Terminales S - Spécialité/70-miniRevision

1. Congruence :

Exercice réservé 4283

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009}+2009$ par 11.

Exercice réservé 4286

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.
2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$

Exercice réservé 4289

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11? Justifier.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5? Justifier.
3. En déduire que :
   $6^{40}\equiv1 \pmod{11}$ et $6^{40}\equiv1 \pmod{5}$.
4. Démontrer que $6^{40}-1$ est divisible par 55.

Exercice réservé 4282

On considère l'équation notée (G) : $3{\cdot}x^2+7{\cdot}y^2=10^{2\cdot n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $100\equiv2 \pmod{7}$
   Démontrer que si $(x\,;y)$ est solution de (G) alors :
   $3{\cdot}x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$.
2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3{\cdot}x$ par 7							

Exercice réservé 4290

Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b \pmod{55}$ et si $a^{40} \equiv 1 \pmod{55}$ alors $b^{33} \equiv a \pmod{55}$

Exercice réservé 4278

On considère l'équation (E) : $x^2+y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ où $(x\,;y)$ est un couple d'entiers relatifs.

Etablir que si un couple est solution de l'équation (E) alors c'est un couple de multiple de 3.

Exercice réservé 4274

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = 2^n+3^n+6^n-1$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.

Exercice réservé 4277

On considère la relation : (F) : $7^n-3\times2^m=1$

1. On suppose $m\leqslant4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m\geqslant5$.
   a. Montrer que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors : $7^n\equiv1 \pmod{32}$.
   b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
   c. En déduire que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n\equiv1 \pmod{5}$

Exercice réservé 4285

Soient a et b deux entiers relatifs.

1. Montrer que si $a{\cdot}b \equiv 0 \pmod{47}$ alors $a \equiv 0 \pmod{47}$ ou $b \equiv 0 \pmod{47}$
2. En déduire que si $a^2 \equiv 1 \pmod{47}$ alors $a \equiv 1 \pmod{47}$ ou $a \equiv -1 \pmod{47}$

Exercice réservé 4287

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieures ou égaux à 9 avec $a\neq0$.

On considère le nombre $N=a\times10^3+b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme : $N=\overline{a00b}$

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

1. Vérifier que : $10^3\equiv-1 \pmod{7}$
2. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

2. Nombres premiers :

Exercice réservé 4288

k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.

2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

Exercice réservé 4276

On considère l'équation (E): $7{\cdot}x-6{\cdot}y=1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Exercice réservé 4272

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose:
$A(n)=n^4+1$

1. Etudier la parité de l'entier $A(n)$.

2. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.

3. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.

4. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
$n^8 \equiv 1 \pmod{d}$

Exercice réservé 4273

Soit $(x\,;y\,;z)$ un triplet solution des deux équations suivantes:
$z=(x-y)^2 \quad ; \quad z=x{\cdot}y$

1. Montrer que si $x=0$, alors le triplet $(x\,;y\,;z)$ a pour valeur $(0\,;0\,;0)$.

2. On suppose dorénavant que l'entier x n'est pas nul.

   a. Montrer que les entiers x, y, z vérifient:
   $x^2-3{\cdot}x{\cdot}y+y^2=0$
   En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que:
   $x'^2-3{\cdot}x'{\cdot}y'+y'^2=0$

   b. Montrer que x' divise y'^2, puis que x' divise y'.

   c. Etablir que y' vérifie la relation ; $1-3{\cdot}y'+y'^2=0$

   d. Etablir que y' vérifie la relation:
   $1-3{\cdot}y'+y'^2=0$

   e. Conclure.

3. PGCD :

Exercice réservé 4281

On se propose d'étudier des couples $(a\,;b)$ d'entiers strictement positifs, tels que:
$a^2=b^3$

Soit $(a\,;b)$ un tel couple et $d=PGCD(a\,;b)$. On note u et v les entiers tels que $a=d{\cdot}u$ et $b=d{\cdot}v$.

1. Montrer que: $u^2=d{\cdot}v^3$.

2. En déduire que v divise u, puis que $v=1$.

3. Soit $(a\,;b)$ un couple d'entiers strictement positifs. Démontrer que l'on a $a^2=b^3$ si, et seulement si, a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

Exercice réservé 4284

Soit p un nombre entier naturel. Pour tout entier naturel non-nul, on définit le nombre A_n par:
$A_n=2^n+p$

On note d_n le $PGCD$ de A_n et A_{n+1}:

1. Montrer que d_n divise 2^n.

2. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier

Exercice réservé 4291

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse:

"*S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a{\cdot}u+b{\cdot}v=2$ alors le $PGCD$ de a et de b est égal à 2.*"

