Terminales S - Spécialité/Pgcd, théorème de Bezout et de Gauss

1. Calcul de PGCD :

Exercice réservé 3749

Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, le $PGCD$ des entiers a et b:

a. $a=354$; $b=20$

b. $a=1\,456$; $b=256$

c. $a=17$; $b=3941$

d. $a=256\,419$; $b=3\,866$

Exercice 3721

Dans chaque cas, à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers, déterminer le $PGCD$ du couple $(a\,;b)$ d'entiers:

1. $a=35\times21$; $b=36\times25$
2. $a=6^2\times12$; $b=21^4\times15^2$
3. $a=35\,280^{201}$; $b=6\,804^{131}$

Exercice 3723

Soit n un entier naturel inférieur à 120. Déterminer l'ensemble des valeurs de n tels que:

$$\text{pgcd}(n\,;120)=6$$

2. PGCD et diviseurs :

Exercice réservé 3715

On désigne par p un entier entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n l'entier: $A_n=2^n+p$.

On note d_n le $PGCD$ de A_n et A_{n+1}

1. Montrer que d_n divise 2^n.
2. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.

Exercice réservé 3722

1. Déterminer le $PGCD$ de deux entiers naturels pairs consécutifs.
2. Déterminer le $PGCD$ de deux entiers naturels impairs consécutifs.

Exercice 3724

Déterminer l'ensemble des couples $(m\,;n)$ d'entiers naturels tels que:

$$\text{pgcd}(m\,;n)=6 \quad ; \quad m+n=72$$

Exercice 6022

Déterminer l'ensemble des couples $(m\,;n)$ d'entiers naturels vérifiant le système:

$$\mathcal{S}:\left\{\begin{array}{rl} m^2-n^2 &= 5440 \\ \text{pgcd}(m\,;n) &= 8 \end{array}\right.$$

Exercice 6076

Pour tout entier naturel n, on considère les deux entiers α et β définis par: $\alpha=2n+1$; $\beta=n+3$

On note d le pgcd des entiers α et β: $d=\text{pgcd}(\alpha\,;\beta)$

1. a. Justifier que l'entier d est un diviseur de 5

   b. Quelles peuvent être les valeurs possibles de d?
2. Etablir l'équivalence suivante:
   α et β sont des multiples de 5 $\Longleftrightarrow$ $n-2$ est multiple de 5.

Exercice 6930

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

- **Proposition 1**
  Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de n^2+n n'est jamais égal à 4.
- On considère la suite u définie, pour $n\geqslant1$, par:
  $$u_n=\frac{1}{n}\cdot\text{pgcd}(20\,;n)$$
  Proposition 2: la suite (u_n) est convergente.

Exercice 6021

Soit n un entier relatif.

1. On note d le pgcd des entiers $9n+4$ et $2n-1$.
   Justifier que d divise 17.
2. Etablir l'équivalence suivante:
   $$n\equiv9 \pmod{17} \iff \text{pgcd}(9n+4\,;2n-1)=17$$

Exercice 5344

Dans le système d'équation ci-dessous, les entiers x et y ci-dessous représentent des entiers naturels où $x<y$:

$$\left\{\begin{array}{rl} x\cdot y &= 135 \\ \text{pgcd}(x\,;y) &= 3 \end{array}\right.$$

Résoudre ce système d'équations.

3. Lemme pour l'algorithme d'Euclide :

Exercice 3720

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les entiers :

$a_n = 4\times10^n - 1 \quad ; \quad b_n = 2\times10^n - 1 \quad ; \quad c_n = 2\times10^n + 1$

1. Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.
2. Combien les écritures décimales des entiers a_n et c_n ont-elles de chiffres?
   Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.
3. Montrer, en utilisant la liste des entiers premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.
4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :
   $b_n\times c_n = a_{2n}$.
   En déduire une décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.
5. Montrer que : $\text{pgcd}(b_n\,;c_n) = \text{pgcd}(c_n\,;2)$.
   En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

Liste des entiers premiers inférieurs à 100 :

2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	
61	67	71	73	79	83	89	97	

Exercice 5300

On considère deux entiers naturels x et y.

Montrer que si x et y sont premiers entre eux alors il en est de même pour les entiers $2x+y$ et $5x+2y$.

Exercice 5303

Soit p et q deux entiers naturel non nuls.

1. En supposant que $a=9p+4q$ et $b=2p+q$, démontrer que les entiers a et b d'une part ; p et q d'autre part ont le même $PGCD$.
2. Démontrer que les entiers $9p+4$ et $2p+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 5305

Soit k un élément de $\mathbb{Z}$.

1. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $9k+4$ sont premiers entre eux.
2. a. Démonter que le $PGCD$ des entiers $2k-1$ et $9k+4$ est nécessairement 1 ou 17.
   b. Etablir l'affirmation suivante :
   $\text{pgcd}(2k-1\,;9k+4) = 17 \iff k\equiv 9 \pmod{17}$

4. PGCD : propriété d'homogénéité :

Exercice 5297

Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :

$\text{pgcd}(a\,;b) = d \quad ; \quad \text{pgcd}(a+b\,;ab) = d'$

Montrer que d est un un diviseur de d'.

Exercice 6025

1. a. En supposant que $a=9p+4q$ et $b=2p+q$, démontrer que les entiers a et b d'une part ; p et q d'autre part ont le même PGCD.
   b. Démontrer que les entiers $9p+4$ et $2p+1$ sont premiers entre eux.
2. Déterminer le PGCD des entiers relatifs $9p+4$ et $2p-1$ en fonction des valeurs de p.

5. PGCD et propriétés :

Exercice 6023

Soit a et b deux entiers naturels avec $a>b$. Montrer l'équivalence :

$$\frac{a}{b} \text{ est irréductible} \iff \frac{a-b}{a\cdot b} \text{ est irréductible.}$$

6. Identité et Théorème de Bézout :

Exercice 5308

Etablir que, quelque soit la valeur de n, les deux entiers $n+3$ et $-2n^2-n+14$ sont premiers entre eux.

Exercice 3776

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n{+}1$ sont premiers entre eux.

Exercice 3750

Soit n un entier relatif. On définit la valeur des entiers a et b en fonction de celle de n.

Pour chaque question, montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux quelque soit la valeur de l'entier naturel n.

1. $a = 3n{-}1$; $b = -2n{+}1$
2. $a = 6n{+}1$; $b = 9n{+}1$

Exercice 6926

On considère l'équation diophantienne $x^2{-}8{\cdot}y^2{=}1$ où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solutions de (E).
2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

7. Théorème de Bezout et algorithme d'Euclide :

Exercice réservé 3751

Pour chaque équation, déterminer un couple de solution d'entiers $(u\,;v)$:

a. $354{\cdot}u + 49{\cdot}v = 1$
b. $34{\cdot}u + 57{\cdot}v = 1$

Exercice 3753

1. Déterminer un couple $(x\,;y)$ d'entiers solution de l'équation :
   $56{\cdot}x + 45{\cdot}y = 1$
2. En déduire un couple $(x'\,;y')$ d'entiers relatifs vérifiant l'égalité :
   $56{\cdot}x' + 45{\cdot}y' = 3$

8. Application du théorème de Bezout :

Exercice 3772

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
$A(n) = n^4 + 1$

1. Etudier la parité de l'entier $A(11)$.
2. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
3. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.
4. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
   $n^8 \equiv 1 \pmod{d}$

Exercice 6024

Soit n une entier naturel, on pose :
$a = 2n + 8$; $b = 3n + 15$

On note d le PGCD de a et de b.

1. Démontrer que, pour tout $n{\in}\mathbb{N}$, d divise 6.
2. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers naturels n pour lesquels $d{=}6$. C'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{S}$ est défini par :
$$\mathcal{S} = \Big\{ n{\in}\mathbb{N} \;\Big|\; \mathrm{pgcd}(2n{+}8\,;3n{+}15){=}6 \Big\}$$
   a. Montrer que si $n{\in}\mathcal{S}$ alors il existe un entier k tel que :
      $n{=}{-}4{+}3{\cdot}k$.
   b. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$.

Exercice 6927

A chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous un entier compris entre 0 et 25 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- **Etape 1 :** à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
- **Etape 2 :** on calcule l'entier x' défini par les relations :
  $x' \equiv 9{\cdot}x + 2 \pmod{26}$; $0{\leqslant}x'{\leqslant}25$
- **Etape 3 :** à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.
2. Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9{\cdot}u{+}26{\cdot}v{=}1$. Donner sans justifier un couple $(\,u\,;v\,)$ qui convient.
3. Démontrer que :
   $x'{\equiv}9{\cdot}x{+}2 \pmod{26}$ équivaut à $x{\equiv}3{\cdot}x'{+}20 \pmod{26}$
4. Décoder la lettre R.

Exercice 5828

On pose : $u{=}2{+}\sqrt{3}$ et $v{=}2{-}\sqrt{3}$

1. Démontrer par récurrence que, n désignant un entier positif, on peut écrire :
$$u^n = a_n + b_n{\cdot}\sqrt{3} \quad ; \quad v^n = a_n - b_n{\cdot}\sqrt{3}$$
   où a_n et b_n sont des entiers positifs.

Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Etablir les égalités :

$a_n{}^2 - 3{\cdot}b_n{}^2 = 1 \quad ; \quad a_n{\cdot}b_{n+1} - a_{n+1}{\cdot}b_n = 1$

En déduire que les fractions $\dfrac{a_n}{b_n}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ sont irréductibles.

Exercice 3261

On désigne par p un entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n{=}p^4{-}1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3
En déduire que n est divisible par 3.

2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2{-}1{=}4{\cdot}k{\cdot}(k{+}1)$, puis que n est divisible par 16.

3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.

4. a. Soient a, b et c trois entiers naturels.
Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

   b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.

5. Existe-t-il quinze entiers premiers p_1, $p_2, \dots$, p_{15} supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier :
$A{=}p_1{}^4{+}p_2{}^4{+}\cdots{+}p_{15}{}^4$
soit un entier premier?

9. Théorème de Gauss :

Exercice 3573

On considère le système de congruence :

$$(S) : \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

où n désigne un entier relatif.

1. Montrer que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n{-}11$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11{+}15{\cdot}k$, où k désigne un entier relatif.

Exercice 3716

On se propose d'étudier des couples $(a\,;b)$ d'entiers strictement positifs, tels que :
$a^2 = b^3$

Soit $(a\,;b)$ un tel couple. On note $d{=}\text{pgcd}(a\,;b)$ et u, v les deux entiers naturels vérifiant :
$a = d{\cdot}u \quad ; \quad b = d{\cdot}v$.

1. Montrer que : $u^2{=}d{\cdot}v^3$.

2. En déduire que v divise u, puis que $v{=}1$.

3. Soit $(a\,;b)$ un couple d'entiers strictement positifs.
Démontrer que l'on a $a^2{=}b^3$ si, et seulement si, a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

Exercice 3718

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}^{10}$

Si N est divisible par 7 alors $a{+}b$ est divisible 7.

Exercice réservé 3775

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.

Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119.

1. Montrer que :
"*n est divisible par 3 équivaut à $a{+}b$ est divisible par 3*"

2. Montrer que :
"*n est divisible par 7 équivaut à b est divisible par 7*"

Exercice 3791

Soit x et y deux entiers vérifiant l'égalité :
$y{\cdot}(y-x) = x{\cdot}(2-x)$

On suppose que l'entier x est un entier premier.

1. Démontrer que l'entier x divise y.

2. On pose $y{=}k{\cdot}x$ avec $k{\in}\mathbb{Z}$:

   a. Montrer que x divise 2, puis que $x{=}2$.

   b. En déduire les valeurs possibles de k.

Exercice 5299

On considère l'équation (E) définie par :
(E) : $17x - 15y = 3$
où l'ensemble de résolution est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs.

Démontrer que, pour tout couple $(x\,;y)$ solution de (E), x est un multiple de 3.

Exercice 5298

On souhaite déterminer l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels solutions de l'équation :
$a^2 - 3{\cdot}a{\cdot}b + b^2 = 0$

On suppose l'existence d'un couple $(a\,;b)$ solution de cette équation :

1. Justifier l'existence d'entiers naturels a' et b' premiers entre eux vérifiant l'égalité :
$a'^2 - 3{\cdot}a'{\cdot}b' + b'^2 = 0$

2. Montrer que a' divise b'^2, puis que a' divise b'.

3. Etablir que b' vérifie la relation : $1{-}3b'{+}b'^2 = 0$.

4. Conclure.

Exercice 6923

On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que : $\text{pgcd}(b\,;c)=1$

Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

"Si b divise a et c divise a alors le produit $b{\cdot}c$ divise a"

10. Corollaire du théorème de Gauss :

Exercice 3595

Soient a et b deux entiers relatifs.

1. Montrer que :

   Si $a{\cdot}b\equiv 0 \pmod{47}$ alors $\begin{cases} a\equiv 0 \pmod{47} \\ \text{ou} \\ b\equiv 0 \pmod{47}\end{cases}$.

2. En déduire que :

   Si $a^2\equiv 1 \pmod{47}$ alors $\begin{cases} a\equiv 1 \pmod{47} \\ \text{ou} \\ a\equiv -1 \pmod{47}\end{cases}$.

Exercice 5286

Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :
$\text{pgcd}(a{+}b\,;ab)=p$
où p est un entier premier.

1. Démontrer que p divise a^2.
   (On remarquera que : $a^2=a(a{+}b){-}ab$)
2. En déduire que p divise a.
   On constate donc, de même que p divise b.
3. Démontrer que : $\text{pgcd}(a\,;b)=p$.

Exercice 4306

On considère l'équation (E) sur les triplets $(x\,;y\,;z)$ définie par : $x^2{+}y^2=\dfrac{5}{2}{\cdot}z^2$

Considérons un triplet $(x\,;y\,;z)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E) :

1. Vérifier que le triplet $A\,(1\,;3\,;2)$ est solution de (E).
2. Démontrer que z est divisible par 2 et $x^2{+}y^2$ est divisible par 10.
3. Supposons que $y=3$, montrer alors l'équivalence suivante : $x^2\equiv 1 \pmod{10}$
4. Déterminer un triplet $(x\,;y\,;z)$ à valeur entières solutions de (E) où y est un entier impair.

Exercice réservé 4324

On considère l'équation :
(F) : $11{\cdot}x^2-7{\cdot}y^2=5$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. a. Démontrer que si le couple $(x\,;y)$ est solution de (F), alors :

   $x^2\equiv 2{\cdot}y^2 \pmod{5}$

   b. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2{\cdot}y^2$ par 5?

   c. En déduire que si le couple $(x\,;y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

2. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\,;y)$ n'est pas solution de (F).
   Que peut-on en déduire pour l'équation (F)?

Exercice 6019

Soit a et b deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour PGCD le carré d'un entier premier p.

1. Montrer que p^2 divise a^2.
   (on pourra remarquer que $a^2=a{\cdot}(a{+}b){-}a{\cdot}b$).
   En déduire que p divise a. Montrer que p divise b.
2. Démontrer que le PGCD de a et b est, soit p, soit p^2.

Exercice 6078

1. Dans chaque question, préciser si la proposition faite est vraie ou fausse :

   a. Pour tout entier naturel n, on a :
   $2^{3n}-1\equiv 0 \pmod{7}$

   b. Soit x une entier naturel.
   Si $x^2{+}x\equiv 0 \pmod{12}$ alors $x\equiv 0 \pmod{4}$

2. On rappelle le corollaire :

   Soit a, b, c trois entiers relatifs.
   Si b et c premiers entre eux et si b divise a et c divise a alors le produit $b{\cdot}c$ divise a

   Pour tout entier naturel n, on définit l'entier a par :
   $a=n{\cdot}(2n+1)(7n+1)$

   a. Justifier que l'entier a est pair.

   b. Justifier que l'entier a est divisible par 6.

11. Théorème de Bezout et de Gauss :

Exercice 5304

1. Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que $n{+}2$ divise $2n{-}1$.

2. Montrer que pour tout entier relatif, les entiers $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.

3. Déterminer l'ensemble V des entiers relatifs $n\neq-2$ tels que $\dfrac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

Exercice 4058

Soit p une entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un entier naturel non-nul tel que a et p sont premiers entre eux :

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier n non-nul, les entiers a^n et p sont premiers entre eux.

2. Etablir l'existence d'un entier naturel n non-nul tel que : $a^n \equiv 1 \pmod{p}$

12. Equation diophantienne :

Exercice 3752

1. a. Déterminer un couple trivial $(x\,;y)$ d'entiers solution de l'équation :
(E) : $-7{\cdot}x+25{\cdot}y=1$

b. En déduire l'ensemble des solutions entières de cette équation.

2. a. Déterminer un couple trivial $(x\,;y)$ d'entiers solutions de l'équation :
(F) : $135{\cdot}x+18{\cdot}y=9$

b. En déduire l'ensemble des solutions entières de cette équation.

Exercice 4308

Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;y)$, où x et y sont deux entiers relatifs, solutions de l'équation :
(E) : $2{\cdot}x+11{\cdot}y=7$

Exercice réservé 3790

On considère l'équation (E) : $7x-6y=1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Exercice réservé 3476

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) :
$3x+7y=10^{2n}$ x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tels que : $3u+7v=1$.
En déduire une solution particulière $(u_0\,;v_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de (E).

2. On considère l'équation notée (G) :
$3x^2+7y^2=10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Montrer que : $100\equiv2 \pmod{7}$.
Démontrer que si $(x\,;y)$ est solution de (G) alors : $3x^2\equiv 2^n \pmod{7}$

b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice 6929

On considère l'équation : $51{\cdot}x-26{\cdot}y=1$
où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple de solution.

2. a. Donner un couple solution $(x_0\,;y_0)$ de cette équation.

b. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Exercice 6931

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs : (E) : $7x-3y=1$

Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Son but est, lors de son exécution pas à pas, de récupérer les valeurs prises par les variables `a` et `b` qui forment des couples solutions de l'équation (E) où `(a ; b)` est un couple d'entiers solutions tels que :
$-5\leqslant$ `a` $\leqslant10$; $-5\leqslant$ `b` $\leqslant 10$.

```
Pour X variant de −5 à 10
    (1) ...
         (2) ...
              Alors (a ; b) ← (X ; Y)
         Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

Exercice 6077

On considère l'équation (E) :
$44{\cdot}x+35{\cdot}y=2$ $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$

1. a. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que les entiers 44 et 35 sont premiers entre eux.

b. Déterminer un couple $(x_0\,;y_0)$ vérifiant la relation :
$44{\cdot}x_0+35{\cdot}y_0=1$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équations (E).

Exercice 6933

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x\,;y\,;z)$ tels que :

$x^2+y^2=z^2$

Ces triplets seront nommés "*triplets pythagoriciens*" en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé "*TP*".

Ainsi, $\big(2\,;3\,;4\big)$ est un TP car : $3^2+4^2=5^2$

Partie A : généralités

1. Démontrer que, si $(x\,;y\,;z)$ est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(px\,;py\,;pz)$ est lui aussi un TP.

2. Démontrer que, si $(x\,;y\,;z)$ est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :
$n=2^\alpha\times k$
où α est un entier naturel *(éventuellement nul)* et k un entier naturel impair.

   L'écriture $n=2^\alpha\times k$ est nommée *décomposition de* n.

   Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 :
   $9=2^0\times 9 \quad ; \quad 120=2^3\times 15$

   a. Donner la décomposition de l'entier 192.

   b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont :
   $x=2^\alpha\times k \quad ; \quad z=2^\beta\times m$
   Ecrire la décomposition des entiers naturels $2x^2$ et z^2.

   c. En examinant l'exposant de 2 dans la décomposition de $2x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x\,;y)$ tels que $2x^2=z^2$.

On admet que la question **A** 3. permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x\,;y\,;z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$x<y<z$

Partie B ; recherche de triplets pythaogriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $\big(x\,;y\,;2015\big)$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n :
$\big(2n+1\big)^2+\big(2n^2+2n\big)^2=\big(2n^2+2n+1\big)^2$
Déterminer un TP de la forme $(2015\,;y\,;z)$

3. a. En remarquant que $403^2=169\times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x\,;z)$ tels que :
$z^2-x^2=403^2 \quad$ avec $x<403$

   b. En déduire un TP de la forme $(x\,;2015\,;z)$.