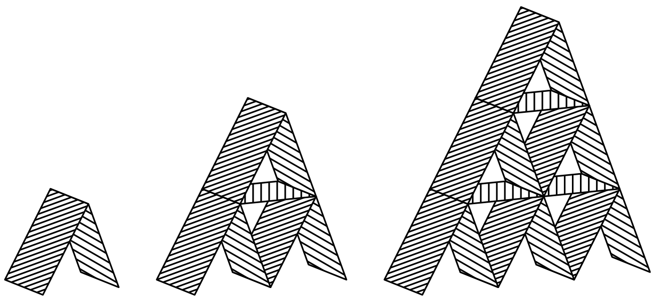
Terminale ES spé/Introduction aux matrices

1. Rappes sur les suites :

Exercice réservé 6124

On considère la construction d'un château de cartes :

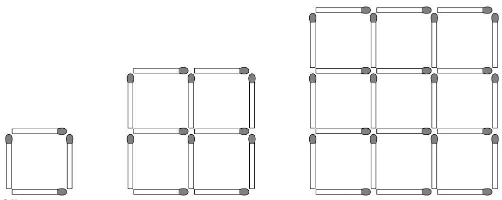


1^{er} étape $\quad 2^{\text{ième}}$ étape $\quad 3^{\text{ième}}$ étape

Combien de cartes faut-il pour réaliser la $4^{\text{ième}}$ étape de cette construction? pour la $5^{\text{ième}}$ étape?

Exercice 6144

On considère les constructions suivantes :



1^{er} étape $\quad 2^{\text{ième}}$ étape $\quad 3^{\text{ième}}$ étape

On note (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ où u_n représente le nombre d'allumettes nécessaire à la construction de la $n^{\text{ième}}$ étape.

Parmi les définitions proposées ci-dessous, laquelle permet de définir la suite (u_n) présentée ci-dessus :

a. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4\cdot u_n \end{cases}$ $\qquad$ b. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4\cdot n \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4\cdot(n+1) \end{cases}$ $\qquad$ d. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4\cdot u_n + n \end{cases}$

Exercice 6125

On considère les suites numériques, ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$ par récurrence : c'est à dire en fonction de leur valeur initiale et d'une relation avec les termes précédents.

1. $u_0=5 \quad ; \quad u_{n+1}=u_n+2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. $v_0=3 \quad ; \quad v_{n+1}=2\cdot v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. $w_0=2 \quad ; \quad w_{n+1}=-w_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. $x_0=4 \quad ; \quad x_{n+1}=2\cdot x_n-2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
5. $x_0=1 \quad ; \quad x_1=1 \quad ; \quad x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

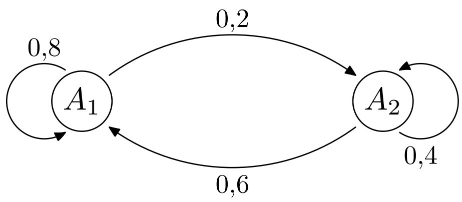
Déterminer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Exercice réservé 6128

On considère deux villes A_1 et A_2 d'une même région et on étudie les mouvements migratoires entre ces deux villes :

1. L'étude montre que :
   - Chaque année 20 % de la population de la ville A_1 partent s'installer dans la ville A_2
   - Chaque année 60 % de la population de la ville A_2 partent s'installer dans la ville A_1

   On schématise cette situation par le graphe ci-dessous :



   On souhaite rassembler ces données dans la matrice M composée de deux lignes et de deux colonnes. Le coefficient m_{ij}, situé à la i^e ligne et la j^e colonne, représentent la fréquence des personnes habitant la première année dans la ville A_i et vivant l'année suivante dans la ville A_j.

   a. Quelle interprétation peut-on donner des coefficient m_{21} et m_{22}?

   b. Ecrire la matrice représentant cette situation.

2. Une nouvelle étude donne les chiffres suivants :
   - Chaque année 65 % de la population de la ville A_1 ne déménage pas.
   - Chaque année 30 % de la population de la ville A_2 ne déménage pas.

   a. Produire le graphe représentant cette situation.

   b. En conservant les conventions de la question 1. b., écrire la matrice correspondant à cette matrice.

Exercice réservé 6126

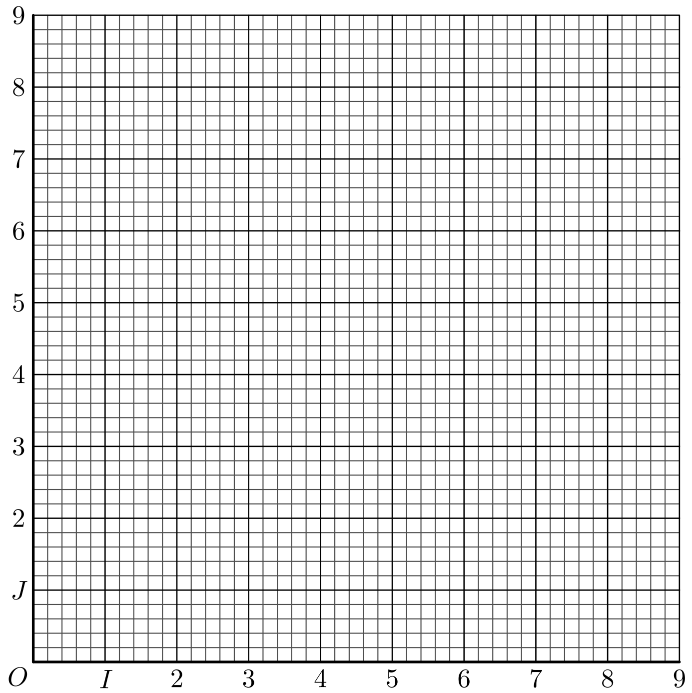
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par récurrence par les relations :

- $u_0=2 \quad ; \quad u_{n+1}=u_n+0{,}75$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
- $v_0=0{,}125 \quad ; \quad v_{n+1}=2\cdot v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Quelles sont les natures des suites (u_n) et (v_n)?
2. Compléter le tableau suivant avec les valeurs de la suite arrondies au dixième près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										
v_n										

3. Placer les points $(n\,;u_n)$ et $(n\,;v_n)$ représentant ces deux suites dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ ci-dessous :



Exercice 6127

1. On considère la suite (u_n) définie explicitement par la relation en fonction du rang n :

$$u_n = 3{\cdot}n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Justifier que la suite (u_n) est une suite arithmétique. Donner la raison de cette suite.

2. On considère la suite (v_n) définie explicitement par la relation en fonction du rang n :

$$v_n = 2 \times 3^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique. Donner la raison de cette suite.

2. Rappels sur les systèmes :

Exercice 6118

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :

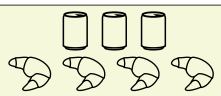
Facture : 4,5 €.

Facture : 10,8 €

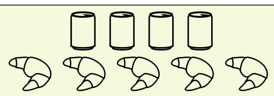
Dans ce café, quels sont les prix d'un croissant et d'un café?

Exercice 6119

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :



Facture : 11 €.

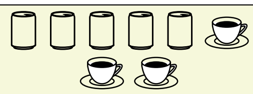


Facture : 14,3 €

Dans ce café, quels sont les prix d'un croissant et d'une canette?

Exercice 6120

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :



Facture : 15,2 €.

Facture : 10 €

Quels sont les prix, dans ce café, d'un café et d'une canette?

Exercice 6121

1. Résoudre par la méthode de combinaisons linéaires le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

2. Résoudre par la méthode de la substitution le système suivant :

$$(T) : \begin{cases} 3x + y = 16 \\ 8x - 5y = 12 \end{cases}$$

Exercice réservé 6122

On considère le système (S) d'équations :

$$\begin{cases} x - 3y = 8 \\ 4x + y = -7 \end{cases}$$

Résoudre le système (S).

3. Introduction aux matrices :

Exercice 6123

Une entreprise recense le prix en euros des produits qu'elle utilise en lien avec ses différents fournisseurs. Il obtient le tableau à double entrée suivant :

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Fournisseur 1	3,50	2,80	1,75
Fournisseur 2	3,25	3	1,70

Il note l'ensemble de ces valeurs dans la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 3{,}50 & 2{,}80 & 1{,}75 \\ 3{,}25 & 3 & 1{,}70 \end{pmatrix}$$

Les différents nombres placés dans la matrice s'appellent "*les coefficients de la matrice*". On note, de manière générale, m_{ij} les coefficients de la matrice où i et j sont deux entiers permettant de situer la place du coefficient dans la matrice.

Plus précisément, le coefficient m_{ij} est le prix du "*Produit j*" chez le "*Fournisseur i*".

1. a. Donner les valeurs des coefficients suivant :
m_{12} ; m_{22} ; m_{13}

   b. Compléter la phrase suivante :
"*Le coefficient m_{ij} se situe dans la matrice à l'intersection de la ligne ... et de la colonne ...*"

2. Ecrire la nouvelle matrice N exprimant le prix des mêmes produits en francs de l'Afrique de l'Ouest. On utilisera la conversion $1\,€ = 655\,FCFA$ et on arrondira les valeurs à l'unité près.

Exercice 6143

Trois tri-athlètes participent à une course. Les temps de parcours de chacune des épreuves sont données dans le tableau ci-dessous exprimées en minutes :

	Jacques 1er athlète	Henry 2^e athlète	Paul 3^e athlète
Course à pied *(épreuve 1)*	45	62	34
Natation *(épreuve 2)*	35	24	28
Cyclisme *(épreuve 3)*	92	95	104

On souhaite représenter les données de ce tableau à double entrée par une matrice $A = (a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} est le temps de parcours, exprimé en minutes, de l'athlète i lors de l'épreuve j.

1. Donner les valeurs des coefficients suivants :
a_{13} ; a_{32}

2. Ecrire la matrice A.

3. On considère la matrice $B = (b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} est la durée, exprimé en heure et arrondie au centième près, du temps de parcours effectué par le participant i lors de l'épreuve j.

   a. Ecrire la matrice B

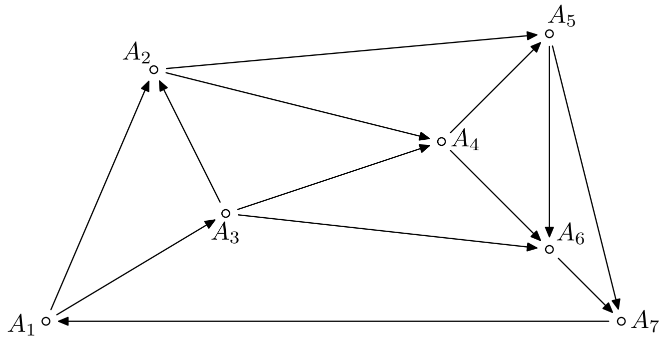
   b. Quel mécanisme simple permet de passer de la matrice A à la matrice B?

Exercice 6170

Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterissage, sont appelées *taxiways*.

Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation *(les "taxiways")* et les sommets du graphe sont les intersections.

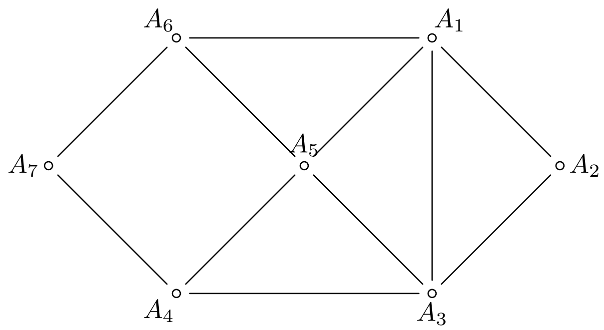
Ce graphe est orienté pour indiquer le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies :



Ecrire la matrice $M = (m_{ij})$ associée à ce graphe où le coefficient m_{ij} représentent le nombre de chemin pour aller de l'intersection A_i à l'intersection A_j.
On admet que pour toute valeur de i : $m_{ii} = 0$.

Exercice réservé 6171

Le graphe ci-dessous représente 7 villes reliées par des routes :

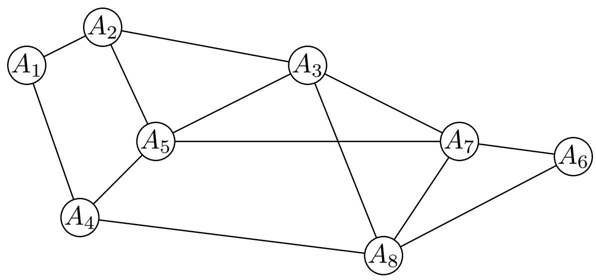


Donner l'écriture de la matrice $M = (m_{ij})$ où la coefficient m_{ij} prend les valeurs suivantes :

- $m_{ij} = 1$ s'il existe une route reliant directementles villes A_i et A_j ;
- $m_{ii} = 1$ pour tout entier i ;
- $m_{ij} = 0$ s'il n'y a aucune route directe reliant les villes A_i et A_j ;

Exercice réservé 6196

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les huit villes notées de A_1 à A_8, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes *(une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête)* :



On considère la matrice $M = (m_{ij})$ de dimensions 8×8 telle que :

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 & \text{si les villes } A_i \text{ et } A_j \text{ sont reliées par un seul tronçon d'autoroute.} \\ m_{ij} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On admet que pour tout entier naturel i : $m_{ii} = 0$.

Donner l'expression de la matrice M.

4. Première manipulation de matrices :

Exercice 6141

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Pour mettre en évidence les coefficients de la matrice, on note : $A = \big(a_{ij}\big)$

1. Donner la valeur des coefficients de la matrice suivants :
   a. a_{23} b. a_{34} c. a_{11} d. a_{31}

2. Déterminer la valeur des calculs suivants :
   a. $a_{11} + a_{21}$ b. $a_{32} \times a_{14}$ c. $\big(a_{24}\big)^2$

3. Citer l'ensemble des couples de coefficients de la matrice opposés entre eux.

Exercice 6142

On appelle "*matrice magique*" toute matrice où les sommes des coefficients par ligne, par colonne , par la diagonale principale et par la seconde diagonale donnent toutes le même résultat.

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont des matrices magiques :

a. $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice réservé 6153

Une entreprise se fournit en matière première dans deux pays différents.

On considère les deux tableaux suivants :

	Alu M1	Bois M2	Fer M3
Pays 1	25	14	12
Pays 2	23	11	11

Prix des matières premières

	Alu M1	Bois M2	Fer M3
Pays 1	3	2	1
Pays 2	2	3	1

Prix du transport

1. a. Ecrire la matrice $A=\big(a_{ij}\big)_{ij}$ où le coefficient a_{ij} représente "*le prix du matériau j dans le pays i*".

   b. Ecrire la matrice $B=\big(b_{ij}\big)_{ij}$ où le coefficient b_{ij} représente "*le prix de transport du matériau j dans le pays i*".

   c. Ecrire la matrice $C=\big(c_{ij}\big)_{ij}$ où le coefficient c_{ij} représente "*le prix d'achat du matériau j dans le pays i*".

2. Pour entamer sa production, l'entreprise a besoin de 2 unités d'Aluminium, de 1 unité de bois et de 3 unités de Fer.

   On représente ces données dans la matrice $D=\big(d_{ij}\big)$ donnée ci-dessous :

   $$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   a. Donner une interprétation du coefficient d_{ij} de la matrice D.

   b. Déterminer le prix total de ses achats, si l'entreprise choisit de se fournir dans le pays 1? dans le pays 2?

5. Multiplication par un réel et addition :

Exercice 6154

Effectuer les opérations suivantes :

a. $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b. $4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{4} & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6155

Effectuer les opérations suivantes :

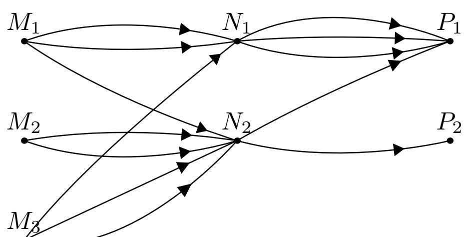
a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. Multiplication de matrices :

Exercice 6156

Ci-dessous sont représentés des liaisons routières entre des villes :

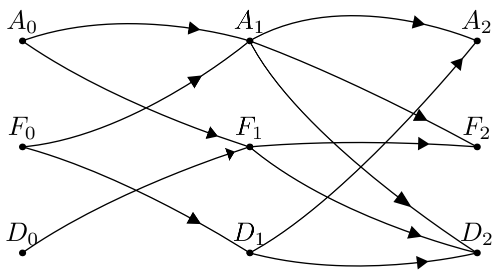


1. a. On considère la matrice $A=\left(a_{ij}\right)$ où le coefficient a_{ij} représente "*le nombre de route reliant la ville M_i avec la ville N_j*".
Ecrire la matrice A.
   b. On considère la matrice $B=\left(b_{ij}\right)$ où le coefficient b_{ij} représente "*le nombre de route reliant la ville N_i avec la ville P_j*".
Ecrire la matrice B.
   c. On considère la matrice $C=\left(c_{ij}\right)$ de dimension 3×2 où le coefficient c_{ij} est définie par :
$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j}$
Ecrire la matrice C.

2. a. Combien de trajets permettent de passer de la ville M_1 à P_1? de la ville M_1 à P_2? de la ville M_2 à la ville P_1?
   b. Que remarque-t-on? Comment peut-on interpréter les coefficient de la matrice C.

Exercice 6164

Trois amies Abondance, Fortune et Désirée *(on les considèrera dans cet ordre tout au long de l'exercice)* s'échangent chaque semaine leur shampoing colorant. Ci-dessous, dans le graphe est représenté les différents échanges possibles sur deux semaines



1. On note M la matrice représentant les échanges au cours de la première semaine. Plus précisément, le coefficient m_{ij} représente le nombre de possibilité d'échanges au cours de la première semaine entre la $i^{\text{ième}}$ amies et la $j^{\text{ième}}$ amies.

2. On note N la matrice représentant les échanges au cours de la seconde semaine. Plus précisément, le coefficient n_{ij} représente le nombre déchange au cours de la seconde semaine entre la $i^{\text{ième}}$ amies et la $j^{\text{ième}}$ amies.

3. a. Effectuer le produit matriciel $M\cdot N$.
   b. A l'aide du graphe, déterminer le nombre de possibilités d'échanges pour que le shampoing d'Abondance se retrouve en fin de deuxième semaine entre les mains de Désirée.

Exercice 6165

Vérifier les égalités suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 6157

Effectuer les produits de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice réservé 6158

Effectuer les produits de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice réservé 6172

Effectuer les produits matriciels suivants :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice réservé 6197

Une entreprise nécessite chaque année des fournitures de bureau pour faire fonctionner ses départements "*administratifs*" et "*productions*". Le tableau ci-dessous recense ses besoins pour une année en milliers d'unités :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Administration (D_1)	3	4	1
Production (D_2)	1	2	3

Un appel d'offres est lancé auquel répondent deux entreprises. Le tableau ci-dessous représente le prix unitaire en euros de chacun des fournitures nécessaire à cette entreprise :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Fournisseur PasTropCher (F_1)	2	3	1
Fournisseur BonPrix (F_2)	3	1	2

1. a. Ecrire la matrice $A=\left(a_{ij}\right)$ où le coefficient a_{ij} est la quantité du matériel M_j nécessaire au département D_i.
   b. Ecrire la matrice $B=\left(b_{ij}\right)$ où le coefficient b_{ij} est le prix proposé par le fournisseur F_j pour le matériel M_i.

2. Effectuer le produit matriciel suivant : $A\cdot B$.

3. a. Afin de réaliser des économies, quel fournisseur l'entreprise doit choisir.
   b. Pour ce fournisseur, donner le montant de l'achat des fournitures de bureau.

7. Quelques propriétés de la multiplication :

Exercice 6166

1. Effectuer les produits matriciels suivants :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

2. Que peux-t-on donner comme caractéristique à une matrice ne comportant que des 1 sur sa diagonale principale et des zéros ailleurs?

Exercice 6167

1. Effectuer les deux produits matriciels suivants :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Effectuer les deux produits matriciels suivants :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Peut-on obtenir une règle sur les produits $A{\cdot}B$ et $B{\cdot}A$ de deux matrices?

8. Inverse de matrices :

Exercice 6173

On souhaite résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z &=& 8 \\ x + 2z &=& 7 \\ x + 3y &=& 7 \end{array} \right.$$

1. a. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b. Que peut-on dire des solutions de l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. a. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

b. En utilisant la question précédente, simplifier l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c. Donner le triplet $(x\,;y\,;z)$ solution du système $(\mathcal{S})$ d'équations.

9. Résolution de systèmes sans calculatrice :

Exercice 6183

1. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On considère le système ci-dessous de trois équations à trois inconnues :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - 2z &=& 1 \\ -3y + 2z &=& -1 \\ -2x + 3z &=& -1 \end{array} \right.$$

a. Déterminer l'expression des deux matrices A et B telles que l'équation matricielle ci-dessous ait les mêmes solutions que le système $(\mathcal{S})$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$$

b. Résoudre l'équation matricielle précédente.

Exercice réservé 6184

1. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

2. On considère le système ci-dessous de trois équations à trois inconnues :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z &=& 5 \\ 3x + 6y - 4z &=& 13 \\ 2x + 5y - 3z &=& 11 \end{array} \right.$$

ⓐ Déterminer l'expression des deux matrices A et B telles que l'équation matricielle ci-dessous ait les mêmes solutions que le système $(\mathcal{S})$:

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=B$$

ⓑ Résoudre l'équation matricielle précédente.

10. Résolution de systèmes avec calculatrice :

Exercice réservé 6195

On considère le système $(\mathcal{S})$ d'équations défini par :

$$(\mathcal{S}):\ \begin{cases} x+2y+3z=7\\ -x-2z=-4\\ x+y+2z=5\end{cases}$$

1. A l'aide de la calculatrice, donner l'expression de l'inverse de la matrice M où :
$$M=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&-2\\1&1&2\end{pmatrix}$$

2. Effectuer le produit matriciel suivant :
$$\begin{pmatrix}-2&1&4\\0&1&1\\1&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-4\\5\end{pmatrix}$$

3. ⓐ On considère la matrice X définie par : $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Donner l'écriture de deux matrices A et B telle que l'équation matricielle $A\cdot X=B$ ait les mêmes solutions que le système $(\mathcal{S})$.

ⓑ Résoudre l'équation matricielle de la question ⓐ. Donner le triplet solution de l'équation $(\mathcal{S})$.

Exercice 6185

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'inverse de la matrice A définie par :
$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\3&-2&3\\3&-1&-1\end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système suivant :
$$(\mathcal{S}):\ \begin{cases} -x+y-2z=1\\ 3x-2y+3z=-4\\ 3x-y-z=-5\end{cases}$$

Exercice réservé 6186

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'inverse de la matrice A définie par :
$$A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&-1&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x+y-2z=1\\ x-y-2z=1\\ x+y-z=0\end{cases}$

Exercice réservé 6208

Lors d'une campagne de marketing, l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.

A la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.

On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1. Ecrire un système traduisant cette situation.

2. Montrer que le système précédent est équivalent à :
$$R\cdot X=T \quad \text{où } R=\begin{pmatrix}1&1\\0{,}8&1{,}2\end{pmatrix}$$
et X et T sont des matrices que l'on précisera.

3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

11. Etude et résolution de contraintes :

Exercice 6207

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+10 \qquad \text{où } \begin{cases} a,\ b \text{ et } c \text{ sont des}\\ \text{nombres réels.}\end{cases}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

Justifier que le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution du système $(\mathcal{S})$.

$$(\mathcal{S}):\ \begin{cases} a+b+c=1\\ 27a+9b+3c=17{,}4\\ 125a+25b+5c=73\end{cases}$$

Exercice 6215

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x) = a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x + 10 \qquad \text{où } \left\{ \begin{array}{l} a,\ b \text{ et } c \text{ sont des} \\ \text{nombres réels.} \end{array} \right.$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution du système $(\mathcal{S})$.

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 1 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & = & 17{,}4 \\ 125a & + & 25b & + & 5c & = & 73 \end{array} \right.$$

On pose : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

1. a. Ecrire ce système sous la forme $M{\cdot}X = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

   b. On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet $(a\,;b\,;c)$ solution du système $(\mathcal{S})$.

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites?

Exercice 6216

On considère la fonction f définie par le polynôme du troisième degré :

$f(x) = a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x + 2 \quad$ où $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$

La fonction f admet les images suivantes :

$f(-1) = -8 \quad ; \quad f(1) = 8 \quad ; \quad f(2) = 28$

1. Ecrire un système $(\mathcal{S})$ de trois équations et de trois inconnues dont le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution.

2. On note X la matrice colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   a. Exprimer deux matrices A et Y tel que l'équation $(\mathcal{E})$ matrice ci-dessous admet le même triplet solution du système $(\mathcal{S})$ d'équations :
   $(\mathcal{E}) : \quad A \cdot X = Y.$

   b. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée du triplet solution de $(\mathcal{S})$ au centième près.

255. Exercices non-classés :

Exercice 6712

Une entreprise recense le prix en euros des produits qu'elle utilise en lien avec ses différents fournisseurs. Il obtient le tableau à double entrée suivant :

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Fournisseur 1	3,50	2,80	1,75
Fournisseur 2	3,25	3	1,70

On note $A = (a_{ij})$ la matrice où les coefficients a_{ij} représentent le prix du "*Produit j*" chez le "*Fournisseur i*".

1. Ecrire la matrice A.

2. Les fournisseurs décident des augmentations sur leur produit dont les montants sont données dans le tableau ci-dessous :

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Fournisseur 1	0,50	0,20	0,25
Fournisseur 2	0,25	0	0,3

   Ecrire la matrice B correspondant aux augmentations.

3. Ecrire la matrice C correspond aux nouveaux prix.

