Terminales S - Spécialité/Nombres premiers

1. Proprietes des nombres premiers :

Exercice réservé 3620

Soit $a\in\mathbb{N}$, considérons l'expression : (E) : a^4-3a^2+1

1. Etablir l'égalité suivante :
   $a^4-3a^2+1=\big(a^2-a-1\big)\cdot\big(a^2+a-1\big)$

2. a. Résoudre les équations suivantes :
   $a^2-a-1=1$; $a^2+a-1=1$

   b. Déterminer pour quelle*(s)* valeur*(s)* de a, l'expression (E) défini un entier premier.

Exercice 3621

1. Pour a un entier naturel, on considère l'expression :
   (E) : $a^4-5\cdot a^3+7a^2$

   a. Factoriser l'expression (E) comme un produit de deux polynômes du second degré.

   b. En déduire l'unique valeur de a afin que l'expression (E) définisse un nombre premier.

2. Pour a un entier naturel, on considère l'expression :
   (F) : a^4-5a^2

   Justifier que l'entier (F) ne peut être un nombre premier.

Exercice 3622

Soit n un entier naturel. On considère l'entier A défini par :
$A=2^3\times3^n\times5^n$

1. a. Déterminer le nombre de diviseurs de l'entier A dans les cas suivant :
   $n=0$; $n=1$; $n=2$

   b. Déterminer une expression en fonction de n donnant le nombre de diviseurs de l'entier A.

2. Combien de diviseurs admet l'entier 6 075 000?

Exercice 3623

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N=a^2-b^2$ où a et b sont deux entiers naturels tels que $a>b$.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.

2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.

3. Quelle est la parité de p et de q?

Exercice réservé 3633

1. Soit x un nombre réel.

   a. Montrer que : $x^4+4=\big(x^2+2\big)^2-4\cdot x^2$

   b. En déduire que x^4+4 peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficient entiers.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux entiers suivants :
   $A=n^2-2n+2$; $B=n^2+2n+2$

   a. Montrer que n^4+4 n'est pas premier.

   b. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.

   c. Montrer que, tout diviseur commun de A et de B, divise $4n$.

Exercice réservé 3667

On dit qu'un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres *(c'est à dire autres que lui-même)*.

1. a. Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.

   b. Vérifier que ces deux entiers peuvent s'écrire sous la forme $2^n\big(2^{n+1}-1\big)$ où $2^{n+1}-1$ est premier.

2. Nous allons montrer que tout entier de cette forme est un entier parfait.

   a. Soit p un entier premier et a l'entier : $a=2^n\cdot p$.
   Quels sont ses diviseurs propres? Calculer leur somme en fonction de n et p.

   b. Supposons de plus que : $p=2^{n+1}-1$.
   Exprimer la somme des diviseurs propres de l'entier a en fonction de n où :
   $a=2^n\big(2^{n+1}-1\big)$

   c. En déduire que a est parfait.

3. Enoncer le résultat démontré.
   Donner deux autres entierss parfaits.

En revanche, aucun entier parfait impair n'est connu pour l'instant.

Exercice réservé 3668

1. Soit x et p étant deux entiers naturels, calculer la somme :
   $1-x+x^2+\cdots+(-1)^p\cdot x^p$

2. Démontrer que, quels que soient les entiers naturels x et n, l'entier $x^{2n+1}+1$ est multiple de $x+1$.

   On remarquera que si k est impair alors $(2^q)^k+1$ est divisible par 2^q+1.

3. Soit m un entier naturel. Démontrer qu'une condition nécessaire pour que 2^m+1 soit un entier premier est que m soit une puissance de 2.

Exercice réservé 3717

Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Pour tout entier naturel n non nul :

1. "$5^{6n+1}+2^{3n+1}$ *est divisible par* 5".

2. "$5^{6n+1}+2^{3n+1}$ *est divisible par* 7".

Exercice 5218

Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers suivants :

a. 8232 b. 1750 c. 1053

2. Nombres premiers et congruence :

Exercice réservé 3624

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

"*Les entiers dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers?*"

Pour tout entier naturel $p\geqslant 2$, on pose $N_p=1...1$ où 1 apparaît p fois. On rappelle dès lors que :

$N_p=10^{p-1}+10^{p-2}+\cdots+10^0$.

1. Les entiers $N_2=11$, $N_3=111$, $N_4=1111$ sont-ils premiers?

2. Prouver que $N_p=\dfrac{10^p-1}{9}$. Peut-on être certain que 10^p-1 est divisible par 9?

3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.
On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,
$x^n-1=\big(x-1\big)\big(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\big)$

   a. On suppose que p est pair et on pose $p=2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_2=11$.

   b. On suppose que p est un multiple de 3 et on pose $p=3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_3=111$.

   c. On suppose p non premier et on pose $p=k\cdot q$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
   En déduire que N_p est divisible par N_k.

4. Enoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
Cette condition est-elle suffisante?

Exercice 3619

Soit p un entier premier supérieur ou égal à 5.

1. Justifier que l'entier p vérifie l'une des deux conditions suivantes :
$p\equiv 1 \pmod{6}$; $p\equiv 5 \pmod{6}$

2. Justifier que l'entier p^2-1 est divisible par 24.

Exercice réservé 3669

On cherche à savoir pour quelle(s) valeurs (s) de l'entier naturel n, $\sin(2^n)$ est le plus grand possible, 2^n étant la mesure d'un angle en degrés.

1. Décomposer 360 en facteurs premiers.

2. Démontrer que pour tout $n\geqslant 3$: $2^{n+12}\equiv 2^n \pmod{360}$

3. En déduire qu'il suffit d'observer les valeurs de $\sin(2^n)$ pour $0\leqslant n\leqslant 14$.

4. Quelle est la valeur maximale de $\sin(2^n)$?

3. Ecriture en base b :

Exercice 3627

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a\neq 0$.

On considère l'entier $N=a\times 10^3+b$. On rappelle qu'en base 10 cet entier s'écrit sous la forme :
$N=\overline{a00b}$

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

1. Vérifier que : $10^3\equiv -1 \pmod{7}$

2. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 5301

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1. Déterminer x pour que :

   a. A soit divisible par six ;

   b. A soit divisible par cinq.
   En déduire qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.

2. On donne à x la valeur zéro. Déterminer l'écriture décimale de A. Quel est le nombre de diviseurs positifs de A? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois?

255. Exercices non-classés :

Exercice 3361

1. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers suivants :

   a. 2 016 b. 2 100 c. 864

2. Effectuer les opérations suivantes et donner le résultat sous forme simplifiée :

   a. $\dfrac{2\,016}{2\,100}$ b. $\dfrac{1}{2\,100}+\dfrac{1}{864}$

Exercice 5835

On considère la fonction `f` ci-dessous, extrait d'un algorithme, où $\mathrm{Ent}\left(\dfrac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\dfrac{A}{N}$.

```
Fonction f(A)
    N ← 1
    Tant que N⩽√A
        Si A/N−Ent(A/N)=0
        Alors
          (X;Y) ← (N;A/N)
        Fin si
        N ← N+1
    Fin Tant que
```

1. En appelant la fonction f avec la valeur 12 pour l'argument `A` et en lançant l'exécution pas à pas, quelles seront les valeurs affectées au couple `(X;Y)` de variables.
2. Que permet d'obtenir l'appel à la fonction `f` ?

Exercice 3362

Simplifier l'écriture des entiers suivants sous forme de produit de facteurs premiers :

a. $18\times15^2\times9\times82$ b. $9^2\times15^{-2}\times4^4$ c. $\dfrac{5^\times3^4\times12^2}{21^2\times15^3}$

d. $\dfrac{5^2\times3^2}{5^5\cdot\left(3^4+3^4\right)}$ e. $\dfrac{2^2\times5^{-4}}{2^{21}+2^{22}}$

Exercice 6771

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que $S(6)=12$ et calculer $S(7)$.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $S(n)\geqslant1+n$

   b. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n)=1+n$?

Exercice 3363

Préciser si les entiers suivants sont premiers ou non :

a. 37 b. 127 c. 541 d. $2\times3\times5\times7+1$

Exercice 6924

Ci-dessous est donnée une fonction d'un algorithme suivant où `MOD(N,k)` représente le reste de la division euclidienne de `N` par `k`.

```
Fonction f(a)
    k ← 2
    Tant que   MOD(a,k) ≠ 0   et   k⩽√a
        k ← k+1
    Fin Tant que
    Si k>√a
        Alors Renvoyer 0
    Sinon
        Alors Renvoyer 1
    Fin Si
```

1. Quelle est la valeur de k lorsque cette fonction est appelé avec pour paramètre `a=127`? Et si on saisit `a=119`?
2. Que peut-on dire de l'entier a passé en paramètre lorsque la valeur renvoyée par la fonction `f` est `0`? Justifier votre réponse.

Exercice réservé 3364

On considère les deux entiers suivants : $A=72$; $B=135$

1. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers A et B.
2. a. A l'aide d'un arbre de choix, déterminer l'ensemble des divisieurs de A et l'ensemble des diviseurs de B.

   b. Donner l'ensemble des diviseurs commun à A et à B.

Exercice 5038

1. Soit n un entier naturel. Exprimer le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4.
2. Soit a et b deux entiers. Etablir la propriété suivante :

   "Si a^2+b^2 est un entier divisible par 8 alors a et b sont des entiers pairs"

Exercice 5039

Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers relatifs vérifiant l'égalité :

$a^2-b^2=11$

Exercice réservé 5729

On considère les deux entiers $A=10n+7$ et $B=2n+1$.

1. Déterminer les entiers réels a et b vérifiant l'égalité :
   $$\frac{10n+7}{2n+1}=a+\frac{b}{2n+1}$$
2. Justifier que les entiers A et B sont premiers entre eux.

