Terminale ES/Suites arithmético-géométrique

1. Rappels :

Exercice 7544

1. Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin.
Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de $160\,mg\cdot\ell^{-1}$.
On estime que la concentration du produit baisse d'environ $10\,\%$ par semaine.

   Donner la concentration de ce produit au bout de 8 semaines.

2. Les techniciens mettent en place un distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une certaine quantité de produit. Après étude, il observe qu'avec l'utilisation de cette machine, la concentration de ce produit augmente de $5\,\%$ par semaine.

   En commençant les mesures avec une concentration de $120\,mg\cdot\ell^{-1}$, quelle sera le mesure de la concentration de ce produit au bout de 8 semaines?

Les concentrations obtenues seront arrondies au dixième près.

Exercice 7543

1. On considère la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, géométrique de premier terme 3 et de raison 2,5.
   a. Déterminer, arrondis au millième près, la valeur des termes u_5 et u_7
   b. Donner la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On considère la suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$, géométrique de premier terme 7 et de raison 0,5.
   a. Déterminer, arrondis à 10^{-5} près, la valeur des termes v_5 et v_7
   b. Donner la limite des termes de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice réservé 7542

Chacune des expressions ci-dessous permet de définir les termes d'une suite (u_n) géométrique, définie sur $\mathbb{N}$:

a. $u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = 2\cdot u_n$ b. $u_n = 2^n$

c. $u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$ d. $u_n = 3\times 0{,}2^n$

Dans chaque question, donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n).

Exercice réservé 7541

Parmi les quatre propositions faites ci-dessous, une seule est correcte. Laquelle? Justifier.

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n, géométrique de premier terme 4 et de raison 3 :

La somme S des 10 premiers termes de la suite définie par :
$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$
a pour valeur :

a. $S = 2\cdot(3^9 - 1)$ b. $S = 2\cdot(3^{10} - 1)$

c. $S = 4\cdot(3^9 - 1)$ d. $S = 4\cdot(3^{10} - 1)$

2. Modéliser un problème :

Exercice 7040

Le 1er septembre 2015, un ensemble scolaire compte 3 000 élèves.
Une étude statistique interne a montré que chaque 1er septembre :

- $10\,\%$ de l'effectif quitte l'établissement ;
- 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année $2015+n$.

Justifier qu'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que $u_0 = 3\,000$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 0{,}9\cdot u_n + 250$

Exercice réservé 7028

Une entreprise s'intéresse au nombre d'écrans $3D$ qu'elle a vendus depuis 2010 :

Année	2010	2011	2012
Nombre d'écrans $3D$ vendus	0	5 000	11 000

Le nombre d'écrans $3D$ vendus par l'entreprise l'année $(2010+n)$ est modélisé par une suite (u_n), arithmético-géométrique, de premier terme $u_0 = 0$.

On rappelle qu'une suite arithmético-géométrique vérifie, pour tout entier naturel n, une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a\times u_n + b$ où a et b sont deux réels.

1. a. En supposant que $u_1 = 5\,000$, déterminer la valeur

de b.

b. En supposant de plus que $u_2 = 11\,000$, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} = 1{,}2 \times u_n + 5\,000$

2. a. Calculer u_3 et u_4.

b. En 2013 et 2014, l'entreprise a vendu respectivement 18 000 et 27 000 écrans $3D$.
La modélisation semble-t-elle pertinente?

Exercice 7012

L'entreprise *PiscinePlus*, implanté dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir.

En 2015, l'entreprise *PiscinePlus* dénombrait 75 contrats souscrits.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise *PiscinePlus* l'année $2015+n$. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} = 1{,}12 \cdot u_n - 6$

3. Formule explicite :

Exercice 7527

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 150$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 0{,}8 \cdot u_n + 45$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
$v_n = u_n - 225$

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

2. En déduire que pour tout entier naturel n :
$u_n = 225 - 75 \times 0{,}8^n$

Exercice 7529

On considère la suite (u_n) définie pour $u_0 = 27\,500$ et pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} = 1{,}04 \cdot u_n - 156$

On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n. Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par :
$v_n = u_n - 3\,900$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n :
$u_n = 23\,600 \times 1{,}04^n + 3\,900$

Exercice réservé 7530

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre *(GES)* a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installés sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO_2.
En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005+n$.

1. Déterminer u_0 et u_1.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} = 0{,}98 \times u_n + 0{,}2$

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 10$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,98. Préciser son premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n :
$u_n = 31 \times (0{,}98)^n + 10$

4. Limite :

Exercice 7033

Un loueur de voitures dispose au 1er mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.
Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1^{er} mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3 000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année $2015+n$.
On a donc : $u_0 = 10\,000$

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 0{,}75 \cdot u_n + 3000$

2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par :
$v_n = u_n - 12\,000$

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser son premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n.
Déterminer la limite de la suite (v_n).

c. Justifier que, pour tout entier naturel n :
$u_n = 12\,000 - 2\,000 \times 0{,}75^n$

d. En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années?

Exercice 7025

Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger.

En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante :
chaque mois, 10 % des clients se désabonnent et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés.
On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0 = 15\,000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :
$v_{n+1} = 0{,}9 \times v_n + 2\,500$

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :
$w_n = v_n - 25\,000$

a. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,9 et préciser son premier terme.

b. En déduire que, pour tout entier n :
$v_n = 25\,000 - 10\,000 \times 0{,}9^n$

c. Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme? Justifier la réponse.

Exercice 7604

En 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectares sur terre. On estime que, chaque année, cette surface diminue de 0,4 %. Cette perte est en partie compensée par le reboisement, naturel ou volontaire, qui est estimé à 7,2 millions d'hectares par an.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4\,000$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 0{,}996 \times u_n + 7{,}2$

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, u_n permet d'obtenir une estimation de la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année $2015+n$.

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution, la variable N ait pour valeur la première année pour laquelle la surface totale de forêt couvre moins de 3 500 millions d'hectares sur terre.

```
N ← 2015
U ← 4 000
...
...
...
```

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
$v_n = u_n - 1\,800$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique puis préciser son premier terme et sa raison.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = 2200 \times 0{,}996^n + 1800$

c. Selon ce modèle et si le phénomène perdure, la surface des forêts sur terre va-t-elle finir par disparaître? Justifier la réponse.

5. Etude d'un seuil :

Exercice réservé 7211

Une association confectionne et porte, chaque jour, à domicile des repas à des personnes dépendantes.
En 2015, 600 personnes étaient abonnées à ce service.
Pour étudier son développement, cette association a fait une enquête selon laquelle l'évaluation peut être modélisée de la façon suivante :

- Chaque année, 5 % des abonnements ne sont pas renouvelés.
- Chaque année, on compte 80 nouveaux abonnements à ce service.

Cette évolution peut s'étudier à l'aide d'une suite (u_n) où u_n est le nombre d'abonnés pendant l'année $2015+n$.
On a ainsi, $u_0 = 600$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 0{,}95 \cdot u_n + 80$

On admet que les termes de la suite (u_n) admettent en fonction du rang n l'expression :
$u_n = 1\,600 - 1\,000 \times 0{,}95^n$

La taille des locaux ne permet pas de servir plus de 1 000 repas.

Si cette évolution se poursuit au même rythme, l'association devra-t-elle envisager un jour des travaux d'agrandissement?

Exercice 7526

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 150$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 0{,}8 \cdot u_n + 45$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Voici deux propositions d'algorithmes :

```
U ← 150
N ← 0
Tant que U⩾220
    U ← 0,8×U+45
    N ← N+1
Fin Tant que
```
Algorithme 1

```
U ← 150
N ← 0
Tant que U<220
    U ← 0,8×U+45
    N ← N+1
Fin Tant que
```
Algorithme 2

On s'intéresse, à la fin de son exécution, à la valeur de la variable N de l'algorithme.

a. Un seul de ces algorithmes permet d'affecter à la variable N, en fin d'exécution, le plus petit entier naturel

n tel que $u_n \geqslant 220$.
Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

b. Quelle est la valeur de la variable `N` à la fin de l'exécution de cet l'algorithme?

Exercice réservé 7528

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016.
Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.
Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire *(entre le 1er septembre et le 30 juin)* ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre 2016+n, on a donc $u_0 = 27\,500$.

1. a. Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.

b. Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} = 1{,}04 \cdot u_n - 156$

3. Recopier et compléter les lignes 3, 4, 5 et 7 de l'algorithme suivant afin qu'à la fin de son exécution, la variable `n` ait pour valeur l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

```
ℓ.1   n ← 0
ℓ.2   U ← 27 500
ℓ.3   Tant que U⩽...
ℓ.4       n ← ...
ℓ.5       U ← ...
ℓ.6   Fin Tant que
ℓ.7   U ← U+...
```

4. a. On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
Recopier le tableau suivant et le compéter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Etape 1	...
Valeur de n	0	...	...
Valeur de U	27 500	...	...

b. Donner la valeur de la variable `n` à la fin de l'exécution de cet algorithme.

6. Résolution d'inéquations (logarithme) :

Exercice 7013

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 75 \quad ; \quad u_{n+1} = 1{,}12 \cdot u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$

On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = 25 \times 1{,}12^n + 50$
3. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :
$u_n > 100$.

Exercice réservé 7016

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = 0{,}92 \cdot u_n + 8 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$

Pour tout entier naturel, on pose : $v_n = u_n - 100$

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,92 et calculer son premier terme v_0.
2. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = 100 - 96 \times 0{,}92^n$.
4. Résoudre l'inéquation : $u_n \geqslant 70$

