Terminales S - Spécialité/Congruences

1. Premiers exercices de congruences :

Exercice 3402

Vérifier la véracité de chacune des égalités suivantes :

a. $15 \equiv 27 \pmod{3}$
b. $17 \equiv 11 \pmod{4}$
c. $153 \equiv 237 \pmod{12}$
d. $-5 \equiv 8 \pmod{13}$
e. $-81 \equiv 224 \pmod{6}$
f. $37^4 \equiv 1 \pmod{4}$

Exercice 3365

1. Déterminer une valeur de l'entier $a \in [10\,;20]$ pour laquelle l'égalité est vraie :
   a. $25 \equiv a \pmod{4}$
   b. $37 \equiv a \pmod{10}$
   c. $52 \equiv a \pmod{7}$
   d. $5 \equiv a \pmod{14}$
   e. $1 \equiv a \pmod{9}$
   f. $13 \equiv a \pmod{5}$
2. Déterminer une valeur de n pour laquelle l'égalité est vraie :
   a. $21 \equiv 1 \pmod{n}$
   b. $14 \equiv 4 \pmod{n}$
   c. $9 \equiv 14 \pmod{n}$
   d. $10 \equiv 25 \pmod{n}$

Exercice réservé 3406

Dans cet exercice on étudie la divisibilité par 11 en exploitant la congruence modulo 11 des puissances de 10

1. a. Vérifier que : $100 \equiv 1 \pmod{11}$.
   En déduire que : $10^4 \equiv 1 \pmod{11}$.
   b. Vérifier que : $10 \equiv -1 \pmod{11}$.
   En déduire que :
   - $10^3 \equiv -1 \pmod{11}$
   - $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$
2. a. En utilisant l'égalité $3729=37\times100+29$ et les résultats précédents, montrer que 3729 est divisible par 11.
   b. En utilisant la méthode précédente, étudier la divisibilité de 9240 par 11.
3. a. En utilisant l'égalité :
   $3729 = 3\times1000 + 7\times100 + 2\times10 + 9$
   et les résultats précédents, montrer que 3729 est divisible par 11.
   b. En utilisant cette méthode, étudier la divisibilité de 9240 par 11.
4. Etudier la divisibilité de 197 277 par 11.

Exercice réservé 3469

Le numéro I.N.S.E.E. est constitué de 15 chiffres. En lisant de gauche à droite :

- Le premier chiffre est 1 s'il s'agit d'un homme, 2 s'il s'agit d'une femme ;
- les deux chiffres suivants désignent les deux derniers chiffres de l'année de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le mois de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le département de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent la commune de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent le numéro d'inscription sur le registre civil ;
- les deux derniers chiffres désignent la clé K, calculée de la manière suivante :
  - Soit A le nombre entier constitué par les 13 chiffres de gauche,
  - soit r le reste de la division euclidienne de A par 97,
  - alors $K=97-r$

Les 13 premiers chiffres *(sans clé)* du nombre *I.N.S.E.E.* de Sophie sont 2850786183048. On note A cet entier et r le reste de la division euclidienne de A par 97.

1. Donner le mois de l'année de naissance de Sophie.
2. a. Déterminer les deux entiers a et b tels que :
   $A = a\times10^6 + b$ avec $0 \leqslant b < 10^6$.
   b. En utilisant le reste de 100 dans sa division euclidienne par 97 ; montrer que : $10^6 \equiv 27 \pmod{97}$
   c. En déduire le reste r de la division euclidienne de A par 97.
3. Déterminer la clé K du numéro I.N.S.E.E. de Sophie.
4. Sophie, à qui l'on demande les **treize** premiers chiffres de son numéro I.N.S.E.E., inverse les deux derniers chiffres et répond 2850786183084 à la place de 2850786183048.

   On note B la réponse de Sophie.

   a. Calculer la différence $B-A$ et en déduire que le reste de la division euclidienne de B par 97 est égal à 21.
   b. L'erreur faite par Sophie peut-elle être détectée ?

2. Manipulations algébriques :

Exercice 3468

On considère les entiers :

$$A = 8\,387\,592\,115 \quad ; \quad B = 9\,276\,312\,516$$

1. a. Montrer que $1\,000$ est divisible par 8.
   b. Montrer que A est congru à 3 modulo 8.
   c. Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.
2. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à $A+B$ et à $A{\cdot}B$
3. a. Montrer que B^2 est divisible par 8.
   b. Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.
   c. Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.

Exercice réservé 3405

1. a. Montrer que 1999 est congru à 4 modulo 7.
   b. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à 2007 modulo 7.
2. Soit n un nombre entier naturel congru à 5 modulo 7.
   a. Déterminer un nombre entier naturel congru à n^3 modulo 7.
   b. En déduire que $(n^3{+}1)$ est divisible par 7.
3. Montrer que si n est un nombre entier naturel congru à 4 modulo 7 alors $(n^3{-}1)$ est divisible par 7.
4. On considère l'entier : $A{=}1999^3{+}2007^3$.
   Sans calculer A, montrer en utilisant les résultats précédents que A est divisible par 7.

Exercice 3493

Soit n un entier naturel.

1. Développer $(n{+}3)^4$.
2. Montrer que : $(n+3)^4 \equiv n^4 + 2n^2 + 1 \pmod{4}$
3. Etudier en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4, la divisibilité de $(n{+}3)^4$ par 4.

Exercice 3278

Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7?
2. Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si, et seulement si, 7 divise x et 7 divise y.

Exercice 3598

Soit n un entier relatif. Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

$$n^2{+}n{+}3{\equiv}0 \pmod{5} \quad \text{si, et seulement si,} \quad n{\equiv}1 \pmod{5}.$$

Exercice 3632

1. Montrer que pour tout entier naturel n, 3 divise l'entier $2^{2n}{-}1$.
2. Soit p un entier naturel. Montrer que parmi les entiers p, $p{+}10$, $p{+}20$, un et un seul d'entre eux est divisble par 3.

3. Puissances congru à 0 :

Exercice 738

Soit p une entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un entier naturel non-nul

Montrer que si il existe un entier naturel n tel que $a^n{\equiv}0 \pmod{p}$ alors pour tout entier naturel k, on a l'implication : $k{\geqslant}n \implies a^k{\equiv}0 \pmod{p}$

Exercice réservé 3492

Dans l'exercice, n représente un entier naturel.

1. Etudier le reste de la division euclidienne de 2^n et 3^n par la division euclidienne par 4 en fonction des valeurs de n.
2. En déduire, en fonction de n, le reste, par la division euclidienne par 4, de la somme :
   $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$

Exercice 5453

1. Déterminer le plus petit entier k réalisant l'équivalence :
   $6^k \equiv 0 \pmod{4}$
2. Pour tout entier naturel a, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir la congruence ci-dessous pour tout entier naturel n non-nul :
   $(a+6)^n \equiv a^n + 6{\cdot}n{\cdot}a^{n-1} \pmod{4}$

Exercice 5454

1. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n réalisant la congruence :
   $6^n \equiv 0 \pmod{8}$
2. Pour tout entier naturel n, déterminer la valeur du reste de l'entier A défini ci-dessous par la division euclidienne par 8 :
   $A = 6^n + 9^n$

4. Puissances, congruences et cyclicités :

Exercice 3403

1. a. Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 7^n par 4 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

b. En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{235} par 4.

2. a. Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 12^n par 5 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

b. Etablir que l'entier $\left(12^{39}-3\right)$ est divisible par 5.

Exercice 5037

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4
Reste de 3^n par 5					

2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a :
$2008^{4\cdot n} \equiv 1 \pmod{5}$

3. En déduire que $2008^{2008}-31$ est divisible par 5.

Exercice 3571

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.

2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}+2\,009$ par 11.

Exercice 3408

1. a. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers 3^n pour $n\in\mathbb{N}$ où $n \leqslant 6$.
On complétera le tableau suivant :

Puissance de 3	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
Reste modulo 7							

b. En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, 3^{6k} est congru à 1 modulo 7.

2. a. Déterminer le plus petit entier naturel congru à 1515 modulo 7.

b. Après avoir remarqué que $2004=6\times334$, déduire de la question 1. le reste de la division euclidienne de 1515^{2004} par 7.

c. Montrer que dans la division euclidienne de 1515^{2006} par 7, le reste est 2.

Exercice réservé 3491

1. On s'intéresse, pour tout entier naturel n, au reste de la division euclidienne de 2^n par 7.

a. compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
Reste de la division de 2^n par 7					

b. On note r le reste de la division euclidienne de n par 3 ; justifier l'égalité suivante :
$2^n \equiv 2^r \pmod{7}$

2. a. En déduire que pour tout entier naturel k, l'entier $\left(2^{3\cdot k}-1\right)$ est un multiple de 7.

b. Montrer que pour tout entier naturel k, l'entier $\left(2^{3\cdot k+1}-2\right)$ est un multiple de 7.

3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $\left(17\,159\right)^{541}$ par 7.

Exercice réservé 3553

Soit n un entier naturel.

1. Trouver suivant les valeurs de n, les restes de la division de 5^n par 13.

2. En déduire que $1981^{1981}-5$ est divisible par 13.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'entier $N=31^{4n+1}+18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice réservé 3489

1. a. Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^3 par 27.

b. En déduire le reste de la division euclidienne par 27 de l'entier suivant :
$A = 345\,948\,546\,421$

2. Déterminer le reste de la division euclidienne par 16 du nomre suivant :
$B = 15\times33^{51} - 9\times18^{152} + 15^{37}$

Exercice 4309

On considère l'entier $N=11^{2011}$. Montrer que l'entier N est congru à 4 modulo 7.

5. Equations :

Exercice réservé 3404

1. a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons a le reste de la division euclidienne de $8n$ par 5 ; compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
a					

b. Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation suivante :
$8n \equiv 4 \pmod{5}$

2. En utilisant une démarche équivalente, résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{Z}$:
$5n \equiv 2 \pmod{6}$

3. Dans $\mathbb{Z}$, justifier que l'équation $6n \equiv 5 \pmod{4}$ a l'ensemble vide comme ensemble de solution.

Exercice 3599

On considère l'ensemble : $A_7 = \{1;2;3;4;5;6\}$

1. Pour tout élément a de A_7, écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $a \cdot y \equiv 1 \pmod{7}$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

2. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation :
$3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.

3. Soit a un élèment de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a \cdot x \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

Exercice 5455

Soit x un entier relatif.

1. En étudiant les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 7, résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

   a. $4 \cdot x \equiv 1 \pmod{7}$ b. $6 \cdot x \equiv 3 \pmod{7}$

2. En étudiant les restes possibles de la division euclidienne de x par 6, résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

   a. $5 \cdot x \equiv 2 \pmod{6}$ b. $2 \cdot x \equiv 3 \pmod{6}$

6. Raisonnement par récurrence :

Exercice 3294

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$u_0 = 14$; $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.

Exercice réservé 3296

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel n, on a :

$5^{n+2} \equiv 25 \pmod{100}$

Exercice 3457

Montrer par un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, l'entier $5^n - 1$ est un multiple de 4.

Exercice réservé 3458

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$u_0 = 14$; $u_{n+1} = 5 \cdot u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel :
$2 \cdot u_n = 5^{n+2} + 3$

2. a. Justifier que pour tout entier naturel n, $2 \cdot u_n$ est un multiple de 4.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $2 \cdot u_n \equiv 28 \pmod{100}$

Exercice 3494

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$x^n - 1 = (x-1)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right)$

7. Problèmes sur la congruence :

Exercice réservé 3407

Un entier naturel N s'écrit $\overline{cabc}$ dans e système de numération à base cinq où a, b, c sont non nuls, c'est-à-dire :
$N = c \times 5^3 + a \times 5^2 + b \times 5 + c$
où a, b, c sont des entiers tels que :
$0 < a < 5$; $0 < b < 5$; $0 < c < 5$

Ce même entier N s'écrit $\overline{aba}$ dans le système de numération à base huit.

1. Montrer que $N = 65a + 8b$ et en déduire que :
$40a = 126c - 3b$.

2. a. Justifier que : $40a \equiv 0 \pmod{3}$.
   En déduire la valeur de a.

   b. Montrer que : $b \equiv 0 \pmod{2}$.
   Déterminer les valeurs de b et c.

   c. Donner l'écriture de l'entier N dans les bases cinq, huit et dix.

Exercice réservé 3596

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.

2. En déduire que : $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \pmod{16}$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. a. Démontrer que u_0 est divisible par 5.

   b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=u_n\cdot\left[u_n^4+5\cdot\left(u_n^3+2\cdot u_n^2+2\cdot u_n+1\right)\right]$$

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. a. Vérifier que $u_3=2\,009^{250}-1$ puis en déduire que $2\,009^{250}\equiv1 \pmod{625}$.

b. Démontrer alors que : $2\,009^{8\,001}\equiv 2\,009 \pmod{625}$

255. Exercices non-classés :

Exercice 5820

On considère la fonction `f` extrait d'un algorithme :

```
Fonction f(A)
    X ← A
    Tant que X⩾26
        X ← X−26
    Fin du tant que
    Renvoyer X
```

1. Qu'elle est la valeur renvoyée par la fonction `f` lorsqu'elle est appelée avec pour argument l'entier 3?
2. Qu'elle est la valeur renvoyée par la fonction `f` lorsqu'elle est appelée avec pour argument l'entier 55?
3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente la valeur renvoyée par cette fonction?

Exercice 5826

Utiliser les congruences pour calculer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers suivants :

a. 5^6 b. 5^{6p}, pour $p\in\mathbb{N}^*$ c. 33^{38}

Exercice 5830

1. Etudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division par 7 de l'entier :
$A=n^2-n+1$
2. En déduire les entiers n tels que l'entier A soit divisible par 7.
3. Déterminer le reste de la division par 7 de l'entier :
$B=2\,753^2-2\,753+1$

Exercice 6804

On considère l'entier de Mersenne $2^{33}-1$.
Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$(2^{33}-1)\div3$	
	2863311530
$(2^{33}-1)\div4$	
	2147483648
$(2^{33}-1)\div12$	
	715827882,6

Il affirme que 3 divise $(2^{33}-1)$ et 4 divise $(2^{33}-1)$ et 12 ne divise pas $(2^{33}-1)$.

1. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $(2^{33}-1)$.
2. En remarquant que $2\equiv-1 \pmod 3$, montrer que, en réalité, 3, ne divise pas $2^{33}-1$.
3. Calculer la somme :
$S=1+2^3+\left(2^3\right)^2+\left(2^3\right)^3+\cdots+\left(2^3\right)^{10}$
4. En déduire que 7 divise $2^{33}-1$.

Exercice 6925

Soit p, q, r trois entiers relatifs vérifiant :

$$\begin{cases}-3p+q+2r\equiv0 \pmod 6\\ 3p-3q\equiv0 \pmod 6\\ 6p+2q-2r\equiv0 \pmod 6\end{cases}$$

En déduire que ces entiers vérifient le système :

$$\begin{cases}q-r\equiv0 \pmod 3\\ p-q\equiv0 \pmod 2\end{cases}$$

