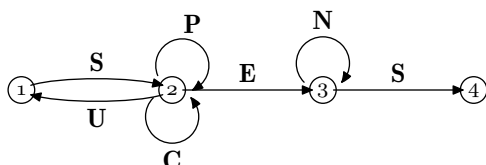


Terminale ES spé/Graphe étiqueté, pondéré, probabiliste

1. Graphe étiqueté :

Exercice 6390

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, ne partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes *SES* et *SPPCES* sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes *SUN* et *SPEN*.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe.

SUCCES ; SCENES ; SUSPENS

2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associé au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1 - 2 - 3 - 4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3. Avec une calculatrice, on a calculé :

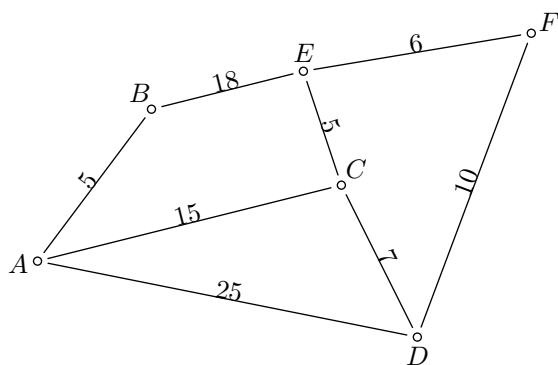
$$A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes?

2. Algorithme de Dijkstra :

Exercice 6367

On considère le graphe \mathcal{G} ci-dessous où sont indiqués sur chacune des arêtes le temps de parcours, en minutes, pour relier deux sommets de ce graphe.

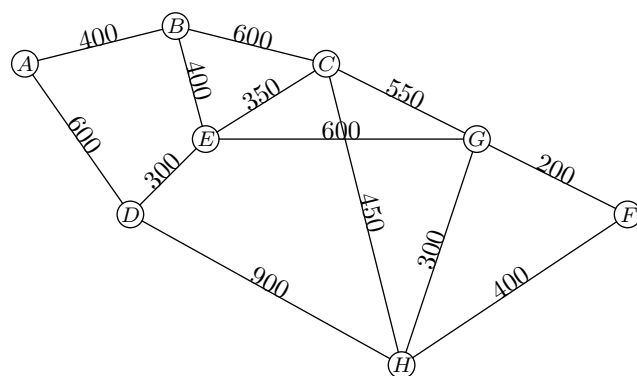


Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet A au sommet F en un temps minimal.

Exercice 6372

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H , en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe \mathcal{G} ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :

Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A . Le graphe \mathcal{G} indique les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.

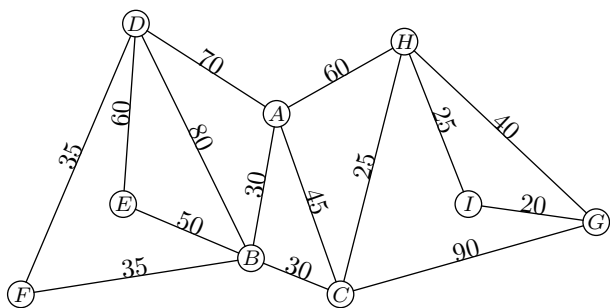


Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F .

Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

Exercice réservé 6373

On considère le graphe \mathcal{G} ci-dessous et est indiqué, sur chaque arête, le nombre de secondes nécessaire au parcours de chacune d'elle :

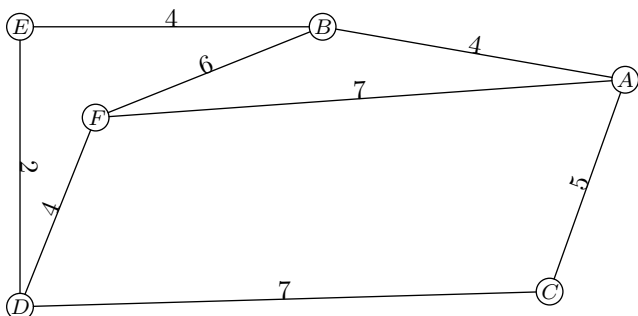


Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet G au sommet D en un temps minimal.

Déterminer ce temps minimal, exprimé en seconde.

Exercice 6370

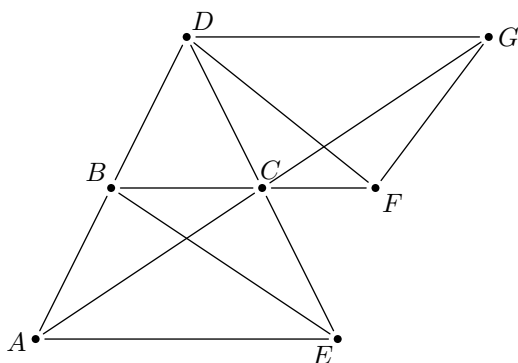
On considère le graphe ci-dessous où sont indiquées les durées de parcours pour chacune d'elles.



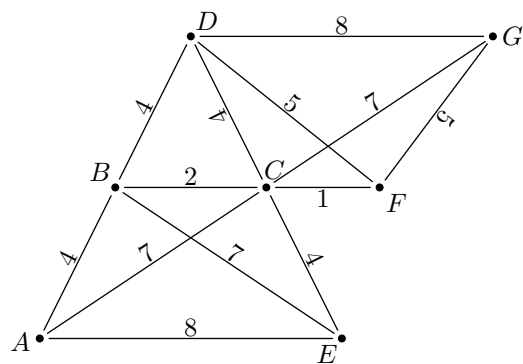
Déterminer la chaîne la plus courte reliant les sommets A et D .

Exercice réservé 6351

On considère le graphe ci-dessous :



1.
 - a. Construire la matrice M d'adjacence de ce graphe (on considèrera les sommets dans l'ordre alphabétique).
 - b. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'expression de la matrice M^3 .
 - c. Justifier qu'il existe 5 chaînes de longueur 3 reliant le sommet A au sommet F ?
Donner ces cinq chaînes.
2. On a ajouté sur ce graphe, les distances de chacune des arêtes.

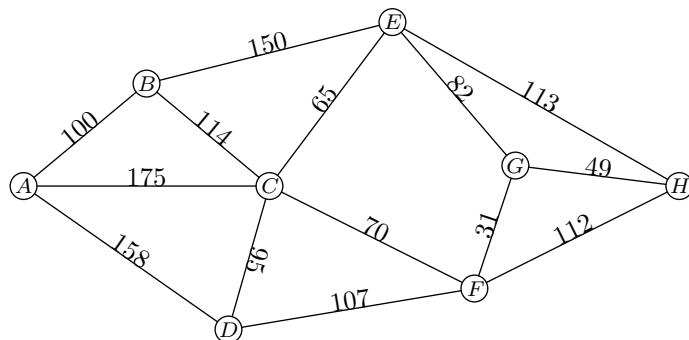


Quelle est la chaîne la plus courte de longueur 3 reliant le sommet A au sommet F ?

Exercice 6378

Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possible.

Son assistant dresse le graphe suivant qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notée B, C, D, E, F et G et les deux sites, A et H .



Déterminer l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indiquer le nombre de kilomètres à effectuer. Justifier la réponse.

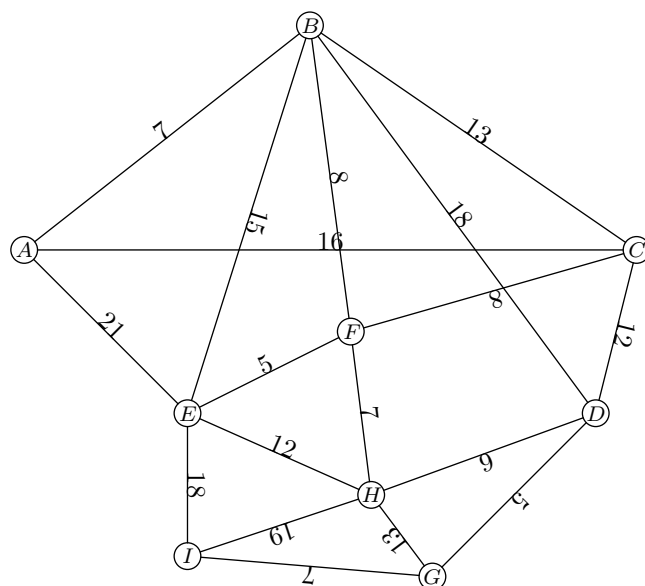
Exercice 6379

Une partie d'un domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.

Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.

Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.

Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.

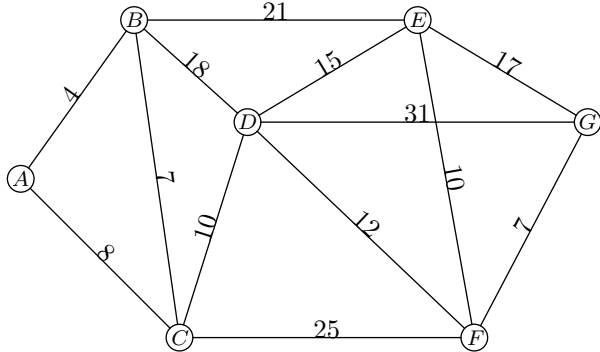


Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I .

Exercice 6385

Une région est munie d'un réseau de trains, représenté par le graphe Γ ci-dessous.

Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G . Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Les temps de parcours (*correspondance comprise*) en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.

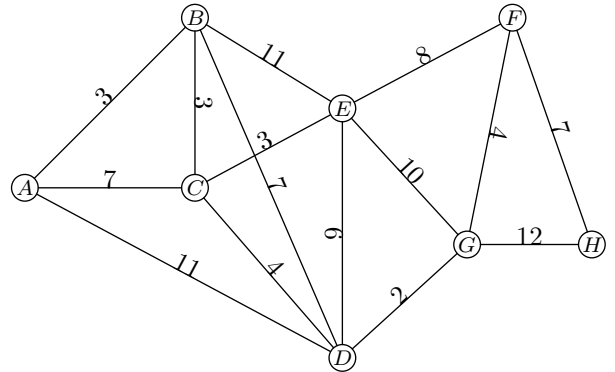


- Déterminer le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G .

- Quelle est la longueur en minutes de ce chemin?

Exercice 6389

Les points de collecte d'un camion d'une société recyclant des "déchet papier" ainsi que le temps de trajet (*en minutes*) entre ces différents points, sont représentés par le graphe ci-dessous. Le dépôt est représenté par le sommet A et les autres sommets représentent les différents points de collecte.



Le conducteur doit se rendre du dépôt A au point de collecte H . Il cherche le chemin qui minimise le temps de trajet. Déterminer ce chemin en expliquant le procédé utilisé, et préciser le temps minimum de parcours obtenu.

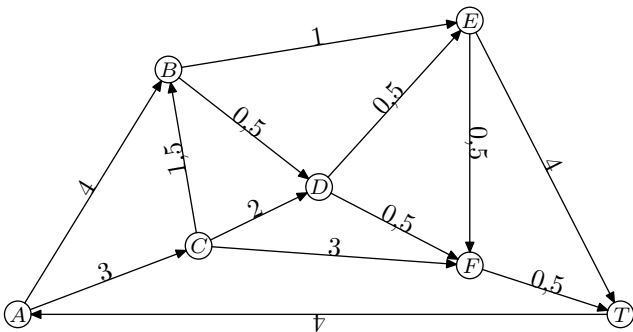
3. Algorithme de Dijkstra présentant des égalités de chemins :

Exercice 6374

Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways*.

Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation (*les "taxiways"*) et les sommets du graphe sont les intersections.

Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies ainsi que le temps de parcours pour chacune en minute(s).

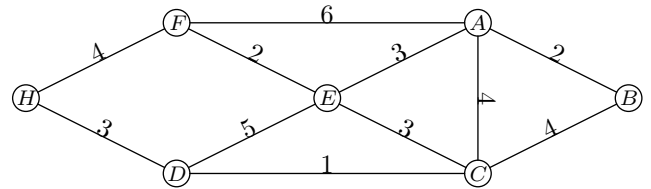


- Ecrire la matrice M associée à ce graphe (*ranger les sommets dans l'ordre alphabétique*)
 - Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T .
- L'avion qui a atterri en bout de piste en A et doit se rendre le plus rapidement possible au terminal situé au point T .

Déterminer l'itinéraire le plus rapide et en donner la durée.

Exercice 6368

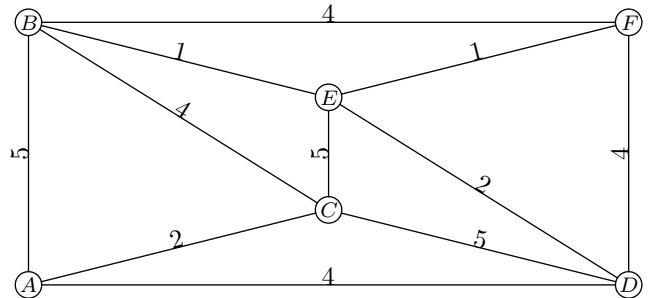
On considère le graphe ci-dessous :



Quel est le chemin le plus court pour relier le sommet B au sommet H ?

Exercice réservé 6369

On considère le graphe \mathcal{G} suivant :



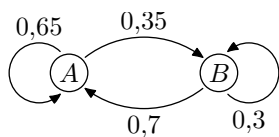
A l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer les deux chemins les plus courts reliant les sommets A et F .

4. Graphe probabiliste - matrice de transition :

Exercice 6395

On s'intéresse à l'évolution d'un système possédant deux états : A et B .

L'évolution des états de ce système est représentée par le graphe de transition ci-dessous :



On note a_n et b_n les valeurs respectives des états A et B après n évolutions de ce système ($n \in \mathbb{N}$).

Donner la matrice M de transition vérifiant pour tout entier naturel :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot M$$

Exercice 6393

On s'intéresse à la répétition d'une expérience aléatoire com-

5. Graphe probabiliste - recherche des états :

Exercice 5950

On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$u_0=0 \ ; \ v_0=1 \ ; \ \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Déterminer la valeur des termes u_3 et v_3 .
- On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

A l'aide de la calculatrice, effectuer le calcul matriciel : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M^3$

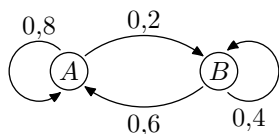
Exercice 6391

On considère deux gazs A et B qui en contact se transforme l'un en l'autre. Au départ, le mélange est composé de 20 l de gaz A et 50 l de gaz B .

Une étude montre que chaque heure :

- 20% du gaz A se transforme en gaz B ;
- 60% du gaz B se transforme en gaz A .

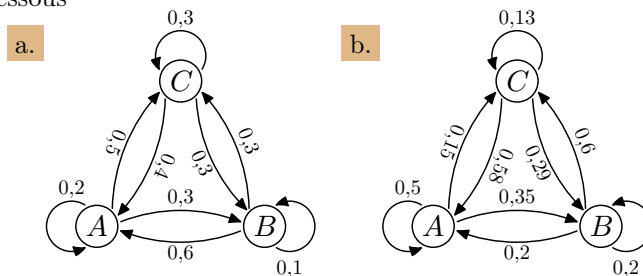
On schématise ce phénomène par le graphe pondéré suivant :



- Déterminer la composition du mélange au bout de 3 h.

6. Etude d'un graphe probabiliste :

portant trois issues A, B, C . A chaque répétition, l'évolution des probabilités de ses issues est soumise aux probabilités conditionnelles résumées dans les graphes probabilistes ci-dessous



On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A, B, C lors de la $n^{\text{ième}}$ répétition.

Pour chaque question, déterminer la matrice M de transition vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

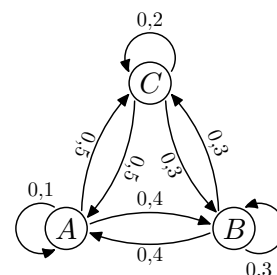
- A l'aide de la calculatrice, effectuer le calcul :

$$\begin{pmatrix} 20 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}^3$$

Exercice 6392

Le graphes ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :

On note a_n, b_n, c_n les probabilités associées à chacun des états à l'étape n .



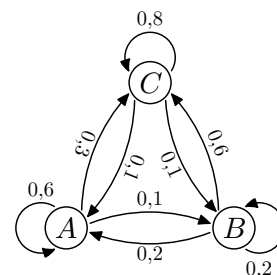
Les valeurs initiales sont : $a_0=5$; $b_0=2$; $c_0=7$

- Donner la matrice de transition associée à ce graphe probabiliste.
- A l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs associées à chacun de ses états à l'état 5. On arrondira les résultats au millième près.

Exercice 6394

Le graphes ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :

On considère la matrice-colonne $U_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$ représentant la valeur des probabilités d'être situé sur chacun des sommets à l'étape 0.



A l'aide de calculatrice et en observant les différents termes $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{20}$, quelle conjecture peut-on effectuer ?

Exercice 3578

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

En 2013, l'entreprise U avait 45% du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90% de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V .

Quant à l'entreprise V , elle conserve 85% de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U .

On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

- u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année 2013+ n , ainsi $u_0 = 0,45$;
- v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année 2013+ n .

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V .
2. Donner v_0 , calculer u_1 et v_1 .
3. On considère la fonction f (*incomplète*), extrait d'un algorithme, donnée ci-dessous. Appelée avec pour argument un entier naturel n non-nul, celle-ci renvoie le couple de valeurs $(u_n; v_n)$. Compléter les lignes (l.3) et (l.6) de la fonction pour obtenir le résultat attendu.

l.1	Fonction f(N)
l.2	U ← 0,45
l.3	V ← ...
l.4	Pour i allant de 1 jusqu'à N
l.5	U ← 0,9×U+0,15×V
l.6	V ← ...
l.7	Fin Pour
l.8	Renvoyer (U ; V)

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n :
 $u_{n+1} = 0,75 \cdot u_n + 0,15$.
On note, pour tout entier naturel n : $w_n = u_n - 0,6$
 - a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
 - b. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la

limite de la suite (u_n) .

Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Exercice 6400

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H .

Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : "la commande est passée auprès du fournisseur A " ;
- H désigne l'état : "La commande est passée auprès du fournisseur H ".

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M .
2. Donner la signification du nombre 0,95 dans la matrice M .

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n la probabilité de l'évènement : "La semaine n , l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A " ;
- h_n la probabilité de l'évènement : "La semaine n , l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H " ;
- P_n la matrice $(a_n \ h_n)$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n .

3. Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ correspondant à l'état stable du système. En donner une interprétation.

4. On donne $P_0 = (0,4 \ 0,6)$ et on rappelle que :

$$P_k = P_0 \times M^k \quad \text{pour } k \text{ entier naturel.}$$

Déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H .