Terminales S - Spécialité/Annales sur l'arithmétiques

255. Exercices non-classés :

Exercice 3597

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est à dire tel que $n^3 \equiv 2009 \pmod{10\,000}$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.

2. En déduire que : $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \pmod{16}$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. a. Démontrer que u_0 est divisible par 5.

   b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = u_n \cdot \left[u_n^4 + 5 \cdot \left(u_n^3 + 2 \cdot u_n^2 + 2 \cdot u_n + 1\right)\right]$

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. a. Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$.

   b. Démontrer alors que : $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \pmod{625}$

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que :
   $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisible par $10\,000$.

2. Conclure, c'est à dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

Exercice 3631

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit : $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.
Déterminer les paires $\{a;b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. L'entier $(n-1)!$ est-il pair?

2. L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair?

3. Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15.

4. L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier $(p \geqslant 2)$.

1. Prouver que p admet un diviseur q $(1<q<p)$ qui divise $(p-1)!$

2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

Exercice 3208

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point :

Proposition 1 : "pour tout entier naturel n, 3 divise l'entier $2^{2n}-1$".

Proposition 2 : "si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2+x \equiv 0 \pmod{6}$ alors $x \equiv 0 \pmod{3}$".

Proposition 3 : "l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x;y)$ solutions de l'équation $12x-5y=3$ est l'ensemble des couples :
$(4+10k;9+24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$".

Proposition 4 : "Il existe un seul couple $(a;b)$ de nombres entiers naturels, tel que :
$a<b$; $PPCM(a,b) - PGCD(a,b) = 1$".

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : "Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M-N$ est aussi divisible par 27".

Exercice réservé 3321

1. On considère l'ensemble : $A_7 = \{1;2;3;4;5;6\}$

   a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que :
   $a \cdot y \equiv 1 \pmod{7}$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

   b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3 \cdot x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.

   c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a \cdot x \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un entier premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1;2;\dots;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation :
$a{\cdot}x \equiv 1 \pmod{p}$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $a{\cdot}x \equiv 1 \pmod{p}$.

c. Soit x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $x{\cdot}y \equiv 0 \pmod{p}$ si, et seulement si, x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d. Application : $p=31$.
Résoudre dans A_{31} les équations :
$2x \equiv 1 \pmod{31}$; $3x \equiv 1 \pmod{31}$
A l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $6x^2-5x+1 \equiv 0 \pmod{31}$.

Exercice 3626

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que :

$$\begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$

a. Vérifier que 239 est solution de ce système.

b. Soit N un entier relatif solution de ce système.
Démontrer que N peut s'écrire sous la forme :
$N = 1+17{\cdot}x = 5+13{\cdot}y$
où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x-13y=4$.

c. Résoudre l'équation $17{\cdot}x-13{\cdot}y=4$ où x et y sont des entiers relatifs.

d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que :
$N = 18+221{\cdot}k$.

e. Démontrer l'équivalence entre :

$$N \equiv 18 \pmod{221} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Existe-t-il un entier naturel k non-nul tel que :
$10^k \equiv 1 \pmod{17}$?

b. Existe-t-il un entier naturel ℓ tel que :
$10^\ell \equiv 18 \pmod{221}$?

Exercice 3837

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1\,;46]$.

1. On considère l'équation : $(E) :\ 23{\cdot}x+47{\cdot}y=1$
où x et y sont des entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;y)$ solutions de (E).

c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que :
$23{\cdot}x \equiv 1 \pmod{47}$

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a. Montrer que si $a{\cdot}b \equiv 0 \pmod{47}$ alors :
$a \equiv 0 \pmod{47}$ ou $b \equiv 0 \pmod{47}$

b. En déduire que si $a^2 \equiv 1 \pmod{47}$ alors :
$a \equiv 1 \pmod{47}$; $a \equiv -1 \pmod{47}$

3. a. Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que :
$p \times q \equiv 1 \pmod{47}$.

Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que :
$p \times inv(p) \equiv 1 \pmod{47}$

Par exemple :

- $inv(1)=1$ car $1\times1 \equiv 1 \pmod{47}$
- $inv(2)=24$ car $2\times24 \equiv 1 \pmod{47}$
- $inv(3)=16$ car $3\times16 \equiv 1 \pmod{47}$

b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient :
$p = inv(p)$

c. Montrer que : $46! \equiv -1 \pmod{47}$