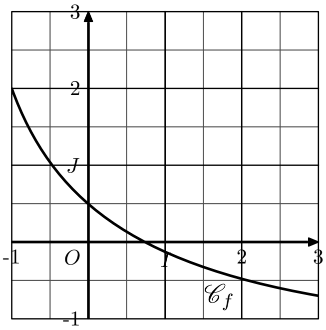
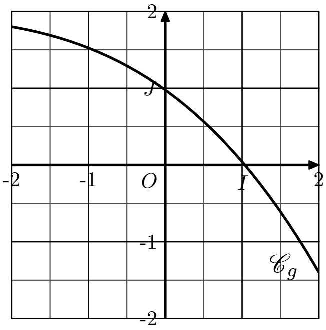
Terminale ES/Convexité

1. Introduction :

Exercice 7788

On considère les deux fonctions f et g décroissantes représentées ci-dessous :





Laquelle de ces deux courbes décroit "*de moins en moins*"?

Exercice 7795

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :

$f(x) = 4{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{0,5\cdot x+1}$

Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f.

Exercice 7797

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2-3}$

Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f.

Exercice réservé 7796

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

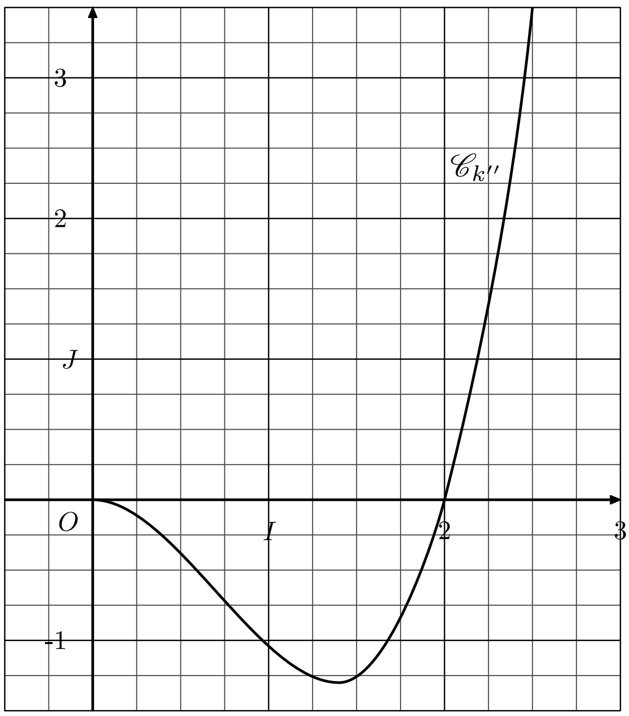
$f(x) = \big(6-3{\cdot}x\big){\cdot}\mathrm{e}^{2\cdot x+1}$

Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f.

2. Convexité : graphiquement :

Exercice 7011

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $\big[0\,;+\infty\big[$.



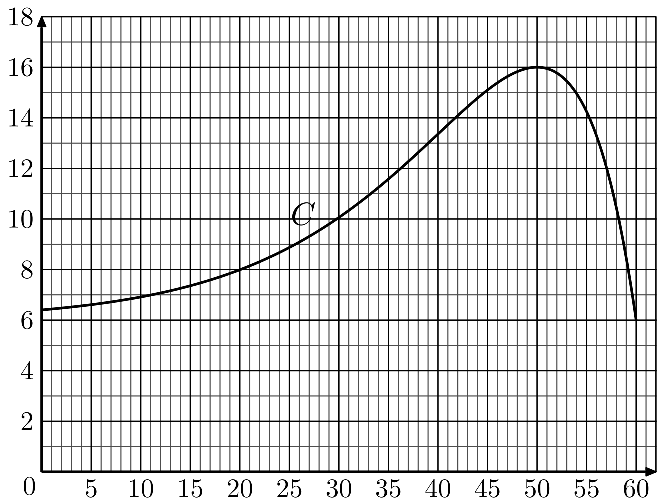
Parmi les réponses proposées, laquelle est correcte?

1. k est concave sur l'intervalle $\big[1\,;2\big]$.
2. k est convexe sur l'intervalle $\big[0\,,2\big]$.
3. k est convexe sur $\big[0\,;+\infty\big[$.
4. k est concave sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

Exercice réservé 7059

On considère une fonction P définie et dérivable sur l'intervalle $\big[0\,;60\big]$.

On donne, ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction P.



A partir d'une lecture graphique répondre aux questions qui suivent :

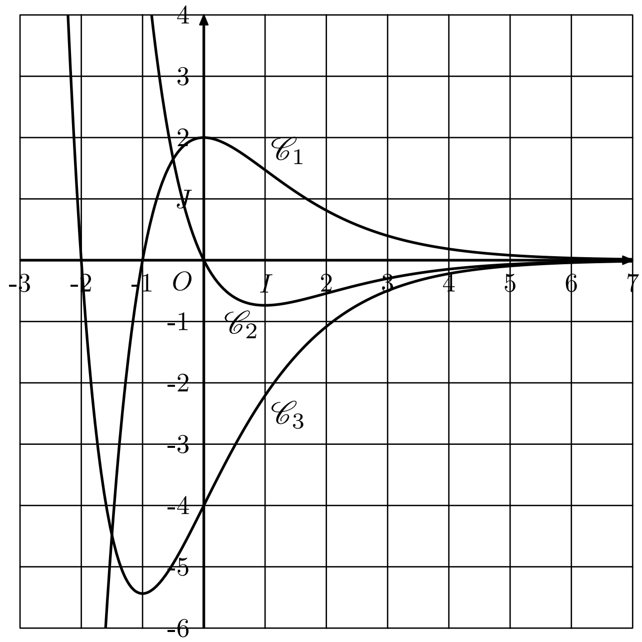
1. En argumentant la réponse, donner le signe de $P'(54)$, où P' est la fonction dérivée de la fonction P.
2. Donner un intervalle sur lequel la fonction P est convexe.
3. Donner, à l'unité près, les solutions de l'équation :
   $P(x)\!=\!10$.

Exercice 7054

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ définies sur $\left[-3\,;7\right]$ ont été représentées.
L'une de ces fonctions représente une fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



3. Convexité : étude de fonctions :

Exercice 7730

Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-9\cdot x$ est convexe sur l'intervalle :

a. $\left]-\infty\,;+\infty\right[$ b. $\left[0\,;+\infty\right[$

c. $\left]-\infty\,;0\right]$ d. $\left[-3\,;3\right]$

Exercice réservé 7702

Pour la question posée, une seule des quatre réponses est exacte.
Aucune justification n'est demandée.

La fonction f est définie pour tout nombre réel x appartenant à $\left]0\,;+\infty\right[$ par : $f(x)=\mathrm{e}^{2\cdot x+\ln(x)}$

1. la fonction f est concave.
2. la fonction f possède une fonction dérivée seconde qui s'annule.
3. la fonction f possède une fonction dérivée seconde strictement positive.
4. la fonction f possède une fonction dérivée qui s'annule.

Exercice réservé 7043

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\cdot\mathrm{e}^{x^2-1}$

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

1. a. Montrer que pour tout réel x :
   $f'(x)=\left(2\cdot x^2+1\right)\cdot\mathrm{e}^{x^2-1}$

   b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que pour tout réel x :
   $f''(x)=2x\cdot\left(2\cdot x^2+3\right)\cdot\mathrm{e}^{x^2-1}$

   Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Exercice 7793

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $\left[-2\,;4\right]$ par : $f(x)=\left(x+2\right)\cdot\mathrm{e}^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\left[-2\,;4\right]$, on a :
   $f'(x)=-\left(x+1\right)\cdot\mathrm{e}^{-x+1}$

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser$\left(\text{dériver}\left[-(x+1)*\exp(-x+1)\right]\right)$ $x*\exp\left(-x+1\right)$
2	intégrer$\left[(x+2)*\exp(-x+1)\right]$ $-(x+3)*\exp\left(-x+1\right)$

   En utilisant ces résultats, répondre à la question suivante :

   Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. Justifier.

Exercice 7026

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,8\right]$ par :
$f(x)=\dfrac{0{,}4}{20\cdot\mathrm{e}^{-x}+1}+0{,}4$

1. Montrer que $f'(x)=\dfrac{8\cdot\mathrm{e}^{-x}}{\left(20\cdot\mathrm{e}^{-x}+1\right)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	`f'(x):=8*e^(-x)/(20*e^(-x)+1)^2` $f'(x) := \dfrac{8\cdot e^{-x}}{400\left(e^{-x}\right)^2 + 40\cdot e^{-x} + 1}$
2	`g(x):=Dérivée[f'(x)]` $g(x) := \dfrac{160\cdot\left(e^{-x}\right)^2 - 8\cdot e^{-x}}{8000\cdot\left(e^{-x}\right)^3 + 1200\cdot\left(e^{-x}\right)^2 + 60\cdot e^{-x} + 1}$
3	`Factoriser[g(x)]` $8\cdot e^{-x}\cdot\dfrac{20\cdot e^{-x} - 1}{\left(20\cdot e^{-x} + 1\right)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

4. Convexité et positions des tangentes :

Exercice 7794

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :
$f(x) = -x\cdot\ln(x) + 2\cdot x + 1$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

Exercice réservé 7695

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = 3\cdot x - 3\cdot x\cdot\ln(x)$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

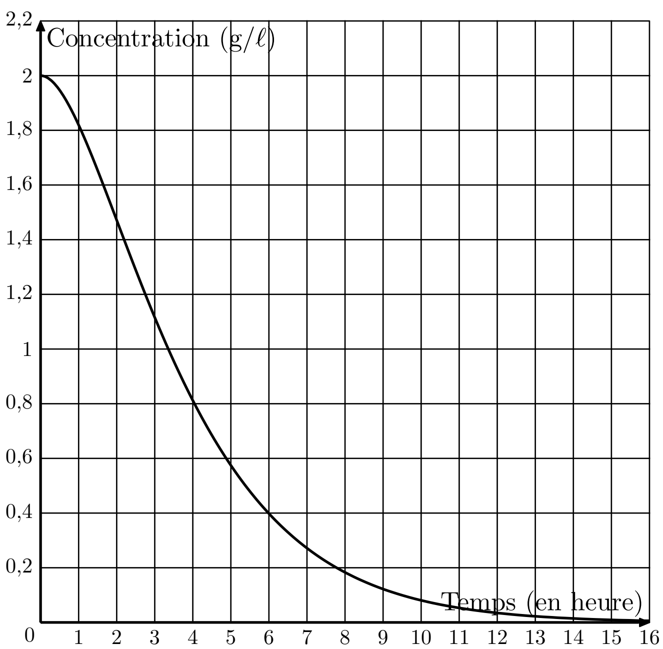
Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T?

5. Point d'inflexion : graphiquement :

Exercice 7050

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes en litres, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie ci-dessous :

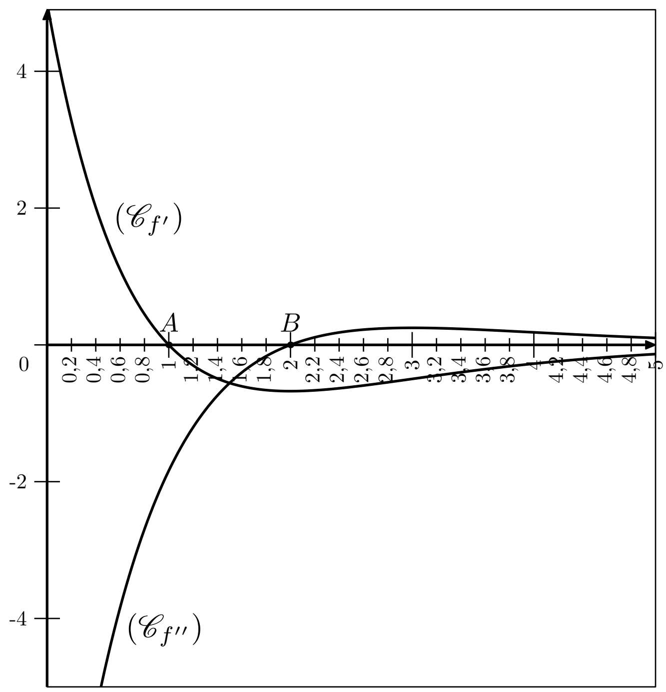


En vous aidant d'une lecture graphique et sans justifier, au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle?

Exercice réservé 7061

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$.

On a représenté ci-dessous la courbe $\left(\mathscr{C}_{f'}\right)$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $\left(\mathscr{C}_{f''}\right)$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0\,;5]$.



Le point A de coordonnées $(1\,;0)$ appartient à $\left(\mathscr{C}_{f'}\right)$ et le point B de coordonnées $(2\,;0)$ appartient à la courbe $\left(\mathscr{C}_{f''}\right)$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f. Justifier.

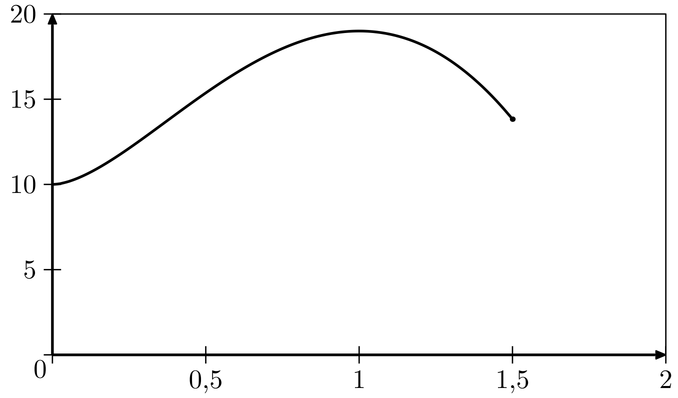
2. Déterminer sur quel*(s)* intervalle*(s)*, la fonction f est convexe. Justifier.

3. La courbe de f admet-elle des points d'inflexion? Justifier. Si oui, préciser leur*(s)* abscisse*(s)*.

6. *Point d'inflexion: étude de fonctions :*

Exercice 7020

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0\,;15\right]$ par :
$f(x)=9\cdot x^2\cdot\left(1-2\cdot\ln x\right)+10$.
La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



On admet que $f''(x)=-36\cdot\ln x-36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $\left]0\,;1{,}5\right]$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}.

Exercice réservé 7052

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $\left[0\,;10\right]$ par :

$$C(x)=-\frac{1}{48}\cdot x^4+\frac{5}{16}\cdot x^3+5\cdot x+10$$

Lorsque x est exprimé en centaines de papiers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $\left[0\,;10\right]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m=C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1. Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.

2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a :

$$C''(x)=-\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{15}{8}\cdot x$$

a. Déterminer le plus grand intervalle de la forme $\left[0\,;a\right]$ inclus dans $\left[0\,;10\right]$ sur lequel la fonction C est convexe.

b. Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C?
Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

Exercice 7791

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-20\,;20\right]$ par :
$f(x)=\left(-2\cdot x+30\right)\cdot\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$

1. a. Montrer que $f'(x)=\left(-0{,}4\cdot x+4\right)\cdot\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $\left[-20\,;20\right]$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-20\,;20\right]$.
On précisera la valeur exacte du maximum de f.

2. a. Montrer que, sur l'intervalle $\left[-20\,;20\right]$, l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α.

b. Donner une encadrement de α d'amplitude 0,2.

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $\left(-10\cdot x+200\right)\cdot\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x+3}$ $\left(-2\cdot x+30\right)\cdot\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$
2	Dériver $\left(2\cdot x+30\right)\cdot\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$ $\left(-0{,}4\cdot x+4\right)\cdot\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$
3	Dériver $\left(-0{,}4\cdot x+4\right)\cdot\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$ $\left(-0{,}08\cdot x+0{,}4\right)\cdot\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$

Répondre à la question suivante en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

Exercice réservé 7729

On admet que la fonction f est définie par :
$f(x)=\left(x^2-2\cdot x+1\right)\cdot\mathrm{e}^{-2x+6}$

A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	`f(x):=(x^2-2x+1)*e^(-2x+6)` $\rightarrow f(x)=\left(x^2-2\cdot x+1\right)\cdot\mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	`f'(x):=Dérivée[f(x)]` $\rightarrow f'(x)=\left(-2\cdot x^2+6\cdot x-4\right)\cdot\mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	`g(x):=Dérivée[f'(x)]` $\rightarrow g(x)=-16\cdot x\cdot\mathrm{e}^{-2x+6}+4\cdot x^2\cdot\mathrm{e}^{-2x+6}+14\cdot\mathrm{e}^{-2x+6}$
L4	`Factoriser[g(x)]` $\rightarrow 2\cdot\mathrm{e}^{-2x+6}\cdot\left(2\cdot x^2-8\cdot x+7\right)$
L5	`Résoudre[g(x)=0]` $\rightarrow\left\{x=\dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\,;\,x=\dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L6	`F(x):=Primitive[f(x)]` $\rightarrow F(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\left(-2\cdot x^2+2\cdot x-1\right)\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$

1. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.

2. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion?
Si oui, en donner l'abscisse.

Exercice 7790

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{0{,}5+100\cdot\mathrm{e}^{-x}}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;10]$.

1. Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0\,;10]$, on a :

$$f'(x)=\frac{100\cdot\mathrm{e}^{-x}}{\left(0{,}5+100\cdot\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$$

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0\,;10]$.
Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{100\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(100\cdot\mathrm{e}^{-x}-0{,}5\right)}{\left(0{,}5+100\cdot\mathrm{e}^{-x}\right)^3}$$

2. a. Montrer que, dans l'intervalle $[0\,;10]$, l'inéquation $100\cdot\mathrm{e}^{-x}-0{,}5\geqslant 0$ est équivalente à l'inéquation :
   $x\leqslant -\ln(0{,}005)$.

   b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0\,;10]$.

3. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère.
   Montrer, à l'aide de la question 2., que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

4. En utilisant les résultats de la question 2., déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

