice réservé 5431

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe :

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

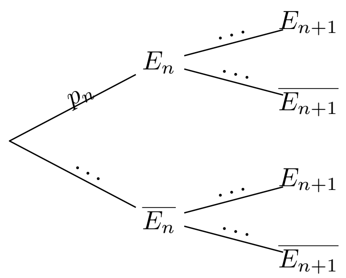
On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement "*le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine*". On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi $p_1=0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$

1. a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous :



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $p_{n+1}=0,2 \cdot p_n+0,04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n=p_n-0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r. En déduire l'expression de u_n, puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	K et J sont des entiers naturels
	P est un nombre réel.
Initialisation :	P prend la valeur 0.
	J prend la valeur 1.
Entrée :	Saisir la valeur de K.
Traitement :	Tant que $P<0,05-10^{-K}$
	P prend la valeur $0,2 \times P+0,04$
	J prend la valeur $J+1$.
	Fin tant que
Sortie :	Afficher J.

A quoi correspond l'affichage final J?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête?

3. Cette entreprise emploi 220 salariés. Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p=0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la

 BY-NC

variable aléatoire $\mathcal{X}$.

b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{\mathcal{X}-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite, c'est à dire de paramètres 0 et 1.
On note $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z<x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1{,}55$	$-1{,}24$	$-0{,}93$	$-0{,}62$	$-0{,}31$	$0{,}00$
$\mathcal{P}(\mathcal{Z}<x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500

x	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$\mathcal{P}(\mathcal{Z}<x)$	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : "*le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15*".

5. Lois normales et intervalle de fluctuations :

Exercice réservé 6761

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} *près.*

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite?
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite.
Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés?

Partie C

Pour augmenter la difficulté, le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner une effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit "*liftées*", soit "*coupées*". La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite?

Exercice 6422

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement "*la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A*" ;
- B l'évènement "*la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B*" ;
- V l'évènement "*la personne interrogée dit la véritée*".

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.
4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

   52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A.

   * estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1200 personnes

   Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut-il croire en sa victoire? *(on utilisera des valeurs approchées au millième près)*
5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.
   L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1200 réponses.
   Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif?

Exercice 6766

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

 CC BY-NC

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation "*pur jus*".

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de "*pur jus*" est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation "*pur jus*".

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :

- R : "*la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange*" ;
- J : "*la bouteille prélevée est une bouteille de pur jus*".

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de "*pur jus*".
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot de 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de "*pur jus*" dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire $\mathcal{X}$. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de "*pur jus*".
On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.
2. Que penser de l'affirmation du fournisseur?

Exercice 5538

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commerciable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi normale d'espérance $\mu=400$ et d'écart-type $\sigma=11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche

x	308	385	390	395	400	405	410	415	420
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $\mathcal{P}(390\leqslant\mathcal{X}\leqslant410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

   Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 %? On arrondira le résultat au dixième.

   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque $\mathcal{Z}$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1, on a :
   $\mathcal{P}(\mathcal{Z}\leqslant-1{,}751)\approx0{,}040$

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables. Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1., peut-on décider que l'objectif est atteint?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

Dans toute la suite, on prendra : $\lambda=0{,}003$

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison? Si non, pour combien de jours est-ce vrai?

 CC BY-NC

6. Lois normales et intervalle de confiances :

Exercice réservé 6740

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.
   a. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$? Justifier la réponse.
   b. Quelle est la meilleure approximation de $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 400)$ parmi les nombres suivants?
   0,92 ; 0,93 ; 0,94 ; 0,95
2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9 que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Propostion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n *(où n est un entier naturel supérieur à 50)*.
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.
2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

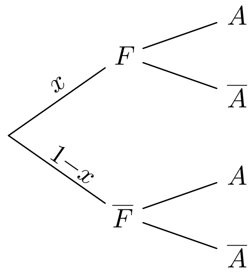
Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste, on préfère au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement "*la personne est en réalité favorable au projet*" ;
- $\overline{F}$ l'évènement "*la personne est en réalité défavorable au projet*".
- A l'évènement "*la personne affirme qu'elle est favorable au projet*" ;
- $\overline{A}$ l'évènement "*la personne affirme qu'elle est défavorable au projet*".

Ainsi, d'après les données, on a : $\mathcal{P}(A)=0{,}29$.



1. En interprétant les donnés de l'énoncé, indiquer les valeurs $\mathcal{P}_F(A)$ et $\mathcal{P}_{\overline{F}}(A)$.
2. On pose : $x=\mathcal{P}(F)$.
   a. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
   b. En déduire une égalité vérifiée par x.
3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Exercice 6071

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et $\mathcal{X}_n$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $\mathcal{F}_n=\dfrac{\mathcal{X}_n}{n}$ et f la valeur prise par f la valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi les trois réponses possibles.

On note r la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard *(de façon équiprobable)*.

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :
   - A : "*l'étudiant répond A*" ;
   - B : "*l'étudiant répond B*" ;
   - C : "*l'étudiant répond C*" ;
   - R : "*l'étudiant connaît la réponse*" ;

 CC BY-NC

- $\overline{R}$: l'évènement contraire de R.

a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement A est :
$$\mathcal{P}(A) = \frac{1}{3}\cdot(1+2\cdot r).$$

c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes résponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiant revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a. Donner la loi de $\mathcal{X}$ et ses paramètres n et p en fonction de r.

b. Dans un premier sondage, on contaste que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p.
En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r.

c. Dans la suite, on suppose que r=0,4. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que $\mathcal{X}$ suit une loi normale.

- Donner les paramètres de cette loi normale.
- Donner une valeur approchée de $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 250)$ à 10^{-2} près.
On pourra s'aider de la tableau ci-dessous 1, qui donne une valeur approchée de $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant t)$ où $\mathcal{X}$ est la variable aléatoire de la question 2. b..

C3 | =LOI.NORMALE($A12+E$1;240;RACINE(96);VRAI)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0,0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,33	0,334	0,338
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,36	0,364	0,368	0,372	0,376
4	237	0,38	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407	0,411	0,415
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447	0,451	0,455
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,48	0,484	0,488	0,492	0,496
7	240	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,52	0,524	0,528	0,533	0,537
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616
10	243	0,62	0,624	0,628	0,632	0,636	0,64	0,643	0,647	0,651	0,655
11	244	0,658	0,662	0,666	0,67	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691
12	245	0,695	0,699	0,702	**0,706**	0,709	0,713	0,716	0,72	0,723	0,726
13	246	0,73	0,733	0,737	0,74	0,743	0,746	0,75	0,753	0,756	0,759
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,79
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,81	0,813	0,815	0,818
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,86	0,863	0,865	0,867
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,88	0,882	0,884	0,886	0,888
19	252	0,89	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,904	0,906
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919	0,921	0,922
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933	0,935	0,936
22	255	0,937	0,938	0,94	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945	0,947	0,948
23	256	0,949	0,95	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958
24	257	0,959	0,96	0,96	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965	0,965	0,966
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,97	0,97	0,971	0,972	0,972	0,973
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978	0,979
27	260	0,979	0,98	0,98	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984

Exrtait d'une feuille de calcul

Exemple d'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre 0,706 correspond à $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 245{,}3)$

Exercice 6767

Partie A

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fourni les caractéristiques suivantes :

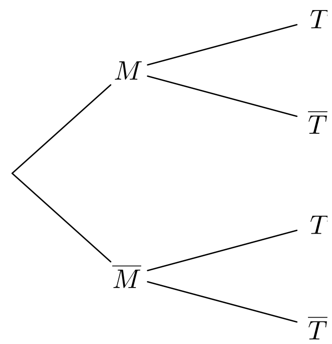
- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population "*cible*". Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'évènement : "*l'individu choisi est atteint du chikungunya*"
- T l'évènement : "*le test de l'individu choisi est positif*"

On notera $\overline{M}$ *(respectivement* $\overline{T}$*)* l'évènement contraire de l'évènement M *(respectivement* T*)*.
On note p $(0\leqslant p\leqslant 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



b. Exprimer $\mathcal{P}(M\cap T)$, $\mathcal{P}(\overline{M}\cap T)$ puis $\mathcal{P}(T)$ en fonction de p.

2. a. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par :
$$f(p) = \frac{98\cdot p}{97\cdot p+1}$$

b. Etudier les variations de la fonction f.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité d'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.
En utilisant les résultats de la question 2., à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable?

Partie B

En Juillet 2014, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15 % de la population est atteinte par le virus.

Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion est en réalité plus importante.
Pour s'en assurer, on se propose d'étudier un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.

On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1000 personnes choisies au hasard, fait correspondre

 BY-NC

le nombre de personnes atteintes par le virus et par $\mathcal{F}$ la variable aléatoire donnant la fréquence associée.

1. (a.) Sous l'hypothèse $p=0{,}15$, déterminer la loi de $\mathcal{X}$.

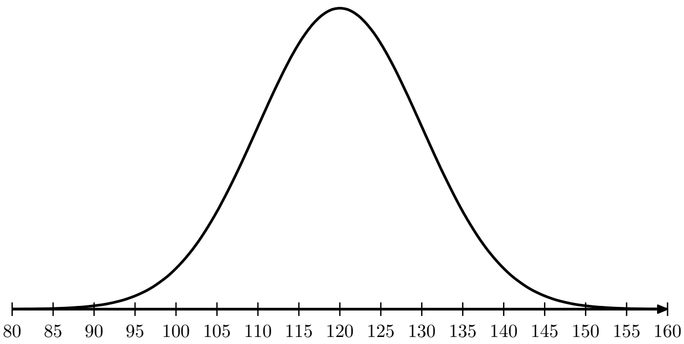
   (b.) Dans un échantillon de 1000 personnes choisies au hasard dans l'île, on dénombre 197 personnes atteintes par le virus.
   Quelle conclusion peut-on tirer de cette observation à propos du chiffre de 15 % publié par l'institut de veille sanitaire?
   Justifier. *(On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %)*

2. On considère désormais que la valeur de p est inconnue.

   En utilisant l'échantillon de la question 1. (b.), proposer un intervalle de confiance de la valeur de p, au niveau de confiance de 95 %.

Partie C

Le temps d'incubation, exprimé en heures, du virus peut être modélisé par une variable alátoire $\mathcal{T}$ suivant une loi normale d'écart type $\sigma=10$.
On souhaite déterminer sa moyenne μ.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité $\mathcal{T}$ est donnée ci-dessous :



1. (a.) Conjecturer, à l'aide du graphique, une valeur approchée de μ.

   (b.) On donne $\mathcal{P}\big(\mathcal{T}\leqslant 110\big)=0{,}18$. Hachurer sur le graphique un domaine dont l'aire correspond à la probabilité donnée.

2. On note $\mathcal{T}'$ la variable aléatoire égale à $\dfrac{\mathcal{T}-\mu}{10}$.

   (a.) Quelle loi la variable aléatoire $\mathcal{T}'$ suit-elle?

   (b.) Déterminer une valeur approchée à l'unité près de la moyenne μ de la variable aléatoire $\mathcal{T}$ et vérifier la conjecture de la question 1..

7. Probabilités conditionnelles ⚠ :

Exercice 1449

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes $(0\leqslant n\leqslant 10)$. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   (a.) R : "*la boule tirée est rouge*".

   (b.) B : "*la boule tirée est blanche*".

   (c.) V : "*la boule tirée est verte*".

2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.
   Le joueur tire une boule de l'urne :
   - si elle est rouge, il gagne $16\,F$;
   - si elle est blanche, il perd $12\,F$;
   - si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
     - si cette boule est rouge, il gagne $8\,F$;
     - si cette boule est blanche, il perd $2\,F$;
     - si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

   Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants.
   Au début de la partie, le joueur possède $12\,F$. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie *(un tirage ou deux tirages selon le cas)*.

   (a.) Déterminer les valeurs prises par $\mathcal{X}$.

   (b.) Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   (c.) Montrer que l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ est :
   $E(\mathcal{X}) = 12+16\cdot\dfrac{n}{(n+7)^2}$.

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\big[0\,;10\big]$ par : $f(x)=\dfrac{x}{(x+7)^2}$
   Etudier les variations de f.

4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique $\mathcal{X}$ est maximale. Calculer cette valeur maximale *(on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)*.

Exercice réservé 3143

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit n un entier naturel vérifiant $0\leqslant n\leqslant 50$.
On définit les évènements suivants :
- A : "*le jardinier a choisi le lot 1*" ;
- B : "*le jardinier a choisi le lot 2*" ;
- J_n : "*le jardinier obtient n tulipes jaunes*".

 CC BY-NC

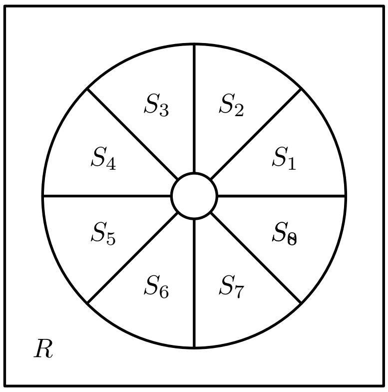
1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.
   a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1?
   b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi?
   c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.
   d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.
2. Probabilités conditionnelles :
   a. Montrer que : $\mathcal{P}_B(J_n) = \binom{50}{n} \cdot 2^{-50}$
   b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.
   c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. Etablir que :
   $$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}$$
   d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0{,}9$?
   Comment peut-on interpréter ce résultat?

8. Evénements indépendants ⚠ :

Exercice réservé 3736

Un carré de côté $20\,cm$ est partagé selon les 10 zones suivantes :

- un disque D de rayon $1\,cm$;
- 8 secteurs S_1, S_2, ..., S_8 de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D' de même centre et de rayon $9\,cm$;
- une zone R entre le disque D' et le bord du carré.



On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1. a. Déterminer la probabilité $p(D)$ pour que le point soit placé dans le disque D.
   b. Déterminer la probabilité $p(S_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.
2. Pour cette question 2., on utilisera les valeurs approchées suivantes :
   - $p(D) = 0{,}008$;
   - $p(S_k) = 0{,}078\,5$ pour $k \in \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

   A cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :
   - un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros ;
   - un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$;
   - un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.

   On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu :
   a. Calculer la probabilité $p(R)$ pour que le point soit placé dans la zone R. Calculer l'espérance de $\mathcal{X}$.
   b. On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré. Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.
   c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite. On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.
   Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.
   Déterminer la plus petite valeur de n tel que $p_n \geqslant 0{,}9$.

Exercice 3732

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :

- A : "*On obtient des boules des deux couleurs*" ;
- B : "*On obtient au plus une blanche*".

1. a. Calculer la probabilité de l'évènement : "*Toutes les boules tirées sont de même couleur*".
   b. Calculer la probabilité de l'évènement : "*On obtient exactement une boule blanche*".
   c. En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :
   $$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \quad ; \quad p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$
2. Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si, et seulement si : $2^{n-1} = n+1$
3. Soit (u_n) la suite définie par :
   $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

   Calculer u_2, u_3, u_4.
   Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les évènements A et B soient indépendants.

 BY-NC

9. Probabilité conditionnelles et loi binomiale ⚠ :

Exercice réservé 3145

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 ‰ de ce cheptel *(ou 5 pour mille)*.

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade?

2. a. On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.
Montrer que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer son espérance mathématqiue.

   b. On désigne par A l'évènement :
“*aucun animal n'est malade parmi les 10*”.
On désigne par B l'évènement :
“*au moins un animal est malade parmi les 10*”.
Calculer les probabilités de A et de B.

3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'évènement “*avoir un test positif à cette maladie*” et M l'évènement “*être atteint de cette maladie*”.

   a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement T.

   c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif?

Exercice 3834

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune :

- La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
- La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1€ et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les évènements :
   - E : “*à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges*” ;
   - F : “*à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge*”.

   Montrer que : $p(E)=0{,}02$; $p(F)=0{,}17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
$\mathcal{X}$ désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur *(rappel le joueur mise 1€)*.

   a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes *(n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)*

   a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que : $p_n=1-(0{,}9)^n$.

   b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

   c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n>0{,}9$?

Exercice 4142

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir : sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

- M l'évènement : “*l'animal est porteur de la maladie*” ;
- T l'évènement : “*le test est positif*”.

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif?

   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie?

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$?

   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif?

 BY-NC

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abatage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratui.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donné par le tableau suivant :

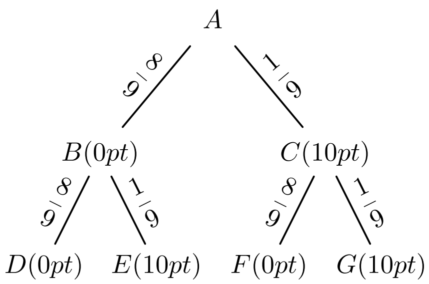
Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

b. Un éleveur possède un troupeu de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager?

Exercice réservé 4167

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un noeud. Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie ; c'est à dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.

   a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer l'espérance de $\mathcal{X}$.

   c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huits parties sont indépendantes. On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.

   a. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

   b. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 3130

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A- Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $i=1$ ou $i=2$, on note E_i l'évènement : "*Le touriste se dirige vers l'Est le i-ième jour*" et O_i l'évènement : "*Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ième jour*".

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

2. Déterminer les probabilités suivantes :
   $p(E_1)$; $p_{E_1}(O_2)$; $p(E_1 \cap E_2)$

3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B- On suppose maintenant que n touristes $(n \geqslant 3)$ se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes $(0 \leqslant k \leqslant n)$ partent en direction de l'Est.

2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.

   a. Peut-il y avoir deux touristes heureux?

   b. Démontrer que la probabilité *(notée p)* qu'il y ait un touriste heureux parmi ces n touristes vaut : $p=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

   c. **Application numérique :**
   Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

10. Schémas de Bernoulli et loi binomiale ⚠ :

Exercice réservé 4152

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites *(A, B et C)*, une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot "*BBAAC*" signifie que le candidat a répondu B aux premières et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. a. Combien y-a-t-il de mots-réponses possibles à ce questionnaire?

   b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

 BY-NC

Calculer la probabilité des évènements suivants :

- E : "*le candidat a exactement une réponse exacte.*".
- F : "*le candidat n'a aucune réponse exacte*".
- G : "*le mot-réponse du candidat est un palindrome*". *(On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, "BACAB" est un palindrome)*

2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

   On désigne par $\mathcal{X}$ le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

   a. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit la loi binomiale de paramètres $n=28$ et $p=\dfrac{32}{243}$.

   b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

Exercice 4193

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit $\mathcal{X}_i$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ième trajet et la valeur 0 sinon. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie par :

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \cdots + \mathcal{X}_{40}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

2. Dans cette partie, on suppose que $p=\dfrac{1}{20}$.

   a. Calculer l'espérance mathématiques de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer les probabilités :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$

   c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur. Justifier l'égalité :
   $\mathcal{Z} = 400 - 100{\cdot}\mathcal{X}$,
   puis calculer l'espérance de $\mathcal{Z}$ pour $p=\dfrac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.

   a. Démontrer que :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) = (1-p)^{38}{\cdot}\big(741{\cdot}p^2 + 38{\cdot}p + 1\big)$

   b. Soit f la fonction définie sur $\big[0\,;1\big]$ par :
   $f(x) = (1-x)^{38}{\cdot}\big(741{\cdot}x^2 + 38{\cdot}x + 1\big)$
   Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,;1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $\big[0\,;1\big]$ tel que : $f(x_0)=0{,}01$
   Déterminer l'entier naturel n tel que :
   $\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$

   c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %. *(On exprimera p en fonction de x_0)*

 BY-NC