Seconde/Un peu plus d'algèbre

1. Comparaison de nombres :

Exercice 279

Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1. Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur $4{,}55\,m$ et de largeur $3{,}85\,m$.

   On veut carreler cette pièce avec des dalles carrées, sans effectuer aucune découpe; de plus, les dimensions de ces pavés doivent être un nombre entier de centimètres.

   a. Donner la plus grande taille de pavés carrés utilisables dans cette pièces.

   b. Donner toutes les tailles possibles.

2. On dispose de dalles rectangulaires de $24\,cm$ de longueur et de $15\,cm$ de largeur.

   Quelle est la dimension de la plus petite pièce carrée qui puisse être pavé sans aucune découpe supplémentaire des dalles?

Exercice 291

Pour n un entier naturel, $n\in\mathbb{N}$, comparer les rationnels suivants :

$$\frac{n+1}{n+2} \quad ; \quad \frac{n+6}{n+3} \quad ; \quad \frac{n+7}{n+3}$$

Exercice 293

Soit a et b deux nombres tels que $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 0$:

1. Développer : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
2. Quel est le signe de : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
3. En déduire : $a+b\geqslant 2\sqrt{a\times b}$

Exercice réservé 297

x et y désignent deux nombres réels.
Donner, dans la mesure du possible, un encadrement de $x+y$, $x-y$, $x\times y$, $\dfrac{x}{y}$ et x^2 :

1. $-1\leqslant x<0 \quad$ et $\quad 1{,}4\leqslant y\leqslant 1{,}5$
2. $-\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant -1 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1$
3. $x\geqslant 0 \quad$ et $\quad -1\leqslant y\leqslant 1$

Exercice réservé 299

On considère deux nombres positifs a et b tel que $a\leqslant b$.
Pour $c\in\mathbb{R}$, on souhaite comparer les nombres $a\cdot c$ et $b\cdot c$.

1. a. Donner le signe de $a-b$.

   b. En fonction du signe de c, déterminer le signe de $(a-b)\times c$.

2. Pour a, b, c trois nombres réels, compléter les énoncés suivants à l'aide des signes de comparaison :
   - Si $a\leqslant b$ et $c\geqslant 0$ Alors $a\cdot c$ ...... $b\cdot c$
   - Si $a\leqslant b$ et $c\leqslant 0$ Alors $a\cdot c$ ...... $b\cdot c$

Exercice réservé 305

1. Compléter le tableau suivant :

a	0		0,3	0,7	1			10
a^2		0,04					18,49	
a^3						1,728		

2. Dans chaque cas, comparer a, a^2 et a^3.
   Etablir une conjecture quant à l'ordre de comparaison de ces trois nombres.
3. Nous allons comparer les nombres a et a^2. Pour cela, nous allons étudier la différence a^2-a.

   a. Factoriser a^2-a

   b. Etudier le signe de cette différence.

   c. Retrouver votre conjecture de la question 2. quant à la comparaison de a et a^2

4. Faîtes de même avec a^2 et a^3.

Exercice réservé 309

La plus courte distance pour aller d'un point à un autre est la ligne droite.
On traduit ce fait par l'inégalité triangulaire reliant la distance entre trois points : quels que soient les points A, B, C du plan, on a toujours :

$AB\leqslant AC+CB$

(passer par le point C ralonge le parcours à moins qu'il n'appartiennent au segment)

On va construire un triangle DEF isocèle en F tels que $DE=5$. On note $x=EF=DF$

1. Peut-on construire ce triangle pour $x=2$
2. Donner un encadrement des valeurs possibles prises par x.
3. Exprimer la valeur p du périmètre du triangle DEF en fonction de la valeur x.
4. Pour x vérifiant l'encadrement : $2{,}5\leqslant x\leqslant 5$.
   Donner l'encadrement de p correspondant.

Exercice réservé 310

1. Au cours d'un goûter de fin d'année, deux élèves se trouvent préposer à la découpe des gateaux.
   L'élève A coupe les gateaux en 4 parts égales, tandis que l'élève B les coupe en 6 parts égales.
   Une fois le travail finit chacun prend deux parts de leurs gateaux et vont les manger dans leurs coins. Lequel des deux élèves a chapardé le plus de gateaux?

2. Un héritage est découpé en dix parts égales.

L'héritier X touche quatre parts, tandis que Mr Y en a eu 3 parts.
Exprimer les héritages touchés par chacun à l'aide d'une fraction. Qui a touché la plus grosse partie de l'héritage?

Exercice réservé 313

Soit $a>1$:

1. Comparer : $\dfrac{a}{a-1}$ et $\dfrac{a}{1+a}$
2. Classer ces nombres dans l'ordre croissant :
   0 ; $\dfrac{a}{1+a}$; $\dfrac{a}{a-1}$; 1 ; $\dfrac{a}{1-a}$; $\dfrac{-a}{1+a}$

Exercice 314

Pour x un nombre positif. Comparer les nombres : $\dfrac{x}{x+1}$; $\dfrac{x+1}{x+2}$

Exercice 315

1. Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{2}<a<1$, préciser quels encadrements sont vérifiés par a :
   a. $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{a}<2$ b. $0<a<2a$ c. $\dfrac{1}{4}<a^2<4$
2. Par disjonction de cas pour $a\in\left]-1\,;0\right[$ et $a\in\left[0\,;2\right[$, donner un encadrement de a^2 et a^3 pour $-1<a<2$.

Exercice 317

On considère un carré $ABCD$ de $5\,cm$ de côté.

1. Donner la longueur exacte des diagonales de ce carré.
2. Sachant que : $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$
   Donner un encadremment de la longueur de cette diagonale.

Exercice réservé 340

Pour a et b deux nombres strictement positifs vérifiant $a\leqslant b$.

1. Effectuer la différence : $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$
2. a. Donner le signe de : $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$.
   b. Comparer : $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$

Exercice réservé 341

Dans cet exercice, a et b désigneront des nombres réels **positifs**

1. Pour $a\leqslant b$, montrer les deux inégalités suivantes :
   $a^2\leqslant a\times b$; $b^2\geqslant a\times b$
   Compléter la phrase : Si $0\leqslant a\leqslant b$ alors ...
2. Supposons que $a^2\leqslant b^2$:
   a. Factoriser l'expression a^2-b^2
   b. En déduire le signe de $a-b$. Comparer a^2 et b^2
   c. Compléter la phrase suivante :
   Si a et b sont positifs, et $a^2\leqslant b^2$ alors ...
3. Si a et b sont deux nombres quelconques tels que $a^2\leqslant b^2$, peut-on en déduire une comparaison sur les nombres a et b?

Exercice 346

Comparer sans aide de la calculatrice les quotients suivants :

a. $\dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{5}{9}$ b. $-\dfrac{7}{3}$ et $\dfrac{-10}{3}$

c. $\dfrac{6}{5}$ et $\dfrac{9}{5}$ d. $\dfrac{10}{27}$ et $\dfrac{10}{31}$

e. $-\dfrac{8}{7}$ et $\dfrac{8}{-5}$ f. $\dfrac{\sqrt{2}}{7}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

g. Pour n un entier supérieur ou égal à 2 :
$\dfrac{n}{n+1}$ et $\dfrac{n}{n-1}$

Exercice 308

On cherche a comparer les nombres suivants :
$A=\dfrac{1202}{5949}$; $B=0{,}2020507648$; $C=\dfrac{1\,973\,152}{9\,765\,625}$

1. Comparer ces trois nombres à l'aide de votre calculatrice.
   Faîtes une conjecture.
2. a. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur de 5^{10}
   b. Montrer que : $C=\dfrac{1\,973\,152\times2^{10}}{10^{10}}$
   c. Quel est la nature du nombre C?

On admettra le théorème suivant :

> Une fraction $\dfrac{a}{b}$ irréductible est un nombre décimal si, et seulement si, son dénominateur admet une décomposition en produits de facteurs premiers de la forme $2^m\times5^n$ avec m et n des entiers naturels.

3. a. On a : $1202=2\times601$; $5949=3^2\times661$.
   Justifier que 601 et 661 sont des entiers premiers.
   b. En déduire que A est un nombre rationnel.
4. Reprendre votre conjecture de la question 1..

Exercice réservé 333

Soit x et y deux nombres réels avec $x\neq0$, montrer que $\dfrac{y}{x^2}$ et $\dfrac{y+3}{x^2+2}$ sont rangés dans le même sens que $2{\cdot}y$ et $3{\cdot}x^2$.

Exercice réservé 336

On veut essayer de déterminer le signe des expressions suivantes :

$-2y$; $x+y$; $x-y$; $x(2y-1)$; $-x+y$

Dans les cas suivants :

- $x>0$ et $y>0$:

	Positif	Négatif	On ne peut conclure
$2y$			
$x+y$			
$x-y$			
$x(2y-1)$			
$-x+y$			

- $x>0$ et $y<0$:

	Positif	Négatif	On ne peut conclure
$2y$			
$x+y$			
$x-y$			
$x(2y-1)$			
$-x+y$			

- $x<0$ et $y<0$:

	Positif	Négatif	On ne peut conclure
$2y$			
$x+y$			
$x-y$			
$x(2y-1)$			
$-x+y$			

Exercice réservé 1940

On considère deux nombres réels x et y vérifiant les encadrements suivants :

$-4 \leqslant x \leqslant -1 \quad ; \quad 2 \leqslant y \leqslant 5$

1. Donner les encadrements des nombres suivants :

   a. $3\times(1-x)+1$ b. $\dfrac{1-\sqrt{3-x}}{4}$

2. Donner les encadrements des nombres suivants :

   a. x^2 b. $x\times y$ c. $2x-3y$

2. Nombres premiers :

Exercice 259

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers naturels suivants :

   a. 25×72 b. 54×12

   c. 32×84 d. 100×98

2. Déduire de la question 1., déterminer :

   a. Le PGCD du couple $(25\times72\,;54\times12)$;

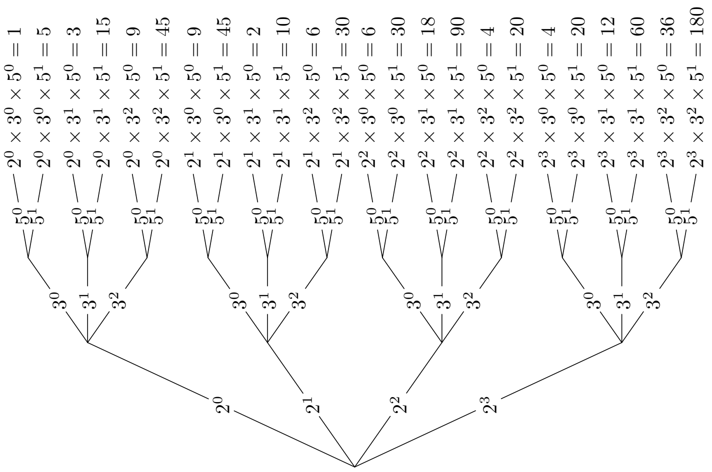
   b. Le PPCM du couple $(32\times84\,;100\times98)$ d'entiers naturels.

3. Utiliser un arbre de diviseurs pour déterminer l'ensemble des diviseurs de l'entier 315.

Exercice réservé 260

Voici la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier 60 :

$360 = 2^3\times3^2\times5$



1. Justifier que les entiers suivants sont des diviseurs de 60 :

   a. $2^1\times3^2$ b. 2×5 c. $2^2\times3^0\times5$

2. Parmi les entiers suivants, quels sont les diviseurs de 360 :

   a. $2^0\times3^0\times5^0$ b. $2^4\times3$

   c. 2×5^2 d. $2^3\times3^2\times5$

3. Quelles conditions, sur les exposants, peut-on donner à l'entier $2^n\times3^n\times5^p$ pour qu'il soit un diviseur de 360?

4. L'arbre de décision ci-contre permet d'obtenir tous les diviseurs de l'entier 360.
   En vous inspirant de cet exemple, déterminer l'ensemble des diviseurs des entiers suivants :

   a. 12 b. 135

Exercice 276

1. Parmi les entiers suivants, dire s'ils sont premiers ou non. Justifier vos réponses :

   a. 903 b. 167

2. a. Déterminer la décomposition de 245 en produit de facteurs premiers.

   b. Utiliser un arbre de choix, afin de déterminer l'ensemble des diviseurs de 245.

Exercice 296

1. Soit a et b deux nombres tels que $a\geqslant0$ et $b\geqslant0$. Comparer les nombres :

   $\sqrt{a+b} \quad ; \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}$

2. Quelles conditions sur a et b doit-on avoir pour que l'inégalité soit stricte?

Exercice réservé 240

Nous allons étudier l'algorithme de décomposition en produit de facteurs premiers les entiers.

1. Citer les huit entiers premiers inférieurs à 20.

Le tableau ci-contre représente l'algorithme de décomposition en produit de facteurs premiers de 30 :

30	2	$30\div2=15$
15	3	$15\div3=5$
5	5	$5\div5=1$
1		

- La colonne de gauche représente l'entier 30 et les quotients successifs obtenus.
- La colonne de droite représente les diviseurs utilisés ; on remarquera qu'on utilise que des nombres entiers premiers.

L'algorithme s'arrête lorsqu'on obtient 1 dans la colonne de gauche.

2. a. Justifier, à la vue du tableau ci-dessus, l'égalité suivante :
$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{30}{2}}{3}}{5}=1$$
   b. Soit x un nombre réel et a, b et c trois nombres réels non-nul, Etablir l'égalité suivante :
$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{x}{a}}{b}}{c}=\frac{x}{a\times b\times c}$$
   c. Déduire des questions précédentes, que la décomposition en facteurs premiers de 30 est :
   $30=2\times3\times5$

3. Utiliser l'algorithme précédent afin de déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers suivants :
   a. 84 b. 144 c. 140 d. 196

4. En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers des produits suivant :
   a. 84×144 b. 140×196

Exercice 234

1. Décomposer les entiers 108 et 30 en facteurs premiers.

2. Mettre en avant votre démarche pour les deux questions suivantes :
   a. Simplifier la fraction $\dfrac{30}{108}$.
   b. Effectuer la soustraction ci-dessous et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :
   $\dfrac{5}{108}-\dfrac{7}{30}$

Exercice 235

En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, donner une écriture des nombres ci-dessous sous la forme :
$2^m\times3^n\times\cdots$ où les exposants sont des entiers **relatifs**.

a. $\dfrac{9}{24}$ b. $\dfrac{28^2}{32}$ c. $\dfrac{81\times6^4}{27^2\times7^5}$ d. $\dfrac{38^2\times11}{6^5\times4^4\times19}$

Exercice 255

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des trois entiers ci-dessous :
   a. 16×25 b. 34×12 c. $72\times18\times10$
   d. 32×121

2. a. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers naturels ci-dessous :
   16 et 24
   b. Déduire de la question précédente la décomposition en produit de facteurs premiers du produit ci-dessous :
   $16^3\times24^2$.
   c. Déduire, de la question a., la décomposition en produit de facteurs premiers $\dfrac{24^5}{16^2}$.

Exercice 282

Dans cet exercice, on utilisera la décomposition en produit de facteurs premiers pour répondre aux différentes questions :

1. Déterminer le $PGCD$ des différents couples d'entiers :
   a. $(15\,;21)$ b. $(18\,;28)$ c. $(15\,;22)$

2. Déterminer si les deux entiers 56 et 45 sont premiers entre eux

Exercice 277

1. Déterminer les décompositions en facteurs premiers des entiers suivants :
   a. 36×54 b. 125×134 c. 280×24

2. En déduire le PGCD et le PPCM du couple $(6720\,;16750)$ d'entiers naturels.

Exercice réservé 256

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des deux entiers suivants :
   a. 36×26 b. 12×21

2. En déduire le PGCD de 936 et 252.

3. Réduire la fraction : $\dfrac{936^4}{252^5}$

Exercice 1722

Un entier naturel est dit premier s'il admet comme diviseur uniquement 1 et lui-même : 3 est un entier premier car ses seuls diviseurs sont 1 et 3.

1. Parmi les entiers ci-dessous, lesquels sont premiers?
   2 ; 4 ; 7 ; 12

2. Donner tous les entiers premiers de 1 à 25.

Exercice 1721

Le crible d'Eratosthène *($III^{ième}$ siècle avant J.C.)* permet de trouver facilement les entier premiers à partir d'une liste.

1. a. Justifier que 2 est un entier premier.
   b. Dans le tableau ci-dessous, hachurer toutes les cases dont l'entier est un multiple de 2 *(ne pas hachurer la case "2")*.

2. a. Justifier que 3 est un entier premier.
   b. Dans le tableau ci-dessous, hachurer toutes les cases dont l'entier est un multiple de 3 *(ne pas hachurer la case "3")*.

3. **a.** La case blanche suivant la case du 3 est la case du 5 : justifier, à l'aide de cet observation, que 5 est un entier premier.

b. Hachurer toutes les cases multiples de 5, sauf la case "5".

4. **a.** Dans le tableau ci-dessous, quel est la case blanche succédant à "5"?
Justifier également, en se servant de l'observation du tableau, que 7 est un entier premier.

b. Hachurer tous les multiples de l'entier 7 dans le tableau *(à l'exception de la case "7")*.

5. Continuer le travail pour hachurer dans le tableau tous les nombres entiers non-premiers présents parmi les nombres entiers de 1 à 100.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice réservé 1727

Cet exercice a pour but d'établir la proposition suivante :

Proposition :
Tout entier naturel n non-premier admet un diviseur premier compris dans l'intervalle $\left[2\,;\sqrt{n}\right]$.

Pour cela, prenons un entier naturel x non-premier ; il existe alors deux entiers naturels a et b supérieur ou égal à 2 tels que :
$$x = a\times b$$

Supposons que a est plus petit que b *(cela est possible en inversant au besoin le rôle de "a" et de "b")*

Pour montrer que a appartient à l'intervalle $\left[2\,;\sqrt{x}\right]$ nous allons faire un raisonnement par l'absurde.

Pour cela, supposons que l'entier appartient à l'intervalle $\left]\sqrt{x}\,;+\infty\right[$

1. Justifier l'inégalité suivante : $a\times b > x$

2. En déduire que : $a\in\left[2\,;\sqrt{x}\right]$.

La démonstration se termine du fait que a est un diviseur de x appartenant à l'intervalle $\left[2\,;\sqrt{x}\right]$:

- soit a est premier ;
- soit a n'est pas premier et a admet alors des diviseurs premiers ; ces diviseurs seront également des diviseurs premiers de x appartenant à l'intervalle considéré.

Exercice 1783

Déterminer si les entiers ci-dessous sont premiers ou non. Justifier votre démarche.

a. 251 **b.** 623

Exercice réservé 1805

1. Donner la décomposition en produits de facteurs premiers des entiers 20 et 135.

2. Mettre en avant votre démarche pour les deux questions suivantes :

a. Simplifier la fraction $\dfrac{20}{135}$.

b. Effectuer la soustraction suivante : $\dfrac{7}{20}-\dfrac{8}{135}$

Exercice 2468

A l'aide de la décomposition des nombres entiers en produits de facteurs premiers, donner l'écriture de chacun des nombres suivants sous la forme $p\sqrt{q}$ où $p\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{N}$ et où q est le plus petit possible.

a. $\sqrt{432}$ **b.** $\sqrt{126}$ **c.** $\sqrt{42}$

Exercice réservé 1952

tirée de la methode d'euclide pour obtenir des triplets pythagoriciens

$a = m^2 - n^2$....

Montrer pourquoi

$m^2 - n^2 < 2mn$

3. Polynomes du second degres :

Exercice 600

On va s'intéresser aux polynomes du second degré : des fonctions de la forme $x\mapsto a\cdot x^2+b\cdot x+c$ avec a, b et c sont des nombres réels fixés. On admet la proposition suivante :

> Toute fonction polynomiale du second degré peut sécrire sous la forme :
> $\alpha\cdot(x+\beta)^2+\gamma$
> Cette forme s'appelle la **forme canonique**.

Première méthode

1. **a.** Développer chacune des identités remarquables ci-dessous :

a. $(2x+1)^2$ **b.** $(3-2x)^2$

c. $(3x+7)^2$ **d.** $(-4x+1)^2$

b. En déduire la forme canonique de chacune de ces polynomes du second degré :

a. $9x^2+42x-5$ b. $4x^2-12x+16$

c. $4x^2+4x-8$ d. $16x^2-8x+7$

2. En reportant cette méthode, en déduire la forme réduite de $25x^2+20x+7$

Seconde méthode

On s'intéresse à l'égalité :

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=\alpha{\cdot}(x+\beta)^2+\gamma$$

1. Montrer que les nombres α, β et γ doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha = a \\ 2\cdot\alpha\cdot\beta = b \\ \gamma+\alpha\cdot\beta^2 = c \end{cases}$$

On admettra que pour toute valeur du triplet $(a\,;b\,;c)$, le système précédent admet une unique solution.

2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les valeurs de α, β et γ :

$a:x\longmapsto x^2+8x-9$; $b:x\longmapsto 2x^2+12x+4$

$c:x\longmapsto 6x^2+6x+7$; $d:x\longmapsto -2x^2+3x-4$

Question subsidiaire

1. Montrer que pour tout nombre a, b et c tel que $a\neq0$, on a :

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

2. Que pouvez-vous dire de l'équation $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=0$ si $b^2-4ac<0$

3. On admet le fait que :

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=a{\cdot}\Big(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Big)\Big(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Big)$$

Donner les deux solutions de l'équation $2x^2+4x+1=0$

Exercice 2009

On s'intéresse aux équations de la forme :

(E) : $(x+\beta)^2-\gamma=0$

1. a. Factoriser : $(x+2)^2-9$.

b. Résoudre l'équation suivante : $(x+2)^2-9=0$.

2. Pour chacune des équations suivantes, donner l'ensemble des solutions :

a. $(x-7)^2-3=0$ b. $(x+1)^2+2=0$

c. $(x-8)^2=0$

3. Quelle condition doit vérifier γ pour que :

a. (E) admette deux solutions ;

b. (E) admette une unique solution ;

c. (E) n'admette aucune solution.

Exercice 2010

1. Etablir l'identité suivante :

$$ax^2+bx+c=a\Big[\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\Big(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Big)\Big]$$

`Cette question permet d'affirmer que tout polynome du seconde degré` $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ `admet une écriture de la forme` $\alpha\big[(x+\beta)^2-\gamma\big]$. `Cette dernière forme s'appelle la forme canonique d'un polynome du second degré.`

2. a. Justifier que l'expression :

$$a\Big[\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\Big(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Big)\Big]=0$$

admette aucun solution, une solution, deux solutions suivant la valeur de b^2-4ac?

b. Pour chacune des équations ci-dessous, décrire l'ensemble des solutions : c'est à dire s'il est vide ou le nombre d'éléments le constituant :

(E) : $4x^2-5x+4$ (F) : $2x^2-x-1$

(G) : $9x^2-24x+16$

`L'ensemble des solutions de l'équation` $ax^2+bx+c=0$ `dépend du signe de` b^2-4ac. `On appelle discriminant du polynome` ax^2+bx+c `le nombre noté` Δ `valant :`

$\Delta=b^2-4a\cdot c$.

`Relativement à la question précédente, on en déduit qu'une équation du second degré admet comme ensemble de solution :`

- `l'ensemble vide si` $\Delta<0$,
- `un ensemble à un élément si` $\Delta=0$,
- `un ensemble à deux éléments distincts si` $\Delta>0$.

3. On considère une polynome du second degré ayant un discrimant strictement positif : $\Delta=b^2-4a{\cdot}c>0$

a. Factoriser l'expression : $\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\Delta$

b. En déduire que l'équation du second degré :

$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$

admet pour solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\quad;\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$$

4. On considère l'équation (H): $2x^2+2x-12=0$

a. Déterminer le discriminant du polynome $2x^2+2x-12$. Combien de solution admet l'équation (H)?

b. Par application directe de la question 3. b., prouver que l'équation (H) admet pour ensemble de solution $\{-3\,;2\}$

Exercice 3079

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{-2}{\sqrt{x^2-x-6}}$$

1. a. Factoriser l'expression : $\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2-\frac{25}{4}$

b. Justifier l'égalité suivante : $f(x)=\frac{-2}{\sqrt{(x-3)(x+2)}}$

2. a. Etablir le tableau de signe de l'expression : $(x-3)(x+2)$.

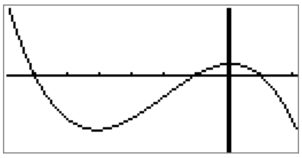
b. Déterminer l'ensemble définition de la fonction f.

3. En déduire, sur l'intervalle $]3\,;+\infty[$, la monotonie de la fonction f.

4. Calculatrice et polynome :

Exercice 4635

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x réel est définie par la relation :
$f(x) = -2x^3 - 12x^2 + 2x + 12$



La représentation de cette fonction est donnée dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

Parmi les expressions suivantes, une seule représente la forme factorisée de ce polynôme. Laquelle?

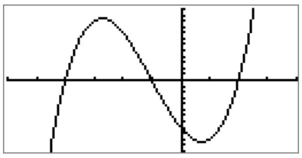
a. $2(x-1)(x+1)(x-6)$ b. $2(x-1)(x+1)(x+6)$

c. $2(1-x)(x+1)(x+6)$ d. $2(1-x)(x+1)(x-6)$

Vérifier votre réponse.

Exercice 4634

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x réel est définie par la relation :
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$



La représentation de cette fonction est donnée dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

Parmi les expressions suivantes, une seule représente la forme factorisée de ce polynôme. Laquelle?

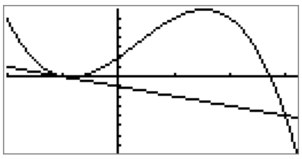
a. $(x+2)(x-1)(x-4)$ b. $(x-2)(x+1)(x+4)$

c. $(x-1)(x-2)(x+4)$ d. $(x+4)(x-1)(x+2)$

Vérifier votre réponse.

Exercice 4636

1. On considère les deux fonction f définies par :
$f(x) = -x^3 + x^2 + 4x + 2$
$g(x) = -x - 1$



Les représentation de ces deux fonctions sont données dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

a. Utiliser votre calculatrice pour décrire l'ensemble des solutions de l'équation :
$f(x) = g(x)$

b. Pour chacune des deux égalités ci-dessous, déterminer les valeurs des réels α, β et γ réalisant ces égalités :
- $-x^3 + x^2 + 5x + 3 = \big(x+1\big)\big(\alpha{\cdot}x^2 + \beta{\cdot}x + \gamma\big)$
- $-x^3 + x^2 + 5x + 3 = \big(x-3\big)\big(\alpha{\cdot}x^2 + \beta{\cdot}x + \gamma\big)$

c. A l'aide de la question précédente, affirmer la conjecture de la question a..

2. On considèr les deux fonctions f et g définies par :
$f(x) = 2x^3 - 5x + 6 \quad ; \quad g(x) = x + 2$

Suivre la démarche de la question précédente pour déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :
$f(x) = g(x)$

Exercice 4633

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la forme factorisée des polynômes suivants :

a. $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ b. $x^3 - 3x^2 - x + 3$

c. $-x^3 - x^2 + 4x + 4$ d. $3x^2 - 6x^2 - 3x + 6$

e. $4x^3 + 8x^2 - 4x - 8$ f. $-2x^3 + 4x^2 + 6x$

2. Vérifier algébriquement vos conjectures de la question précédente.

Exercice 4639

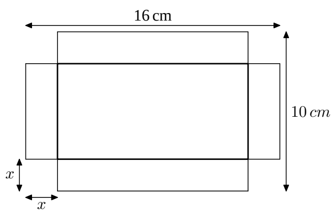
Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^3 - 4x^2 + x + 6 < 0$ b. $2x^3 + 4x^2 - 6x \geqslant 0$

c. $-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4 > 0$ d. $2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 \leqslant 0$

Exercice 4638

On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en cm.

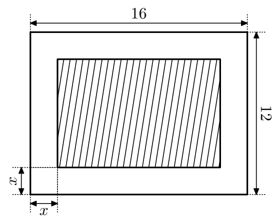


Déduire la ou les valeurs de x pour lesquelles cette boîte possède une aire de $144\,cm^2$.

Exercice 4637

Sur un ancien terrain vague de forme rectangulaire de longueur $16\,m$ et $12\,m$, la municipalité souhaite construire un jardin d'enfants avec une allée faisant le tour l'aire de jeu :

L'aire de jeu est représentée ci-dessous par la partie hachurée :



Quel(s) dimension(s) peut avoir la largeur de l'allée afin que l'aire de jeu soit la même que celle de l'allée.

255. Exercices non-classés :

Exercice 6786

1. Vérifier que : $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$

2. Existe-t-il d'autres séries de 5 entiers naturels consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des plus petits?

