Terminales S - Spécialité/Annales sur le PGCD

1. PGCD, propriété et congruence :

Exercice 5284

1. a. Montrer que $3n^3-11n+48$ est divisible par $n+3$ pour tout entier naturel n.

   b. Montrer que $3n^2-9n+16$ est un entier naturel non nul pour tout entier naturel n.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :
   $\text{pgcd}(a\,;b) = \text{pgcd}(b{\cdot}c-a\,;b)$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité est vraie :
   $\text{pgcd}(3n^3-11n\,;n+3)=\text{pgcd}(48\,;n+3)$

4. a. Détermienr l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

   b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

Exercice 5285

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies par :

- $x_0 = 3 \quad ; \quad x_{n+1} = 2{\cdot}x_n - 1$
- $y_0 = 1 \quad ; \quad y_{n+1} = 2{\cdot}y_n + 3$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:
   $x_n = 2^{n+1} + 1$

2. a. Calculer le $PGCD$ de x_8 et x_9, puis celui de x_{2002} et x_{2003}.
   Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part?

   b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n?

3. a. Démontrer que poru tout entier naturel n :
   $2{\cdot}x_n - y_n = 5$

   b. Exprimer y_n en fonction de n.

   c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

   d. On note d_n le $PGCD$ de x_n et de y_n pour tout entier naturel n.
   Démontrer que l'on a $d_n=1$ ou $d_n=5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 3320

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n :
   $u_{n+2} \equiv u_n \pmod 4$.
   En déduire que pour tout entier naturel k :
   $u_{2k} \equiv 2 \pmod 4$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod 4$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:
   $2{\cdot}u_n = 5^{n+2} + 3$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n :
   $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que le $PGCD$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant.
   Préciser sa valeur.

Exercice 3719

Partie A

On admet que 1 999 est un entier premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour $PGCD$ 1 999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnu n appartenant à $\mathbb{N}$:

(E) : $n^2-S{\cdot}n+11\,994=0$ où S est un entier naturel.

On s'intéresse à des valeurs de S telle que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E)?
   Si oui, préciser la deuxième solution.

2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E)?

3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11 994.
   En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1 999 est un entier premier?
Préciser le raisonnement employé?
La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2	;	3	;	5	;	7	;	11	;	13	;	17	;	19
23	;	31	;	37	;	41	;	43	;	47	;	53	;	59
61	;	67	;	71	;	73	;	79	;	83	;	89	;	97

Exercice 3246

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

"*Etant donnés deux entiers naturels, a et b non nuls, si $pgcd(a\,;b)=1$ alors $pgcd(a^2\,;b^2)=1$*"

Une suite (S_n) est définie pour $n>0$ par : $S_n=\sum_{p=1}^{n} p^3$.

On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n>0$, on a : $S_n=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

2. Etude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n=2k$

   a. Démontrer que :

$$\text{pgcd}(S_{2k}\,;S_{2k+1})=(2k+1)^2\cdot\text{pgcd}(k^2\,;(k+1)^2).$$

   b. Calculer : $\text{pgcd}(k\,;k+1)$.

   c. Calculer : $\text{pgcd}(S_{2k}\,;S_{2k+1})$.

3. Etude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n=2k+1$.

   a. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.

   b. Calculer : $\text{pgcd}(S_{2k+1}\,;S_{2k+2})$.

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

2. Théorème de Bezout :

Exercice 3226

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a\cdot u+b\cdot v=1$ alors les entiers a et b sont premiers entre eux.

   b. En déduire que si $(a^2+a\cdot b-b^2)^2=1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a\,;b)$ tels que $(a^2+a\cdot b-b^2)^2=1$. Un tel couple sera appelé solution.

   a. Déterminer a lorsque : $a=b$.

   b. Vérifier que $(1\,;1)$, $(2\,;3)$ et $(5\,;8)$ sont trois solutions particulières.

   c. Montrer que si $(a\,;b)$ est solution et si $a<b$, alors :
   $a^2-b^2<0$.

3. a. Montrer que si $(x\,;y)$ est une solution différente de $(1\,;1)$ alors $(y-x\,;x)$ et $(y\,;y+x)$ sont aussi des solutions.

   b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de entiers entiers strictement positifs $(a_n)_n$ définie par $a_0=a_1=1$ et pour tout entier n, $n\geqslant 0$:
   $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.
   Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 0$, $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution.
   En déduire que les entiers a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 3741

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)\cdot\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\right)=x^k-1$$

   Dans toute la suite de l'exercice, on consière un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n :
   $n=d\cdot k$
   Montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1.

   b. Déduire de la question précédente que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur *pgcd*.

   a. On définit m' et n' par $m=d\cdot m'$ et $n=d\cdot n'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que :
   $m\cdot u-n\cdot v=d$.

   b. On suppose u et v strictement positifs.
   Montrer que : $\left(a^{m\cdot u}-1\right)-\left(a^{n\cdot v}-1\right)\cdot a^d=a^d-1$
   Montrer ensuite que a^d-1 est le *pgcd* de :
   $a^{m\cdot u}-1$ et $a^{n\cdot v}-1$

   c. Calculer, en utilisant le résultat précédent le *pgcd* de :
   $2^{63}-1$ et $2^{60}-1$

3. Théorème de Gauss :

Exercice réservé 3630

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.
Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119.

Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier

1. a. Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.

   b. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.

2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E)?

b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5?

3. soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.

a. Montrer que :
"*n est divisible par 3 équivaut à $a+b$ est divisible par 3*"

b. Montrer que :
"*n est divisible par 7 équivaut à b est divisible par 7*"

4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

4. Equation diophantienne :

Exercice 3198

Partie A : Question de cours

1. Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$(S)\ \begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tel que :
$19u + 12v = 1$

(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple)

Vérifier que le nombre $N = 13\times12v + 6\times19u$ est une solution de (S) pour un tel couple.

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à :

$$\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$$

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ équivaut à : $n \equiv n_0 \pmod{12\times19}$.

3. a. Trouver un couple $(u\,;v)$ solution de l'équation $19u+12v=1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) *(on pourra utiliser la question 2. b.)*.

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12\times19$. Quel est le reste r de cette division?

Exercice 3258

On rappelle que 2 003 est un entier premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :
$123u + 2003v = 1$

b. En déduire un entier relatif k_0 tel que :
$123k_0 \equiv 1 \pmod{2003}$

c. Montrer que, pour tout entier relatif x,
$123x \equiv 456 \pmod{2003}$
si, et seulement si, $x \equiv 456k_0 \pmod{2003}$

d. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :
$1 \leqslant n \leqslant 2002$ et $123n \equiv 456 \pmod{2003}$

2. Soit a un entier tel que : $1 \leqslant a \leqslant 2002$

a. Déterminer : $\text{pgcd}(a\,;2003)$
En déduire qu'il existe un entier m tel que :
$a\cdot m \equiv 1 \pmod{2003}$

b. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que :
$0 \leqslant x \leqslant 2\,002$; $a\cdot x \equiv b \pmod{2003}$

Exercice 3256

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + u\cdot x^2 + v\cdot x - 14 = 0$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation :
$14u + 39v = 1129$

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\,;y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation :
$14x + 39y = 1$
Vérifier que le couple $(-25\,;9)$ est solution de cette équation.

c. En déduire un couple $(u_0\,;v_0)$ solution particulière de l'équation :
$14u + 39v = 1129$
Donner la solution générale de cette équation, c'est à dire l'ensemble des couples $(u\,;v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples $(u\,;v)$ précédents, celui pour lequel l'entier u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :
$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.
Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs pre-

miers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

Exercice 3477

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x-6y=1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n\,;m)$ d'entiers naturels non nul vérifiant la relation :

$7^n - 3\times 2^m = 1$ (F)

1. On suppose $m\leqslant 4$.
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m\geqslant 5$.

a. Montrer que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors :
$7^n \equiv 1 \pmod{32}$

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

c. En déduire que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors : $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.

d. Pour $m\geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n\,;m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F)?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Exercice 3905

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) :
$3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tels que :
$3\cdot u + 7\cdot v = 1$
En déduire une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de (E).

2. On considère l'équation notée (G) :
$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Montrer que : $100 \equiv 2 \pmod{7}$.
Démontrer que si $(x\,;y)$ est solution de (G) alors :
$3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$.

b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice 5432

Partie A - Restitution organisée des connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

Théorème de Bézout :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seuleemnt si, il existe un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs vérifiant $a\cdot u+b\cdot v=1$.

Théorème de Gauss :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit $b\cdot c$ et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c

1. En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
Déduire du théorème de Gauss que, si a est un entier relatif, tel que $a\equiv 0 \pmod{p}$ et $a\equiv 0 \pmod{q}$, alors $a\equiv 0 \pmod{pq}$

Partie B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de $\mathcal{S}$.
On désigne par $(u\,;v)$ un couple d'entiers relatifs tels que :
$17\cdot u+5\cdot v=1$

a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u\,;v)$.

b. On pose : $n_0=3\times 17u+9\times 5v$.
Démontrer que n_0 appartient à $\mathcal{S}$.

c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathcal{S}$.

2. Caractérisation des éléments de $\mathcal{S}$.

a. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathcal{S}$.
Démontrer que : $n-n_0\equiv 0 \pmod{85}$.

b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathcal{S}$ si, et seulement, si il peut s'écrire sous la forme $n=43+85k$ où k est un entier relatif.

3. Application.
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.
Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.
Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
Combien a-t-elle de jetons?

Exercice réservé 3322

1. a. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11? Justifier.

b. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5? Justifier.

c. En déduire les deux congruences :
$6^{40} \equiv 1 \pmod{11}$; $6^{40} \equiv 1 \pmod{5}$.

d. Démontrer que $6^{40}-1$ est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation : (E) : $65 \cdot x - 40 \cdot y = 1$ n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation : (E') : $17 \cdot x - 40 \cdot y = 1$ admet au moins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solutions de l'équation (E').

d. Résoudre l'équation (E').
En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que :
$17x_0 \equiv 1 \pmod{40}$

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que :
Si $\begin{cases} a^{17} \equiv b \pmod{55} \\ a^{40} \equiv 1 \pmod{55} \end{cases}$ alors $b^{33} \equiv a \pmod{55}$

5. Problème de codage :

Exercice 5456

Partie A : Restitution organisée de connaissance

Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

Montrer que si $a \equiv b \pmod{n}$ et si $c \equiv d \pmod{n}$ alors $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Partie B : Inverse de 23 modulo 26

On considère l'équation : (E) : $23x - 26y = 1$ où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-9\,;-8)$ est solution de l'équation (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire un entier a tel que :
$0 \leqslant a \leqslant 25$; $23a \equiv 1 \pmod{26}$

Partie C : Chiffrement de Hill

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :

- **Etape 1** Chaque lettre du mot est remplacé par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers $(x_1\,;x_2)$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

- **Etape 2** $(x_1\,;x_2)$ est transformé en $(y_1\,;y_2)$ tel que :
$(\mathcal{S}_1)$: $\begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \pmod{26} \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \pmod{26} \end{cases}$
avec $0 \leqslant y_1 \leqslant 25$ et $0 \leqslant y_2 \leqslant 25$

- **Etape 3** $(y_1\,;y_2)$ est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :

$$\underbrace{\text{TE}}_{\text{mot en clair}} \overset{\text{étape 1}}{\Longrightarrow} (19\,;4) \overset{\text{étape 2}}{\Longrightarrow} (13\,;19) \overset{\text{étape 3}}{\Longrightarrow} \underbrace{\text{NT}}_{\text{mot codé}}$$

1. Coder le mot ST.

2. On veut maintenant déterminer la procédure de décodage :

a. Montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système $(\mathcal{S}_1)$, vérifie les équations du système :
$(\mathcal{S}_2)$: $\begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 \pmod{26} \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 \pmod{26} \end{cases}$

b. A l'aide de la partie **B**, montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système $(\mathcal{S}_2)$, vérifie les équations du système :
$(\mathcal{S}_3)$: $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \pmod{26} \end{cases}$

c. Montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système $(\mathcal{S}_3)$, vérifie les équations du système $(\mathcal{S}_1)$.

d. Décoder le mot YJ

Exercice réservé 3324

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7\,;-3)$ est solution de (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\,;v)$ solution de (E) tel que : $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On "*code*" tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- On calcule $11x + 8$.
- On calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors "*codé*" par y.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée à l'entier 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25 \pmod{26}$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. A l'entier 25 correspond

la lettre Z.

La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.

2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

   a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

$11 \cdot x \equiv j \pmod{26}$ équivaut à $x \equiv 19 \cdot j \pmod{26}$.

   b. En déduire un procédé de décodage.

   c. Décoder la lettre W.

6. Arithmétique et géométrie :

Exercice 3264

1. a. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois entiers p, $p+10$ et $p+20$, et un seulement est divisible par 3.

   b. Les entiers naturels a, b et c sont dans cet ordre les trois premiers terme d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois entiers sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs $(u\,;v\,;w)$ tels que :
   $3 \cdot u + 13 \cdot v + 23 \cdot w = 0$

   a. Montrer que pour un tel triplet : $v \equiv w \pmod{3}$

   b. On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où k, k' et r sont des entiers relatifs et $0 \leqslant r \leqslant 2$.
   Montrer que les éléments de E sont de la forme :
   $\left(-13k - 23k' - 12r \;;\; 3k + r \;;\; 3k' + r\right)$

   c. L'espace est rapporté à un repère orthonormé d'origine O et soit P le plan d'équation $3x + 13y + 23z = 0$.
   Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées $(x\,;y\,;z)$ entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

Exercice réservé 3325

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle "*réseau*" associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormé, dont les coordonnées $(x\,;y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant b$
On note $R_{a,b}$ ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriété géométriques des points correspondants du réseau.

A - Représentation graphique de quelques ensemble

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
Représenter graphiquement les points $M(x\,;y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2 \pmod{3}$ et $y \equiv 1 \pmod{3}$,
   sur le graphique 1 de la feuille annexe.

2. $x + y \equiv 1 \pmod{3}$,
   sur le graphique 2 de la feuille annexe.

3. $x \equiv y \pmod{3}$,
   sur le graphique 3 de la feuille annexe.

B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;y_0)$ solution de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x\,;y)$ pour laquelle le point $M(x\,;y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

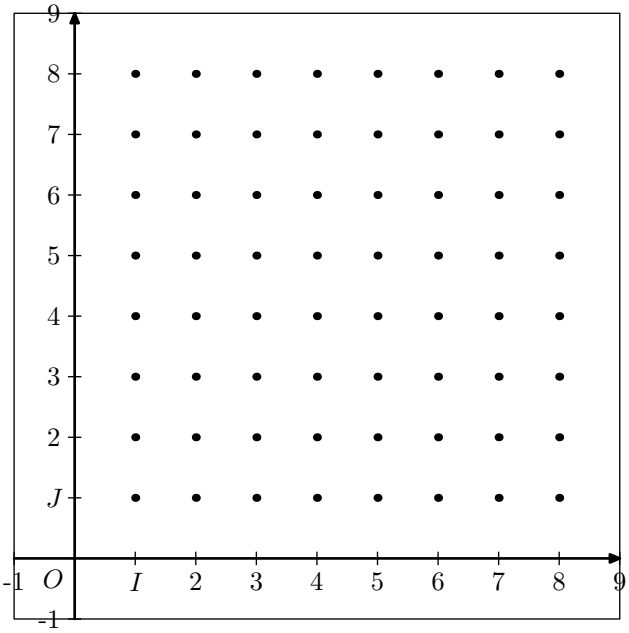
C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[OA]$ du réseau $R_{a,b}$ avec $O(0\,;0)$ et $A(a\,;b)$.

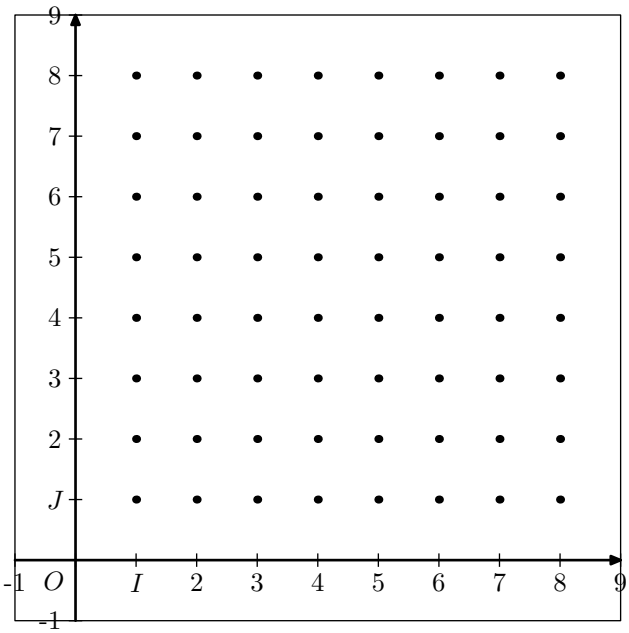
1. Démontrer que les points du segment $[OA]$ sont caractérisés par les conditions :
   $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant b$; $a \cdot y = b \cdot x$

2. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[OA]$ appartenant au réseau $R_{a,b}$.

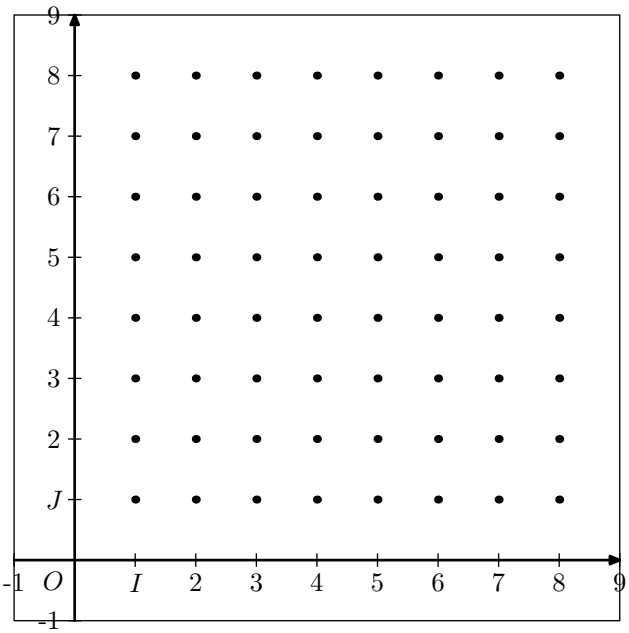
3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[OA]$ contient au moins un autre point du réseau.
   (On pourra considérer le pgcd d des entiers a et b et poser $a = d \cdot a'$ et $b = d \cdot b'$)



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

7. Arithmétique et suite :

Exercice 3254

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n :
$u_{n+2} \equiv u_n \pmod 4$.
En déduire que pour tout entier naturel k :
$u_{2k} \equiv 2 \pmod 4$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod 4$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n :
$2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que le $PGCD$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 3574

1. Calculer le $PGCD$ de 4^5-1 et de 4^6-1.

Soit u la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5 \cdot u_{n+1} - 4 \cdot u_n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

2. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u.

3. a. Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 4 \cdot u_n + 1$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, le $PGCD$ de u_n et u_{n+1}.

4. Soit v la suite définie pour tout entier anturel n par :
$v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$

a. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Déterminer, pour tout entier naturel n, le $PGCD$ de $4^{n+1}-1$ et de 4^n-1.

Exercice 6252

On considère la fonction `f` d'un algorithme prenant pour argument deux entiers naturls `A` et `B` vérifiant `A<B` :

```
Fonction f(A,B)
    D ← B−A
    Tant que D>0
    B ← de A
        A ← de D
        Si B>A
           Alors
               D ← de B−A
           Sinon
               D ← de A−B
        Fin Si
    Fin Tant que
    Renvoyer A
```

1. On appelle la fonction `f` avec pour valeurs des arguments : `A=12` et `B=14`.
On complétera le tableau ci-dessous en y indiquant les valeurs successives prises par les variables `A`, `B` et `D` au cours de l'appel à cette fonction.

A	B	D
12	14	

2. L'appel à la fonction `f` calcule la valeur du $PGCD$ des nombres `A` et `B`.

En entrant `A`$=221$ et `B`$=331$, l'appel à la fonction `f` renvoye la valeur 1.

a. justifier qu'il existe des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation :
(E) : $221\cdot x - 331\cdot y = 1$

b. Vérifier que le couple $(3\,;2)$ est une solution de l'équation (E).
En déduire l'ensemble des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2 + 221\cdot n \quad ; \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 331 \end{cases}$$

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.

b. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p\,;q)$ tels que :
$u_p = v_q \quad ; \quad 0 \leqslant p \leqslant 500 \quad ; \quad 0 \leqslant q \leqslant 500$

255. Exercices non-classés :

Exercice 1604

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point,

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre entier $2^{2n} - 1$

Proposition 2 : Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2+x\equiv 0 \pmod 6$ alors $x\equiv 0 \pmod 3$

Proposition 3 : L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'équation $12\cdot x-5\cdot y=3$ est l'ensemble des couples $(4+10\cdot k\,;9+24\cdot k)$ où $k\in\mathbb{Z}$

Proposition 4 : Il existe un seul couple $(a\,;b)$ de nombres entiers naturels, tel que :
$a<b$ et $PPCM(a\,;b)-PGCD(a\,;b)=1$

Deux entiers naturesl M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M-N$ est aussi divisible par 27.

Exercice 3133

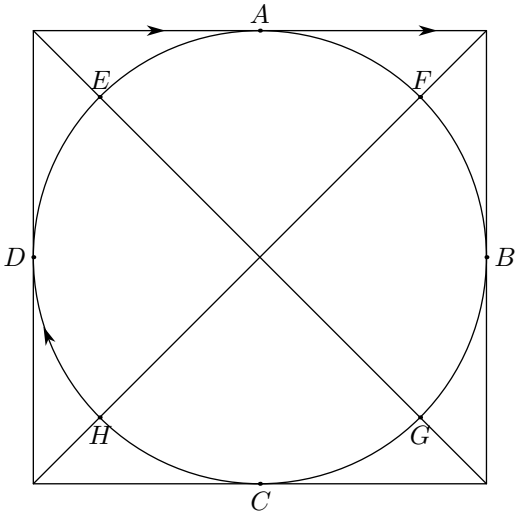
1. On considère l'équation : $(\mathcal{E})$: $17x - 24y = 9$
où $(x\,;y)$ est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(9\,;6)$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

b. Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma de l'annexe 2. Il peut s'installer sur l'un des huits points indiqués sur le cercle. Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui, se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à la vitesse constante. Il fait un tour à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.

Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.
A l'instant $t=0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.



a. On suppose qu'à un certain instant t jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. A l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que $(x\,;y)$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$ de la question 1.

b. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon?

c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

d. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes.

Exercice 6249

Partie A

Le but de cette partie est de démonstrer que l'ensemble des entiers premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini d'entiers premiers notés p_1, p_2, …, p_n.
On considère l'entier E produit de tous les entiers premiers augmenté de 1 :
$E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$

   Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des entiers p_1, p_2, …, p_n.

2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier, conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose : $M_k = 2^k - 1$.
On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1. a. Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k									

   b. D'après le tableau précédent, si k est un entier premier, peut-on conjecturer que l'entier M_k est premier?

2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

   a. Justifier l'égalité :
$$1 + 2^p + \left(2^p\right)^2 + \cdots + \left(2^p\right)^{q-1} = \frac{\left(2^p\right)^q - 1}{2^p - 1}$$

   b. En déduire que $2^{p \cdot q} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

   c. En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3. a. Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

   b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b. ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = {u_n}^2 - 2$

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que l'entier M_n est premier si, et seulement si, $u_{n-2} \equiv 0 \pmod{M_n}$.
Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier.

2. La fonction de l'algorithme suivant prend pour argument un entier `n` supérieur ou égal à 3 et doit renvoyer 1 si le nombre de Mersenne M_n est premier et 0 sinon, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

```
Fonction f(n)
    u ← 4
    M ← ...
    Pour i allant de 1 à ...
        u ← ...
    Fin Pour
    Si M divise u
        Alors
            Renvoyer ......
        Sinon
            Renvoyer ......
    Fin Si
```

   Recopier et compléter le code de la fonction `f` de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue.

Exercice 3552

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que : $x^4 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 4 \cdot x^2$.

2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients entiers.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers : $A = n^2 - 2n + 2$; $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur $PGCD$.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.

3. Montrer que, tout diviseur commun de A et de B, divise $4n$.

4. Dans cette question, on suppose que n est impair.

   a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

   b. Montrer que d divise n.

   c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5. On suppose maintenant que n est pair.

   a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.

   b. Montrer que d est de la forme $d = 2 \cdot p$, où p est impair.

   c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. *(On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)*.

Exercice 6928

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $S(n) \geqslant 1 + n$

   b. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des entiers premiers distincts.

   a. Démontrer que : $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.

b. On considère la proposition suivante :
"*Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts,* $S(n\times m)=S(n)\times S(m)$"
Cette proposition est-elle vraie ou fausse? Justifier.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un entier premier et k un entier entier naturel non nul.

a. Quels sont les diviseurs de n?

b. En déduire que : $S(n)=\dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$.

5. On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13}\times q^7$, où p et q sont des entiers premiers distincts.

a. Soit m un entier naturel.
Démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux entiers s et t avec $0\leqslant s\leqslant 13$ et $0\leqslant t\leqslant 7$ tels que $m=p^s\times q^t$.

b. Démontrer que : $S(n)=\dfrac{1-p^{14}}{1-p}\times\dfrac{1-q^8}{1-q}$

Exercice 6946

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls $(a\,;b)$, on note $\text{pgcd}(a\,;b)$ le plus grand diviseur commun de a et b.
Le plan est muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation : $y=\dfrac{5}{4}\cdot x-\dfrac{2}{3}$

a. Montrer que si $(x\,;y)$ est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15\cdot x-12\cdot y$ est divisible par 3.

b. Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs? Justifier.

Généralisation :

On considère désormais une droite Δ d'équation :
$y=\dfrac{m}{n}\cdot x-\dfrac{p}{q}$
où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que :
$\text{pgcd}(m\,;n)=\text{pgcd}(p\,;q)=1$
Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.
Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées $\left(x_0\,;y_0\right)$ où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

a. En remarquant que le nombre $n\cdot y_0-m\cdot x_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit $n\cdot p$.

b. En déduire que q divise n.

3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple $\left(x_0\,;\,y_0\right)$ d'entiers relatifs tels que :
$y_0=\dfrac{m}{n}\cdot x_0-\dfrac{p}{q}$.

a. On pose $n=q\cdot r$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels qe :
$q\cdot r\cdot u-m\cdot v=1$.

b. En déduire qu'il existe un couple $(x_0\,;y_0)$ d'entiers relatifs tels que :
$y_0=\dfrac{m}{n}\cdot x_0-\dfrac{p}{q}$

4. Soit Δ la droite d'équation $y=\dfrac{3}{8}\cdot x-\dfrac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs? Justifier.

5. On considère la fonction `f` d'un algorithme prenant pour argument les entiers `M`, `N`, `P` et `Q`. De plus, on suppose que les arguments passés lors de l'appel à la fonction `f` vérifie :
$\text{pgcd}(\texttt{M}\,;\texttt{N})=\text{pgcd}(\texttt{P}\,;\texttt{Q})=1$

```
Fonction f(M,N,P,Q)
    Si Q divise N
    Alors
        X ← 0
        Tant que (M/N·X−P/Q n'est pas entier)
                et (−M/N·X−P/Q n'est pas entier)
            X ← X+1
        Fin Tant que
        Si M/N X−P/Q est entier
        Alors
            Renvoyer ( X ; M/N·X−P/Q )
        Sinon
            Renvoyer ( −X ; M/N·X−P/Q )
        Fin Si
    Sinon
        Renvoyer "Pas de solution"
    Fin si
```

a. Justifier que l'appel à la fonction `f` se termine pour toutes valeurs passées en argument de `M`, `N`, `P`, `Q`, entiers relatifs non nuls vérifiant :
$\text{pgcd}(\texttt{M}\,;\texttt{N})=\text{pgcd}(\texttt{P}\,;\texttt{Q})=1$.

b. Que permet-il d'obtenir?

Exercice réservé 3551

Soit p un entier premier donné. On se propose d'étudier l'exitence de couples $(x\,;y)$ d'entier naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

(E) : $x^2+y^2=p^2$

1. On pose $p=2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution.

On suppose désormais $p\neq 2$ et que le couple $(x\,;y)$ est solution de l'équation (E).

2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.

a. Montrer que x et y sont de parités différentes.

b. Montrer que x et y ne sont pas divisibiles par p.

c. En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est à dire : $p=u^2+v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

a. Vérifier qu'alors le couple $(|u^2-v^2|\,;2\cdot u\cdot v)$ est solution de l'équation (E).

b. Donner une solution de l'équation (E) lorsque $p=5$

puis lorsque $p=13$.

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

   a. $p=3$ et $p=7$ sont-ils somme de deux carrés?

   b. Démontrer que les équations $x^2+y^2=9$ et $x^2+y^2=49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

Exercice réservé 5862

On note E l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26.
On note A l'ensemble dont les éléments sont les vingt-six lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté "$\star$" considéré comme un caractère.
Pour coder les éléments de A, on procède de la façon suivante :

- *Premièrement* : on associe à chacune des lettres de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant. On a donc :
  $a \longmapsto 0$; $b \longmapsto 1$; ... ; $z \longmapsto 25$.
  On associe au séparateur "$\star$" le nombre entier 26.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	$\star$
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

  On dit que a a pour rang 0, b a pour rang 1,..., z a pour rang 25 et le séparateur "$\star$" a pour rang 26.

- *Deuxièmement* : à chaque élément x de E, l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x+3$ par 27.
  On remarquera que, pour tout x de E, $g(x)$ appartient à E.

- *Troisièmement* : le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang $g(x)$.

Exemple :
$s \longmapsto 18$; $g(18)=21$; $21 \longmapsto v$.
Donc, la lettre s est remplacée lors du codage par la lettre v.

1. Trouver tous les entiers x de E tel que $g(x)=x$, c'est à dire invariants par l'application g.
   En déduire tous les caractères invariants dans ce codage.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel x appartenant à E et tout entier naturel y appartenant à E :
   Si $y \equiv 4x+3 \pmod{27}$ alors $x \equiv 7y+6 \pmod{27}$
   En déduire que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

3. Proposer une méthode de décodage.

4. Décoder le mot "vfv".

Exercice réservé 6903

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1111... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\ldots1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre 1}}} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non-nul.
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.

2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.

   a. Prouver que, pour tout entier naturel j :
   $10^j \equiv 1 \pmod{3}$

   b. En déduire que $N_p \equiv p \pmod{3}$.

   c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.

3. Dans cette question, on étudie la divisibilité N_p par 7.

   a. Recopier et compléter le tableau des congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à :
   $\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$
   tel que : $10^m \equiv a \pmod{7}$
   On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

   b. Soit p un entier naturel non nul.
   Montrer que $10^p \equiv 1 \pmod{7}$ si, et seulement si, p est un multiple de 6.
   On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

   c. Justifier que, pour tout entier naturel p non-nul :
   $N_p = \dfrac{10^p-1}{9}$

   d. Démontrer que "*7 divise* N_p" est équivalent à "*7 divise* $9 \cdot N_p$".

   e. En déduire que N_p est divisible par 7 si, et seulement si, p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est à dire $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$

   a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous :

$n \equiv \ldots [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots [10]$										

   b. En déduire qu'il existe une entier naturel m tel que :
   $n = 10 \cdot m + 1$ ou $n = 10 \cdot m - 1$

   c. Conclure que : $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20?

3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 8134

A toute lettre de l'alphabet on associe un nombre entier x compris entre 0 et 25 comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le "*chiffre de RABIN*" est un dispositif de cryptage asymétrique inventé en 1979 par l'informaticien Michael Rabin.

Alice veut communiquer de manière sécurisée en utilisant ce cryptosystème. Elle choisit deux nombres distincts p et q. Ce couple de nombres est sa clé privée qu'elle garde secrète. Elle calcule ensuite $n=p\times q$ et elle choisit un nombre entier naturel B tel que $0\leqslant B\leqslant n-1$.
Si Bob veut envoyer un message secret à Alice, il le code lettre par lettre.
Le codage d'une lettre représentée par le nombre entier x est le nombre y tel que :

$$y\equiv x\left(x+B\right) \pmod{n} \quad \text{avec } 0\leqslant y\leqslant n$$

Dans tout l'exercice, on prend $p=3$, $q=11$ donc $n=p\times q=33$ et $B=13$.

Partie A : Cryptage

Bob veut envoyer le mot "*NO*" à Alice.

1. Montrer que Bob code la lettre "*N*" avec le nombre 8.

2. Déterminer le nombre qui code la lettre "*O*".

Partie B : Décryptage

Alice a reçu un message crypté qui commence par le nombre 3.
Pour décoder ce premier nombre, elle doit déterminer le nombre entier x tel que :

$$x\left(x+3\right)\equiv 3 \pmod{33} \quad 0\leqslant x<26$$

1. Montrer que $x\cdot\left(x+13\right)\equiv 3 \pmod{33}$ équivaut à $\left(x+23\right)^2\equiv 4 \pmod{33}$.

2. a. Montrer que si $\left(x+23\right)^2\equiv 4 \pmod{33}$ alors le système d'équations

$$\begin{cases} \left(x+23\right)^2 \equiv 4 \pmod{3} \\ \left(x+23\right)^2 \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$ est vérifié.

b. Réciproquement, montrer que si

$$\begin{cases} \left(x+23\right)^2 \equiv 4 \pmod{3} \\ \left(x+23\right)^2 \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

alors $\left(x+23\right)^2\equiv 4 \pmod{33}$

c. En déduire que :

$$x\cdot\left(x+13\right)\equiv 3 \pmod{33} \iff \begin{cases} \left(x+23\right)^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ \left(x+23\right)^2 \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

3. a. Déterminer les nombres entiers naturels a tels que $0\leqslant a<3$ et $a^2\equiv 1 \pmod{3}$

b. Déterminer les nombres entiers naturels b tels que $0\leqslant b<11$ et $b^2\equiv 4 \pmod{11}$

4. a. En déduire que $x\cdot\left(x+13\right)\equiv 3 \pmod{33}$ équivaut aux quatres systèmes suivants :

$$\begin{cases} x\equiv 2 \pmod{3} \\ x\equiv 8 \pmod{11} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x\equiv 0 \pmod{3} \\ x\equiv 1 \pmod{11} \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x\equiv 2 \pmod{3} \\ x\equiv 1 \pmod{11} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x\equiv 0 \pmod{3} \\ x\equiv 8 \pmod{11} \end{cases}$$

b. On admet que chacun de ces systèmes admet une unique solution entière x telle que $0\leqslant x<33$.
Déterminer, sans justification, chacune de ces solutions.

5. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche les quatre solutions trouvées dans la question précédente.

```
Pour...allant de...à...
  Si le reste de la division de...par...est égal à...alors
    Afficher ...
  Fin Si
Fin Pour
```

6. Alice peut-elle connaître la première lettre du message envoyé par Bob?
Le "*chiffre de RABIN*" est-il utilisable pour décode un message lettre par lettre?

Exercice 8140

Le but de cet exercice est d'envisager une méthode de cryptage à clé publique d'une information numérique, appelée système RSA, en l'honneur des mathématiciens Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman, qui ont inventé cette méthode de cryptage en 1977 et l'ont publiée en 1978.

Les questions 1. et 2. sont des questions préparatoires, la question 3. aborde le cryptage, la question 4. le décryptage.

1. Cette question envisage de calculer le reste dans la division euclidienne par 55 de certaines puissances de l'entier 8.

a. Vérifier que $8^7\equiv 2 \pmod{55}$.
En déduire le reste dans la division euclidienne par 55 du nombre 8^{21}.

b. Vérifier que $8^2\equiv 9 \pmod{55}$, puis déduire de la question a. le reste dans la division euclidienne par 55 de 8^{23}.

2. Dans cette question, on considère l'équation :
(E) $23\cdot x-40\cdot y=1$,
dont les solutions sont des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs.

a. Justifier le fait que l'équation (E) admet au moins un couple solution.

b. Donner un couple, solution particulière de l'équation (E).

c. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solution de l'équation (E).

d. En déduire qu'il existe un unique entier d vérifiant les conditions : $0\leqslant d<40$ et $23\cdot d\equiv 1 \pmod{40}$.

3. Cryptage dans le système RSA

Une personne A choisit deux nombres premiers p et q, puis calcule les produits $N=p\cdot q$ et $n=\left(p-1\right)\left(q-1\right)$. Elle choisit également un entier naturel c premier avec n.
La personne A publie le couple $(N\,;c)$, qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.
Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et $n-1$.
Pour crypter un entier a de cette suite, on procède ainsi :

on calcule le reste b dans la division euclidienne par N du nombre a^c, et le nombre crypté est l'entier b.
Dans la pratique, cette méthode est sûre si la personne A choisit des nombres premiers p et q très grands, s'écrivant avec plusieurs dizaines de chiffres.
On va l'envisager ici avec des nombres plus simples :
$p=5$ et $q=11$.
La personne A choisit également $c=23$.

a. Calculer les nombres N et n, puis justifier que la valeur de c vérifie la condition voulue.

b. Un émetteur souhaite envoyer à la personne A le nombre $a=8$.
Déterminer la valeur du nombre crypté b.

4. Décryptage dans le système RSA

La personne A calcule dans un premier temps l'unique entier naturel d vérifiant les conditions :
$0 \leqslant d < n$ et $c \cdot d \equiv 1 \pmod{n}$.

Elle garde secret ce nombre d qui lui permet, et à elle seule de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.
Pour décrypter un nombre crypté b, la personne A calcule le reste a dans la division euclidienne par N du nombre b^d, et le nombre en clair - c'est-à-dire le nombre avant cryptage - est le nombre a.

On admet l'existence et l'unicité de l'entier d, et le fait que le décryptage fonctionne.

Les nombres choixis par A sont encore $p=5$, $q=11$ et $c=23$.

a. Quelle est la valeur de d?

b. En appliquant la règle de décryptage, retrouver le nombre en clair lorsque le nombre crypté est $b=17$.

Exercice 8149

Amérique du sud 2018