

Terminales S - Spécialité/Annales sur la congruence

255. Exercices non-classés :

Exercice 3142

Rappel:

Pour deux entiers relatifs a et b , on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \pmod{7}$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. Cette question constitue une restitution organisée de connaissances:

a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Démontrer que:

$$\text{Si } a \equiv b \pmod{7} \text{ et } c \equiv d \pmod{7} \\ \text{alors } a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{7}.$$

b. En déduire que: pour a et b entiers relatifs non nuls. Si $a \equiv b \pmod{7}$ alors pour tout entier naturel n : $a^n \equiv b^n \pmod{7}$.

2. Pour $a=2$ puis pour $a=3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que: $a^n \equiv 1 \pmod{7}$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que: $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

b. On appelle *ordre* de $a \pmod{7}$, et on désigne par k , le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod{7}$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod{7}$.

En déduire que k divise 6.

Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. A tout entier naturel n , on associe le nombre:

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

$$\text{Montrer que: } A_{2006} \equiv 6 \pmod{7}$$

Exercice réservé 3187

Etant donné un entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que:

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$$

Partie A: Etude de deux cas particuliers

1. Dans cette question, on suppose que $n=2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la question précédente.

2. Dans cette question, on suppose $n=3$.

a. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

b. Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que:

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod{8}?$$

Partie B: Etude du cas général où $n \geq 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que:

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$$

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors:

$$x = 2q \quad ; \quad y = 2r \quad ; \quad z = 2s + 1$$

où q, r, s sont des entiers naturels.

a. Montrer que: $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

b. En déduire une contradiction.

3. On suppose que x, y, z sont impairs.

a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.

b. En déduire que: $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod{8}$.

c. Conclure.

Exercice réservé 3240

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.

2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q .

3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a; b)$ vérifiant la relation:

$$(E) : a^2 - 250\,507 = b^2$$

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9; puis ceux de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2 .

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1

et 8.

2. Justifier que si le couple $(a; b)$ vérifie la relation (E) , alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501; b)$.
3. On suppose que le couple $(a; b)$ vérifie la relation (E) .
 - a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
 - b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505+9k; b)$ soit solution de (E) , puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux?
3. Cette écriture est-elle unique?

Exercice 3319

1.
 - a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n .
 - b. Démontrer alors que : $(2005)^{2005} \equiv 7 \pmod{9}$.
2.
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1 \pmod{9}$.
 - b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante : $N \equiv S \pmod{9}$.
 - c. En déduire que N est divisible par 9 si, et seulement si, S est divisible par 9.
3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
 - B la somme des chiffres de A ;
 - C la somme des chiffres de B ;
 - D la somme des chiffres de C .
 - a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D \pmod{9}$.
 - b. Sachant que $2005 < 10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que : $B \leq 72180$.
 - c. Démontrer que : $C \leq 45$.
 - d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.
 - e. Démontrer que : $D = 7$.

Exercice 3554

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.
 - a. Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
 - b. Démontrer que, pour tout n , $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
 - c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.
 - d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n

quelconque?

- e. En déduire que, pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7.
2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 - a. Montrer que si U_n est divisible par 7 alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
 - b. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7 alors U_n est divisible par 7.
En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisibles par 7.

Exercice réservé 3570

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
En déduire $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier :
$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$$
 - a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7?
 - b. Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
 - c. Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

Exercice réservé 3572

On se propose de déterminer les couples $(n; m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$$7^n - 3 \times 2^m = 1 \quad (F)$$

1. On suppose $m \leq 4$.
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.
 - a. Montrer que si le couple $(n; m)$ vérifie la relation (F) alors :
$$7^n \equiv 1 \pmod{32}$$
 - b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n; m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
 - c. En déduire que si le couple $(n; m)$ vérifie la relation (F) alors :
$$7^n \equiv 1 \pmod{5}$$
 - d. Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples $(n; m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est à dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F) .

Exercice réservé 3629

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple :

$$10 = 9 + 1^2 \quad ; \quad 13 = 9 + 2^2 \quad ; \quad \dots$$

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence

d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Etude de l'équation d'inconnue a :
 $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.
 - a. Montrer que si a existe, a est impair.
 - b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.
2. Etude de l'équation d'inconnue a :
 $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
 - a. Montrer que si $n \geq 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.
 - b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.
 - c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.
3. Etude de l'équation d'inconnue a :
 $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
 - a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.
 - b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de 2. c. démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

Exercice réservé 5863

Partie A

On considère la fonction f issue d'un algorithme où ses arguments prennent pour valeurs des entiers naturels non-nul :

Fonction $f(a, b)$
 $c \leftarrow 0$
 Tant que $a > b$
 $c \leftarrow c + 1$
 $a \leftarrow a - b$
 Fin Tant que
 Renvoyer (c, a)

1. Indiquerant les valeurs des variables prises successivement lors de l'appel à la fonction f avec les valeurs $a = 13$ et $b = 4$.
2. Comment interpréter, en fonction des valeurs a et b fournies en argument, la valeur du couple renvoyé par la fonction f lors d'un appel.

Partie B

A chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Etape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre entier m correspondant dans le tableau.

Etape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p .

Etape 3 : Au nombre entier p , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U .
2. Modifier la fonction f de l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il renvoie la valeur de p , calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que : $9x \equiv 1 \pmod{26}$.
2. Démontrer alors l'équivalence :
 $9m + 5 \equiv p \pmod{26} \iff m \equiv 3p - 15 \pmod{26}$
3. Décoder alors la lettre B .

Exercice 5960

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
 En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier :
 $Q_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$
 - a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de Q_p par 7?
 - b. Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors Q_p est divisible par 7.
 - c. Etudier le cas où $p = 3n + 2$
4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :
 $a = 1001001000$; $b = 1000100010000$
 Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p . Sont-ils divisibles par 7?

Exercice 6795

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine. Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre entier associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).

Exemple :

- M correspondant à $x = 12$
- $7 \times 12 + 5 = 89$
- Or $89 \equiv 11 \pmod{26}$ et 11 correspondant à la lettre L , donc la lettre M est codée par la lettre L .

1. Coder la lettre L .

2. a. Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x \pmod{26}$ alors $15 \cdot k \equiv x \pmod{26}$.
- b. Démontrer la réciproque de l'implication précédente.
- c. En déduire que $y \equiv 7x + 5 \pmod{26}$ équivaut à $x \equiv 15 \cdot y + 3 \pmod{26}$.
3. A l'aide de la question précédente décoder la lettre E .

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7 \cdot a_n + 5 \\ b_{n+1} = 15 \cdot b_n + 3 \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n :

$$a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6}$$

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n :

$$b_n = \left(b_0 + \frac{3}{14}\right) \times 15^n - \frac{3}{14}$$

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (*on peut tester les 312 couples de coefficients possibles*). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.

Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique "2" fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), "2" fois le chiffrement de la lettre A , "5" fois le chiffrement à la lettre T et enfin "6" fois le chiffrement à la lettre H .

Dans cette partie, on utilisera la clé 2 - 2 - 5 - 6.
Décoder la lettre Q dans le mot $IYYQ$.