Term L spé/Fonction exponentielle et logarithme

1. Propriétés algébriques :

Exercice 2032

Donner le résultat des calculs suivants :

a. $\ln e^5$ b. $\ln\left(e^5 \cdot e^{-2}\right)$

d. $e^{\ln 5}$ e. $e^{\ln 2+\ln\frac{1}{2}}$

f. $\dfrac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 3}}$ g. $\ln 10\,000 + \ln 100$

h. $\dfrac{\ln 100}{\ln 1\,000}$ c. $\ln\dfrac{2e^3}{3} + \ln\dfrac{8e^2}{3}$

Exercice réservé 2030

Simplifier les écritures suivantes :

a. $e^{3x+1} \cdot e^{2-2x}$ b. $\dfrac{e^{x-2}}{e^{3-x}}$

c. $e^{-x} - \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$ d. $\exp(2x+4)\times\exp(3-x)$

e. $\dfrac{\exp(x)^2}{\exp(3-2x)}$ f. $\ln x - \ln(2x)$

g. $2\ln x - \ln x$ h. $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + \ln x$

Exercice 2031

Simplifier au maximum l'expressions suivante :

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

Exercice réservé 116

Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

a. $e^x \cdot e^{2x}$ b. $\left(e^{2x-1}\right)^4$ c. $e^{\ln x}$

d. $e^{-\ln x}$ e. $e^x \cdot e^{\ln x}$ f. $\ln e^x$

g. $\ln\left(x \cdot e^x\right)$ h. $\ln\left[\left(e^x\right)^2\right]$

2. Fonction exponentielle :

Exercice 101

1. Résoudre le système suivant, où u et v sont des nombres réels :
$$\begin{cases} u + \dfrac{1}{2}\cdot v = 0 \\ u - \dfrac{1}{4}\cdot v = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = a\cdot e^x + \frac{b}{e^x+1} \quad (a \text{ et } b \text{ réels})$$
Trouver les valeurs des réels a et b, sachant que la courbe représentative de la fonction f dans une repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ passe par O et que la tangente à la courbe en ce point est parallèle à la droite (Δ) déquation $y=\dfrac{3}{2}x-2$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-\dfrac{2}{e^x+1}$

   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $g(x)=0$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $g(x)\geqslant 1$

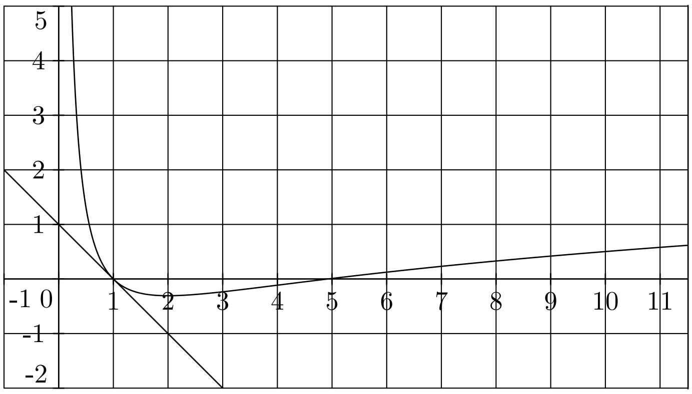
3. Fonction logarithme :

Exercice réservé 102

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

partie A

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,10]$. On note f' la fonction dérivée de f sur cette intervalle.



On précise que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A de coordonnées $(1\,;2)$ et qu'elle passe par le point de coordonnées $(0\,;1)$.

1. Répondre aux deux questions suivantes par lecture graphique :
   a. Donner $f(1)$ et $f'(1)$ en justifiant la valeur de $f'(1)$.
   b. Lire les solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $]0\,;10]$.
2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}+b$, où a et b désignent deux nombres réels.
   a. Calculer $f'(x)$.
   b. En utilisant les valeurs trouvées pour $f(1)$ et $f'(1)$ à la question 1., calculer a et b.
   c. En déduire l'expression de $f(x)$.

Partie B

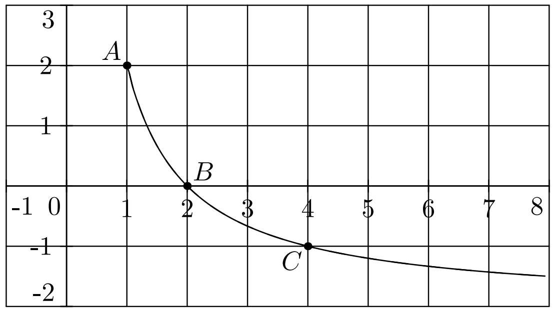
On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par : $f(x)=\ln x+\dfrac{2}{x}-2$.

1. a. Vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;10]$:
   $f'(x)=\dfrac{x-2}{x}$
   Etudier le signe $f'(x)$
   b. On admet que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est $+\infty$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   En déduire le nombre de solutions de l'équation :
   $f(x)=0$
   sur l'intervalle $]0\,;10]$.
2. Le nombre 5 est-il vraiment solution de l'équation : $f(x)=0$?

Exercice 79

Partie I

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[1\,;8]$, strictement décroissante, dont la représentation graphique $\mathscr{C}$ dans repère orthonormé est donnée ci-contre. La courbe $\mathscr{C}$ contient les points $A(1\,;2)$, $B(2\,;0)$ et $C(4\,;-1)$.



1. En utilisant la représentation graphique, donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.
2. On suppose que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;8]$
   $f(x)$ s'écrit : $f(x)=-2+\dfrac{4}{x}$
   Retrouver par le calcul, le résultat du 1..

Partie II

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[1\,;8]$ par :

$F(x)=5-2x+4\ln(x)$.

1. Montrer que F a pour dérivée la fonction f de la partie **I**.
2. Etudier les variations de la fonction F sur l'intervalle $[1\,;8]$, puis dresser son tableau de variation.
3. $\mathscr{C}_F$ désigne la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthogonal d'unités graphiques : en abscisse 1 *cm*, en ordonnée 2 *cm*.
   a. Soit la droite Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}_F$ en son point d'abscisse 1. Montrer que le coefficient directeur de la droite Δ est égal à 2.
   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}_F$ et la droite Δ.

Formulaire :
La dérivée de la fonction ln sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est la fonction qui, à x, associe $\dfrac{1}{x}$.

Exercice réservé 81

Sur l'intervalle $I=[0{,}25\,;10]$, n considère la fonction f définie par : $f(x)=\ln x+\dfrac{2}{x}$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, l'unité de longueur étant 2 *cm*.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de cette fonction f et dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.
2. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$ et en déduire l'équation réduite de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 1.
3. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ ainsi que la tangente (T)
4. a. Développer : $(x-3)(x-6)$.
   b. Résoudre dans l'intervalle l'équation : $f'(x)=\dfrac{1}{9}$.
   c. Justifier alors que la courbe $(\mathscr{C})$ admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y=\dfrac{x}{9}$.

Dérivées de fonctions usuelles :

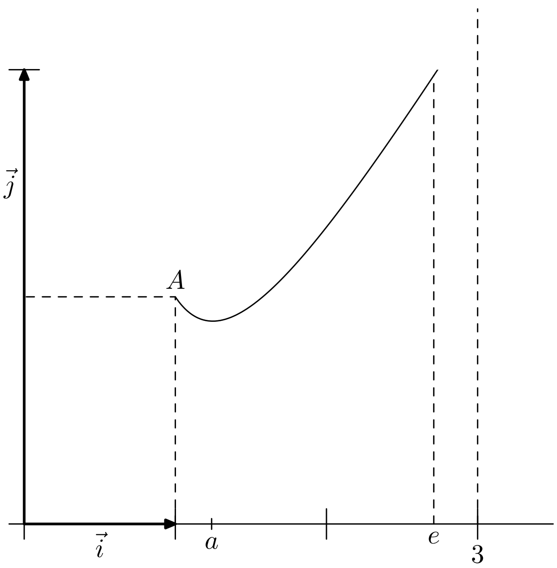
$F(x)$	x	x^2	x^3	$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	e^x
$F'(x)$	1	$2x$	$3x^2$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$	e^x
Conditions				$x \neq 0$	$x > 0$	

Exercice 92

Le but de l'exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[1;3]$ par : $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\ln x}{x}$.

On rappelle que e est le nombre tel que : $\ln e=1$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un prepère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
La courbe $(\mathscr{C})$ est donnée en annexe à rendre avec la copie.



Cette courbe permettra de contrôler l'exactitude de certains résultats, mais ne doit pas être utilisée pour justifier les réponses.

Partie I

On considère la fonction u définie sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ par :
$u(x) = x^2 - 2 + 2\cdot\ln x$

1. On note u' la dérivée de la fonction u. Calculer $u'(x)$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction u sur l'intervalle $[1;3]$.

3. On admet l'existence d'un nombre unique a, appartenant à l'intervalle $[1;3]$ tel que $u(a)=0$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant le signe de $u(x)$.

x	1	a	3
$u(x)$		0	

Partie II

1. a. On note f' la dérivée de la fonction f.
On admet que pour tout x de l'intervalle $[1;3]$:
$$f'(x) = \frac{u(x)}{2\cdot x^2}$$
où u est définie dans la **partie I**.
Déterminer selon les valeurs de x le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;3]$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f *(on ne calculera pas $f(a)$).*

2. On note A le point de coordonnées $\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
Montrer que la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse e est parallèle à la droite (OA).

3. Tracer la droite (OA) et la tangente (T) sur l'annexe à rendre avec la copie. Placer le point B coordonnées $(a\,;f(a))$ et la tangente à la courbe $(\mathscr{C}$ au point B.

Exercice 70

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[1\,;12]$ par :

$f(x) = x - 1 - 4\cdot\ln x$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique : $1\,cm$.

1. a. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;12]$, $f'(x)$ peut sécrire :
$$f'(x) = \frac{x-4}{x}$$

   b. Etudier le signe de f' sur l'intervalle $[1\,;12]$, et en déduire le tableau de variations de f.

   c. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe en son point d'abscisse 1.

2. a. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les valeurs arrondies à 0,1 près.

x	1	2	3	4	6	8	10	11	12
$f(x)$									

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite (Δ) dans le même repère sur la feuille papier millimétré fournie.

Formulaire : La dérivée de la fonction ln sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est la fonction qui, à x associe $\dfrac{1}{x}$.

Exercice 85

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=2\cdot x^2-3\cdot x+\dfrac{9}{2}$

   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x

   b. Donner les coordonnées exactes du point S sommet de la parabole

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = f(x) - \ln x = 2\cdot x^2 - 3\cdot x + \frac{9}{2} - \ln x$$
La fonction g est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$

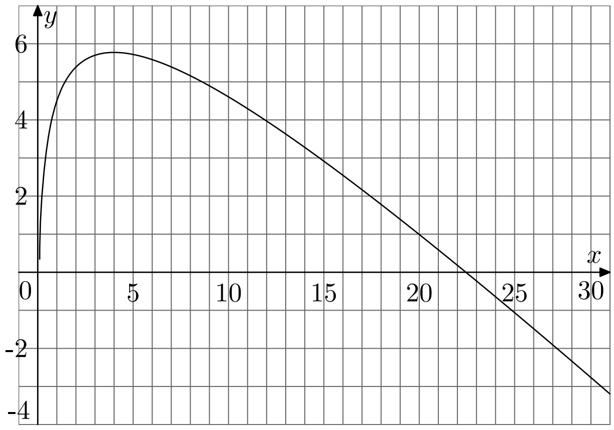
   a. Montrer que, pour tout réel strictement positif x :
$$g'(x) = \frac{(4\cdot x+1)(x-1)}{x}$$

   b. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Justifier que le minimum de g est égal à $\dfrac{7}{2}$

   c. En déduire que sur $\left]0\,;+\infty\right[$, on a : $f(x)-\ln x>0$.
Que pouvez-vous dire des courbes représentative de la fonction f et du logarithme népérien.

Exercice réservé 87

La courbe ($\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f. La droite (D) est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 4 et est parallèle à l'axe des abscisses. L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe.



Partie A : Lectures graphiques

1. a. Donner par lecture graphique, une valeur approchée à 0,5 près de $f(2)$ et $f(20)$.

   b. Donner la valeur exacte de $f'(4)$.

2. Donner par lecture graphique, le tableau de variations de la fonction f ainsi que le signe de la dérivée f'.

Partie B : Vérifications algébriques

On suppose que $f(x)$ est de la forme $a{\cdot}x{+}b{+}c{\cdot}\ln x$ où a, b et c sont trois réels et ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, c et x.

   b. Le maximum de f étant obtenu pour x égal à 4, en déduire une relation entre a et c.

2. a. Sachant que la courbe représentative de f passe par le point $A(1\,;4{,}5)$, donner une relation entre a et b.

   b. On sait que le point $B(e\,;7{-}0{,}5{\cdot}e)$ appartient à la courbe représentative de f. En déduire une relation entre a, b et c.

3. a. Déduire des questions précédentes que l'on a :
   $f(x) = -0{,}5{\cdot}x + 5 + 2{\cdot}\ln x$

   b. En déduire les valeurs exactes de $f(2)$ et $f(20)$ et du maximum de f.

   c. Déterminer la limite en 0 de f.

Exercice réservé 90

Rappels sur la fonction logarithme népérien, notée ln ; a et b étant des réels strictement positifs et n un entier naturel :

$$\ln\left(a{\cdot}b\right) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(a^n\right) = n\cdot\ln a$$

Partie A

Sur la feuille annexe à rendre avec la copie on a tracé dans une repère orthonormé la courbe (C) représentant la fonction logarithme népérien et la parabole (P) représentant la fonction logarithme népérien et la parabole (P) représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + \frac{9}{2}$$

La fonction f est dérivale sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. *(on ne demande pas les limites de f à l'infini.)*

   c. Quelles sont les coordonnées exactes du point S sommet de la parabole (P)?

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $\quad g(x){=}f(x){-}\ln x{=}2{\cdot}x^2{-}3{\cdot}x{+}\dfrac{9}{2}{-}\ln x$

   et on note g' sa fonction dérivée.

   a. Montrer que, pour tout réel strictement positif x :
   $$g'(x) = \frac{(4{\cdot}x+1)(x-1)}{x}$$

   b. Etudier la variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   Justifier que le minimum de g est égal à $\dfrac{7}{2}$.

   c. En déduire que pour tout réel strictement positif x :
   $f(x) - \ln x > 0$.
   Quelle propriété des courbes (P) et (C), visible graphiquement, le résultat ci-dessus permet-il de justifier

Partie B

Pour tout réel strictement positif x, on note M le point de la courbe (p) d'abscisse x et N le point de la courbe (C) de même abscisse x.
On a ainsi : $\quad MN{=}f(x){-}\ln x{=}g(x)$.
(la longueur MN est exprimée dans l'unité graphique du schéma de feuille annexe.)

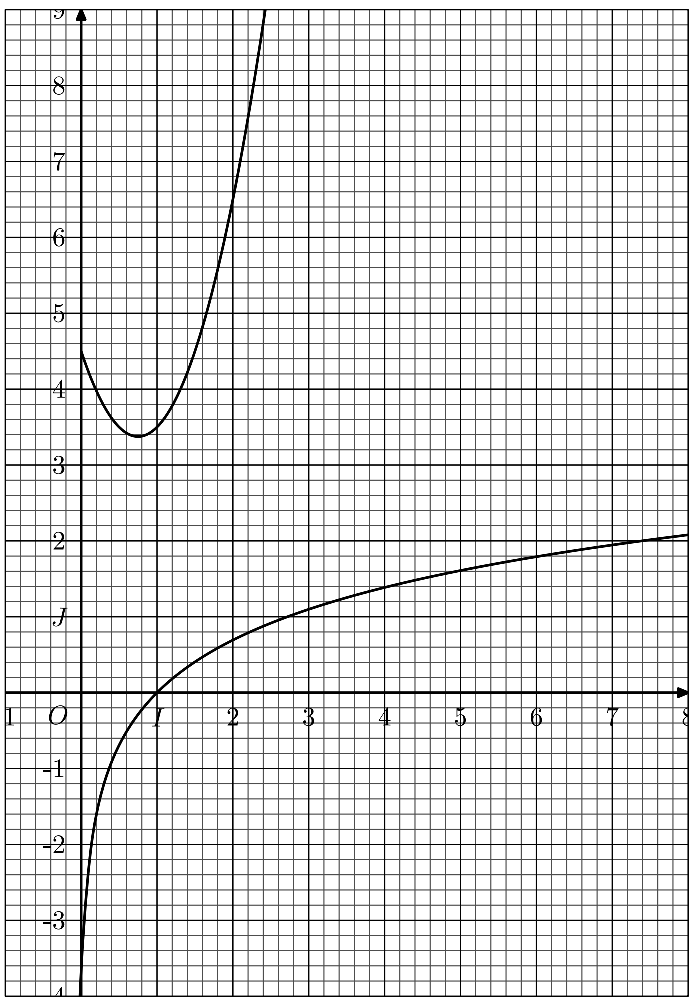
1. Placer les points M et N sur le schéma de la feuille annexe lorsque $x{=}2$.

2. Montrer que lorsque $x{=}\dfrac{3}{4}$, on a :
   $$MN = \frac{27}{8} + 2{\cdot}\ln 2 - \ln 3.$$
   Donner la valeur de MN arrondie au centième.

3. a. A l'aide de la partie A, déterminer pour quelle valeur de x, la longueur MN est minimale. Que vaut alors cette longueur?

   b. Tracer en rouge sur le schéma de la feuille annexe le segment $[MN]$ correspondant.

4. Quelle est la limite de la longueur MN quand x tend vers 0 *(avec $x{>}0$)*



Exercice 120

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \big(\ln x\big)^2 \cdot \big(3 - 2 \cdot \ln x\big)$$

1. Montrer que pour x appartenant à $\big]0\,;+\infty\big[$:

$$f'(x) = \frac{6 \cdot \ln x \cdot \big(1 - \ln x\big)}{x}$$

2. a. Résoudre les inéquations suivantes :
   - $\ln x \geqslant 0$
   - $1 - \ln x \geqslant 0$

   b. En déduire le signe de f' sur $]0\,;+\infty[$ ainsi que son tableau de variations de la fonction f.

3. Calculer les extrémums de la fonction f sur $[0{,}75\,;3]$.

4. Fonction exponentielle et logarithme :

Exercice 76

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^x - 2 \cdot x$.

1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la dérivée de g puis dresser le tableau de variations de g.
2. En déduire que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
   Pour la limite en $+\infty$ on pourra remarquer que pour x non nul $f(x)$ peut s'écrire :
   $$x^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 1\right)$$
2. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f, puis en utilisant la partie A construire le tableau de variations de f.
3. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$

   a. Calculer $f(-1)$ et $f(0)$.

   b. Montrer que la solution de l'équation $f(x) = 0$ est unique et qu'elle appartient à l'intervalle $\big[-1\,;0\big]$.

   c. En utilisant une calculatrice pour calculer $f(x)$ pour différents valeurs de x, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution.
   justifier la valeur retenue.

Exercice réservé 117

On note : $k = \dfrac{20}{\ln 10}$; $p_0 = 20 \times 10^{-6}$.

On considère la fonction f définie sur $[p_0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = k \cdot \ln\big(50\,000 \cdot x\big)$$

1. a. Pour tout x appartenant à l'ensemble de définition, calculer $f'(x)$.

   b. Donner le tableau de variations de la fonction f.

2. a. Montrer que : $f(10 \cdot x) = k \cdot \ln(10) + f(x)$

   b. Exprimer $f(100 \cdot x)$ en fonction de $f(x)$.

Exercice 75

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $\big[1\,;25\big]$ par :

$$f(x) = 5 \cdot x - 50 \quad ; \quad g(x) = \frac{\exp x}{100} - 100$$

1. a. Donner le sens de variation de la fonction f sur

l'intervalle $\left[1\,;25\right]$.

b. Répondre aux questions suivantes :

i. Déterminer la dérivée $g'(x)$.

ii. Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;25]$.

c. Tracer les courbes représentatives des fonction f et g dans un repère orthogonal.
on prendra pour unité graphique :

- $2\,cm$ pour 5 unités en abscisse.
- $1\,cm$ pour 20 unités en ordonnée.

Pour la courbe représentative de la fonction g, on se limitera à représenter les points dont l'abscisse est comprise entre 1 et 10.

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $\left[1\,;25\right]$ par $h(x)=30{\cdot}\ln x-2{\cdot}x+10$. On note h' la dérivée de h.

a. Montrer que : $h'(x)=\dfrac{30-2{\cdot}x}{x}$.

b. Etudier le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $\left[1\,;25\right]$.

c. Montrer que la fonction h passe par un maximum. On donnera la valeur par laquelle ce maximum est atteint et la valeur prise alors par la fonction.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction h dans le même repère qu'à la question 1..

Partie B

Les gains exprimés en milliers d'euros de trois chanteurs sont fonction du nombre x de semaines écoulées depuis la sortie simultatnée de leurs albums et sont données par $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

1. *Dans cette question, aucune justification n'est demandée. Il s'agit seulement d'interpréter les données.*

a. Quelle fonction correspond au gain du chanteur A sur lequel les producteurs ont investi près de 100 milliers d'euros et dont le succès est phénoménal après quelques semaines de promotion acharnée?

b. Quelle fonction correspond au gain du chanteur B, inconnu, qui obtient un succès très rapide malgré l'absence d'investissement promotionnel avant de s'essoufler au bout de quinze semaines?

c. En vous inspirant des questions du 1. et 2., décrire l'évolution du gain du chanteur C.

2. Par lecture graphique :

a. Déterminer le nombre de semaines qui s'écoule avant que le chanteur C gagne plus que le chanteur B.

b. Déterminer le nombre de semaines qui s'écoule avant que le chanteur A gagne plus que le chanteur B.

Exercice 100

Donner, dans chaque cas, l'ensemble de définition ainsi que la fonction dérivée de chaque fonction proposée :

1. $f(x)=2{\cdot}e^x+x^2$
2. $f(x)=\dfrac{1}{4}{\cdot}e^{3x+1}$
3. $f(x)=(2{\cdot}x-1){\cdot}e^x$
4. $f(x)=2{\cdot}\ln x+2{\cdot}x$
5. $f(x)=3{\cdot}\ln(5-3{\cdot}x)+2$
6. $f(x)=(x+1)\cdot\ln x$

Exercice réservé 103

A l'aide de la calculatrice déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{\ln x}{x}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{\ln x}{x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+}x^2-\ln x$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +-\infty}x^2-e^x$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty}x^2-e^x$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty}x^2{\cdot}e^x$

5. *Résolution d'équations :*

Exercice 69

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$. Penser à utiliser les différentes propriétés algébriques de ces fonctions :

a. $e^x+1\leqslant 1$

b. $e^{2\cdot x+1}>0{,}5$

c. $e^{2\cdot x}<2{\cdot}e^x$

d. $\ln(2{\cdot}x+1)>-0{,}5$

e. $\ln(x^2)<3$

f. $\ln(2{\cdot}x)>\ln x+1$

g. $2^x\geqslant 3$

Exercice réservé 113

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Pour effectuer un examen médical, on injecte par piqûre intramusculaire une dose de $3\,cm^3$ d'une substance médicamenteuse dans le sang d'un malade à l'instant $t=0$ *(t est exprimé en heures)*. Celle-ci passe alors progressivement dans le sang. La diffusion atteint son maximum au bout d'une heure.

La courbe de l'annexe représente la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t.

1. Construire sur la feuille annexe la tangente à la courbe au point d'abscisse 2, sachant que son coefficient directeur est égal à $(-0{,}9)$.

2. A partir du graphique commenter l'évolution de la quantité de substance médicamenteuse contenue dans le sang.

3. Pour pouvoir effectuer l'examen, il faut que la quantité de substance médicamenteuse présente dans le sang soit supérieure ou égale à $0{,}5\,cm^3$. Déterminer graphiquement de combien de temps on dispose pour faire cet examen.

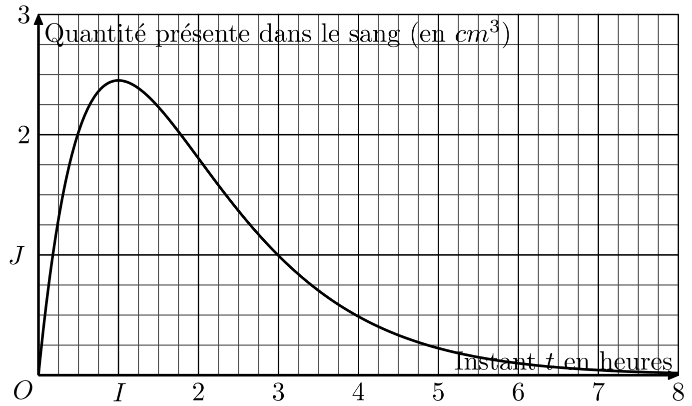
Partie B

On a injecté par piqûre intraveineuse $1\,cm^3$ de médicament à un malade à l'instant $t=0$. La substance se répartir immédiatement dans le sang et elle est ensuite progressivement éliminée. Expérimentalement, on montre que la quantité $q(t)$ de substance présente dans le sang à l'instant t est donnée par la relation $q(t)=e^{-0{,}15\cdot t}$ où t est exprimée en heures.

1. Quel volume de ce produit reste-t-il au bout de 90 minutes?

2. Quel volume de ce produit le malade a-t-il éliminé au bout d'une demi-heure? d'une heure?

3. On donne $q'(t) = -0{,}15 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}15 \cdot t}$ où q' désigne la fonction dérivée de la fonction q.
Etudier les variations de la fonction q sur l'intervalle $[0\,;9]$ puis tracer sa représentation graphique dans un repère orthogonal en prenant pour unités $2\,cm$ en abscisses et $10\,cm$ en ordonnées.

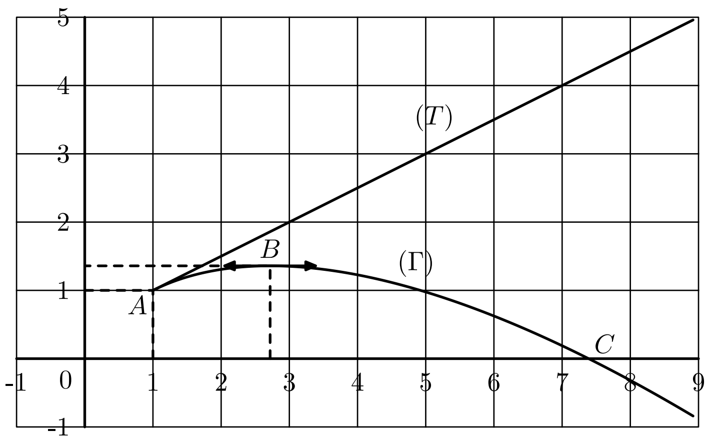


Exercice 82

La courbe (Γ) ci-dessous représente dans un repère orthonormé une fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$. On note f' la fonctiondérivée de f sur cet intervalle.

La droite (T) est tangente à la courbe (Γ) au point $A(1\,;1)$.

La tangente à la courbe (Γ) au point B d'abscisse e est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Par lecture graphique :

   a. Donner le coefficient directeur de la droite (T).

   b. Donner $f(1)$ et $f'(e)$.

   c. Déterminer les réels x de l'intervalle $[1\,;+\infty[$ qui vérifient $f'(x) \leqslant 0$

   d. En traçant le plus précisément possible la tangente à la courbe (Γ) au point C, lire le coefficient directeur de cette tangente.

2. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{2} \cdot (2 - \ln x)$.

   a. Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse e.

   b. Déterminer l'abscisse du point C, intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses.

3. La dérivée f' de la fonction f est définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par : $f'(x) = k \cdot \ln \dfrac{e}{x}$
où k est un nombre réel donné.

   a. Vérifier le résultat donné pour $f'(e)$ à la question 1.

   b. Déterminer le réel k sachant que : $f'(\mathrm{e}^2) = -\dfrac{1}{2}$.

   c. Donner l'équation de la tangente à la courbe (Γ) au point C.

   d. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (T) et de la tangente à la courbe (Γ) au point C.

Exercice 99

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 \cdot (3 - 2 \cdot \ln x)$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentée dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ *(unité graphique 2 cm)*

1. a. Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

   b. Calculer la limite de f en $+\infty$

2. f' désignant la dérivée de f sur $]0\,;+\infty[$, on admet que :

$$f'(x) = \frac{6 \cdot \ln x \cdot (1 - \ln x)}{x} :$$

   a. Résoudre les inéquations :
   - $\ln x \geqslant 0$
   - $1 - \ln x \geqslant 0$

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

   c. Calculer les extrémums de f sur l'intervalle $[0{,}75\,;3]$.

3. Dresser le tableau de variations de f.

4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 83

Rappels :

- a étant une constante réelle, la fonction $x \longmapsto \ln(a \cdot x)$ a pour fonction dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
- x et y étant deux réels strictement positif :
$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$
- x étant un réel strictement positif : $\exp(\ln x) = x$

Le son se manigeste par des variations de pression de l'air.
L'unité de mesure de la pression de l'air est le Pascal.
La pression de l'air s'exercce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à 20×10^{-6} Pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont le nieau se mesure en décibels.
On note : $p_0 = 20 \times 10^{-6}$.
Pour une pression de p Pascals s'exerçant sur le tympan, avec $p \geqslant p_0$, le niveau sonore perçu est de $f(p)$ décibels où :

$$f(p) = \frac{20}{\ln(20)} \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

C'est à dire : $f(p) = \dfrac{20}{\ln(10)} \cdot \ln(50000 \cdot p)$

1. Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2

Pascals? de 0,2 Pascals? de 0,002 Pascals?

2. On note $k = \dfrac{20}{\ln 20}$ et $I = [p_0\,;+\infty[$.

Donc, f est la fonction définie sur l'intervalle I par:
$f(x) = k\cdot \ln(50\,000\cdot x)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

a. Préciser la valeur de $f(p_0)$

b. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle I.

c. Interpréter les résultats du a. et du b. en termes de pression s'exerçant sur ltympan et de niveau sonore perçu.

3. A partir d'un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur.
Déterminer la pression p correspondant à ce niveau sonore.

4. a. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle I:
$f(10\cdot x) = k\cdot \ln(10) + f(x)$.
On en déduit que: $f(10\cdot x) = 20 + f(x)$ et on dit que: "le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10."

b. Exprimer, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, $f(100\cdot x)$ en fonction de $f(x)$ et énoncer la propriété du niveau sonore correspondante.

Exercice réservé 72

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = 2\cdot x + 5 - e^x$

1. a. Résoudre l'inéquation $2 - e^x > 0$ dans $\mathbb{R}$.

b. Calculer $f(\ln 2)$.

2. a. Pour tout nombre x appartenant à $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 88

On considère la fonction d définie sur $[0\,;+\infty[$ par:

$f(x) = 1000 \cdot e^{x\cdot \ln(0{,}94)}$

1. Montrer que pour tout entier n: $(0{,}94)^n = e^{n\cdot \ln(0{,}94)}$

2. Donner une valeur arrondie à l'entier le plus proche de: $f\left(\dfrac{1}{7}\right)$ et $f\left(\dfrac{365}{7}\right)$.

3. a. Pour tout nombre $x \in [0\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$.

b. Donner une valeur de $\ln(0{,}94)$ arrondie au dixième et en déduire le sens de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 500$, vérifie $x = \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}94)}$

Exercice réservé 97

1. Soit f une fonction définie sur $I = [20\,;150]$ par:

$f(x) = 2\cdot x + \dfrac{13122}{x}$

a. Montrer que sur l'intervalle I:
$f'(x) = \dfrac{2}{x^2}\cdot(x-81)(x+81)$
En déduire que sur l'intervalle I, $f'(x)$ est du signe de $(x-81)$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I.

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par:

$g(x) = 2\cdot x^2 - 3\cdot x + \dfrac{9}{2} - \ln x$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée:

a. Montrer que, pour tout téel strictement positif x:
$g'(x) = \dfrac{(4\cdot x+1)(x-1)}{x}$.

b. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$

3. Soit f la fonctino numérique définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par:

$f(x) = (\ln x)^2\cdot(3 - 2\ln x)$

a. f' désignant la dérivée de f sur $]0\,;+\infty[$, on admet que
- $f'(x) = \dfrac{6\cdot \ln x\cdot(1-\ln x)}{x}$.
- $\ln x \geqslant 0$
- $1 - \ln x \geqslant 0$

b. En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

c. Calculer les extremums de f sur l'intervalle $[0{,}75\,;3]$

4. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = 2\cdot x + 5 - e^x$

On note f' la fonction dérivée de f.
On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x:
$2 - e^x > 0$

b. Calculer la valeur exacte de $f(\ln 2)$.

c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

d. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = x + \dfrac{3}{e^x} - \dfrac{1}{e^{2x}} = x + 3\cdot e^{-x} - e^{-2x}$

Et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par:

$g(x) = 1 - 3\cdot e^{-x} + 2\cdot e^{-2x}$

a. Montrer que pour tout réel x: $g(x) = \dfrac{(e^x-1)(e^x-2)}{e^{2x}}$

b. Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

c. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2011

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$f(x) = 55{\cdot}\mathrm{e}^{0,5x}$

1. Donner les valeurs approchées arrondies à l'unité des nombres $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.
2. a. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;10]$, l'équation : $f(x) = 3\,000$

   On donnera les arrondis à l'unité des solutions éventuelle.

Partie B

Une étude statistique permet de considérer la fonction f de la partie A comme un modèle satisfaisant pour décrire l'évolution, de 2000 à 2010, de la puissance totale des éoliennes installés en France. Plus précisément, on suppose que pour l'année $(2000{+}x)$ où x est un entier naturel, la puissance totale des éoliennes installées en France, exprimée en mégawatts, est donnée par $f(x)$.
En utilisant ce modèle et en exploitant les résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes en donnant les justifications nécessaires.

1. Quelle était la puissance totale des éoliennes en 2001?
2. En quelle année la puissance totale des éoliennes devrait-elle dépasser 3000 mégawatts?
3. Pourra-t-on atteindre une puissance totale de 10 000 mégawatts en 2010?
4. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = 55{\cdot}\mathrm{e}^{0,5n}$
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{0,5}$
   b. Dans le modèle étudié la puissance totale des éoliennes augmente donc chaque année d'un même pourcentage. Donner ce pourcentage en arrondissant le taux au dixième.

Exercice 2013

Des pucerons envahissent une roseraie. Des coccinelles, prédateurs des pucerons, sont introduites dans cette roseraie. Au bout de vingt jours, on constate que le nombre des pucerons peut être estimé à 770, soit 0,77 milliers.
On s'intéresse à l'évolution du nombre des pucerons *(exprimé en milliers)* présents dans la roseraie en fonction de la durée écoulée depuis l'introduction des coccinelles. On note f cette fonction et t cette durée. L'unité de durée est un jour. Lorsque l'on introduit les coccinelles, on a donc $t{=}0$.

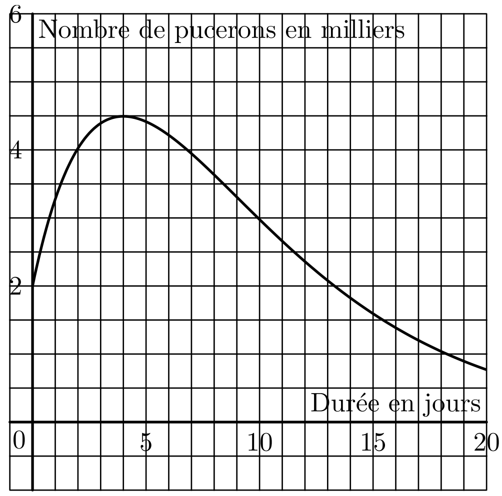
1. Des études ont montré que le nombre de pucerons *(exprimé en milliers)* en fonction de la durée t écoulée depuis l'introduction des coccinelles, était modélisé par la fonction f définie, pour tout nombre réel t élément de $[0\,;20]$ par :

   $f(t) = (2{\cdot}t + 2){\cdot}\mathrm{e}^{-kt}$

   où k est un nombre réel positif constant.
   a. Quel est le nombre de pucerons au moment où les coccinelles sont introduites dans cette roseraie?
   b. Déterminer la valeur exacte de k puis l'une de ses valeurs approchées au millième près.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que la fonction f définie pour tout nombre réel t élément de $[0\,;20]$ par $f(t){=}(2{\cdot}t{+}2)\mathrm{e}^{-0,2t}$, représente correctement l'évolution du nombre des pucerons en fonction de la durée t. On note f' la fonction dérivée de f et $(\mathscr{C})_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

2. a. Démontrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;20]$:
   $f'(t) = (-0{,}4{\cdot}t + 1{,}6)\mathrm{e}^{-0,2{\cdot}t}$
   b. Combien de jours après, l'introduction des prédateurs le nombre de pucerons va-t-il commencer à diminuer?
   c. Calculer $f'(0)$. Utiliser ce nombre dérivé pour calculer, sans utiliser de calculatrice, une approximation du nombre des pucerons présents dans la roseraie au bout d'un jour.
3. Le graphique donné en annexe 2 est un dessin de $(\mathscr{C}_f)$. Ce graphique est à compléter et à rendre avec la copie.
   a. A l'aide des informations données ou obtenues précédemment, placer les unités du repère.
   b. On estime que les pucerons ne posent plus de problème dès que leur nombre est devenu inférieur à 1 000. Lire graphiquement au bout de combien de jours ce seuil sera atteint.
   laisser apparents les traits de construction utilisés pour cette lecture.



Exercice réservé 2014

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;3]$ par :

$f(x) = 2{\cdot}\ln x - x^2 + 2$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer : $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)$.
2. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;3]$:

   $$f'(x) = \frac{2{\cdot}(1-x)(1+x)}{x}$$

Dresser le tableau de variations de f.

3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal *(unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées)*.
   a. Préciser le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite T sur feuille de papier milllimétré.
   c. A l'aide du graphique, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle $]0\,;3]$.
   d. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au dixième de chacune de ces solutions.

Exercice 2015

Pour chacune des quatre affirmations, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant le choix effectué.
Chaque question est notée sur un point, avec la règle suivante :

- Une résponse non justifiée ne rapporte aucun point.
- Une mauvaise réponse n'enlève pas de point.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-2\cdot x+1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. L'équation $\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{4}{3}$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.
3. La suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par :
$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$
tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.
4. Pour tout nombre réel x, on a : $1{,}01^x < 1\,000\,000$.

Exercice 2037

Donner les résultats des calculs suivants :

a. $e^{\ln 5}$
b. $e^{2\cdot\ln 2}$
c. $e^{\ln 2+\ln 2}$
d. $\dfrac{e^{\ln 9}}{e^{\ln 2}}$
e. $\ln(e^2\cdot e^5)$
f. $\ln 5^2 - \ln\dfrac{1}{5^2}$
g. $\ln 10^{-5}+\ln 10^8$
h. $\dfrac{\ln 1\,000\,000}{\ln 1\,000}$

Exercice réservé 2038

Simplifier les expressions suivantes :

a. $e^{2\cdot x-1}\cdot e^{3-x}$
b. $\dfrac{\left(e^{2\cdot x-1}\right)^2}{e^{7\cdot x-2}}$
c. $3\cdot e^{-2\cdot x}+\dfrac{e^x+1}{e^{2\cdot x}}$
d. $\ln(2\cdot x^2+x)+\ln\dfrac{1}{x}$
e. $\ln x^7-\ln x^2$
f. $4\cdot\ln x - 2\cdot\ln x$

Exercice 2039

Résoudre les équations suivantes :

a. $e^x = 2$
b. $e^x = -1$
c. $\ln x = 5$
d. $\ln x = -2$
e. $\ln(2\cdot x+1) = 5$
f. $e^{3-2x} = 2$
g. $3^x = 2$
h. $\dfrac{x}{2}\cdot\big(2-\ln x\big) = 0$

