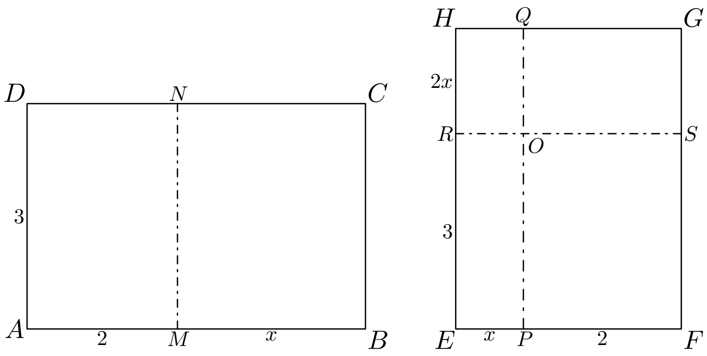
Première STMG/Polynôme du second degré

1. Rappels d'algèbres :

Exercice réservé 7182

On considère les deux rectangles $ABCD$ et $EFGH$ représentés ci-dessous :



1. Le rectangle $ABCD$ a été découpé en deux rectangles : $AMND$ et $BCNM$.
   On donne les dimensions :
   $AM=2$; $MN=x$; $AD=3$
   Justifier que l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle $ABCD$ peut s'exprimer des deux manières :
   $\mathcal{A}=3{\cdot}x+6$; $\mathcal{A}=3{\cdot}(x+2)$
2. Le rectangle $EFGH$ a été découpé en quatre rectangles : $EPOR$, $PFSO$, $SGQO$ et $QHRO$.
   On donne les mesures suivantes :
   $EP=x$; $PF=2$; $ER=3$; $RH=2x$
   Justifier que l'aire $\mathcal{A}'$ du rectangle $EFGH$ peut s'exprimer des deux manières :
   $\mathcal{A}'=2x^2+7x+6$; $\mathcal{A}'=(2x+3)(x+2)$

Exercice 7129

Développer les expressions suivantes :

a. $(2x+1)(x+1)$ b. $3{\cdot}(1+x)-2{\cdot}(x+3)$

c. $(2x+1)^2$ d. $(5x+2)(x+2)+2(1+x)$

Exercice réservé 7176

Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $3{\cdot}(2{\cdot}x+3)+2{\cdot}(4-x)$ b. $(2{\cdot}x-1)(2-3{\cdot}x)$

Exercice 7130

Pour chacune des équations ci-dessous, vérifier si le nombre 2 en est une solution :

a. $2x+5=5x-1$ b. $2(x+3)+1=15$

c. $2(1-x)^2-4=4-4x$ d. $x^2-4x+1=-3$

Exercice 7131

Résoudre les équations ci-dessous :

a. $2x+3=6$ b. $5x+1=2x+7$

c. $3x-4=7x+4$ d. $(x+1)^2=9$

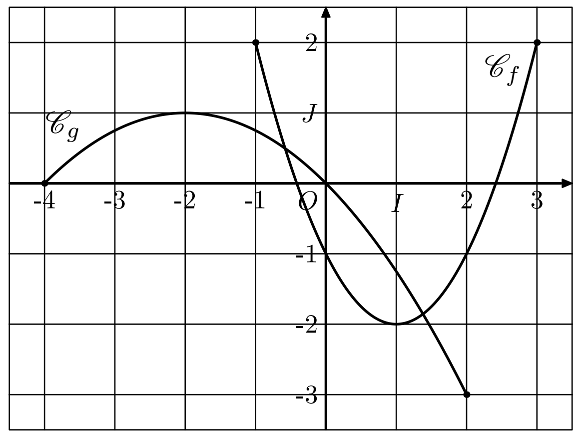
Exercice réservé 7177

Résoudre les équations suivantes :

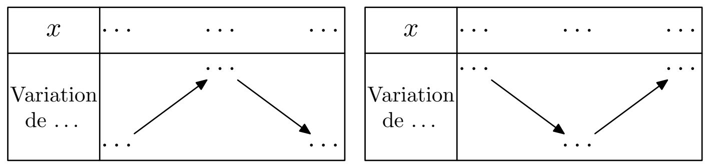
a. $3{\cdot}x+2=7-x$ b. $3{\cdot}(x-2)-2{\cdot}(1-x)=0$

Exercice 7132

On considère deux fonctions f et g représentées ci-dessous dans un repère $(O\,;I\,;J)$ respectivement par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$



Ci-dessous sont proposés deux tableaux de variations.



Compléter les pointillés dans chacun de ses tableaux de variations.

2. Ecriture d'un polynôme du second degré :

Exercice 7158

Ecrire chacune des polynômes ci-dessous sous la forme :
$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$

a. $3{\cdot}x^2+5-2{\cdot}x$ b. $5-x+3{\cdot}x^2$

c. $2{\cdot}x+1-x^2+3{\cdot}x$ d. $3{\cdot}x^2-1+x+3$

e. $2{\cdot}(x^2+x)+3{\cdot}(3-x)$ f. $(x+1)(2-x)$

Exercice 7159

1. Développer les expressions suivantes :

   a. $(x-3)(x-1)$ b. $(x-2)^2-1$

2. Développer les expressions suivantes :

   a. $2\cdot(x+2)(x+4)$ b. $2\cdot(x+3)^2-2$

3. Développer les expressions suivantes :

   a. $-(x-5)(x-1)$ b. $4-(x-3)^2$

3. Forme canonique :

Exercice 7160

Pour tout polynôme $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ du second degré, il existe deux nombres réels α et β tels que :

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x+\alpha)^2+\beta$$

Cette expression s'appelle **forme canonique** de ce polynôme.

1. a. Montrer que $(x-3)^2-4$ est la forme canonique du polynôme $x^2-6\cdot x+5$

   b. Montrer que $(x+1)^2-4$ est la forme canonique du polynôme $x^2+2\cdot x-3$

   c. Montrer que $(x-3)^2-25$ est la forme canonique du polynôme $x^2-6\cdot x-16$

Soit $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ un polynôme du second degré. On appelle racine de ce polynôme nombre x dont l'évalution par le polynôme vaut 0 :

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

Pour déterminer les racines d'un polynôme, on se sert de sa forme canonique. Prenons pour exemple, l'expression de la question a. :

$$x^2-6\cdot x+5=0$$
$$(x-3)^2-4=0$$
$$(x-3)^2=4$$
$$(x-3)^2=2^2$$

On utilise la propriété suivante : "*Deux nombres dont les carrés sont égaux sont soit égaux, soit opposés*".
On en déduit les deux équations :

$x-3=2$	$x-3=-2$
$x=2+3$	$x=-2+3$
$x=5$	$x=1$

Ainsi, le polynôme $x^2-6\cdot x+5$ admet les deux racines 1 et 5.

2. En utilisant la même méthode,

   b. Montrer que le polynôme $x^2+2\cdot x-3$ admet pour racine -3 et 1.

   c. Montrer que le polynôme $x^2-6\cdot x-16$ admet pour racine -2 et 8.

Exercice réservé 7178

Recopier et compléter les pointillés de chaque égalité afin d'obtenir la forme canonique de chacun des polynômes :

a. $x^2+4\cdot x-1=(x+2)^2+\dots$

b. $2\cdot x^2-8\cdot x+10=2\cdot(x-\dots)^2+2$

Exercice réservé 7179

On souhaite résoudre l'équation : $x^2+6x-7=0$

1. Etablir l'égalité : $x^2+6x-7=(x+3)^2-16$

2. En déduire les deux solutions de l'équation $x^2+6\cdot x-7=0$

4. Discriminant :

Exercice 7706

Le **discriminant** d'un polynôme $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ du second degré est un nombre qui se calcule à l'aide des coefficients du polynôme :

$$\Delta=b^2-4\times a\times c$$

Compléter le tableau ci-dessous pour chacun des polynômes du second degré :

	a	b	c	$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c$
x^2+x+1				
$-0{,}5{\cdot}x^2+2{\cdot}x+1$				
x^2+4				
$2{\cdot}x^2-3{\cdot}x-1$				

Exercice 7161

Compléter le tableau ci-dessous pour chacun des polynômes du second degré :

	a	b	c	$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c$
$2{\cdot}x^2+5{\cdot}x+1$				
$-x^2+7{\cdot}x+3$				
$x^2-5{\cdot}x+4$				
$2{\cdot}x^2-4{\cdot}x-1$				
$-x^2-x-1$				
x^2+7				

Exercice 7162

Déterminer le discrimant des polynômes du second degré ci-dessous :

a. x^2+2x+4 b. $2x^2+4x+1$ c. x^2-2x+1

d. $-2x^2+2x+1$ e. x^2-x-1 f. $3x^2+x-2$

Exercice réservé 7180

Déterminer le discriminant des polynômes ci-dessous :

a. $2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+3$ b. $-x^2+5{\cdot}x-4$

5. *Equation du second degré :*

Exercice 7163

Les racines d'un polynôme sont les valeurs annulant ce polynôme.
Pour un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré, le nombre de racines existantes dépend du discriminant :

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
Aucune solution	1 solution $-\dfrac{b}{2{\cdot}a}$	2 solutions $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$; $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2+2x-35=0$ b. $2x^2+8x+6=0$

c. $5x^2-3x+2=0$ d. $9x^2-24x+16=0$

e. $-2x^2+3x-5=0$ f. $3x^2+12x+9=0$

Exercice 7164

Résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2+9x+6=0$ b. $3x^2-4x+2=0$

c. $-x^2+2x+3=0$ d. $2x^2-4x+2=0$

e. $x^2+12x+27=0$ f. $2x^2+12x+10$

Exercice réservé 7181

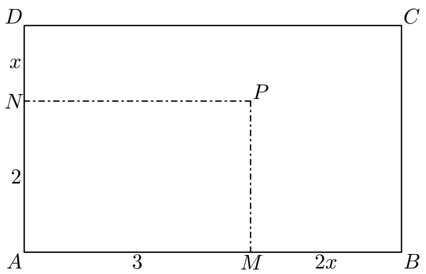
Résoudre les équations suivantes :

a. $-2x^2+2x+4=0$ b. $2{\cdot}x^2-4{\cdot}x+2=0$

Exercice 7170

On note x une mesure indéterminée. On considère le rectangle $ABCD$ représenté ci-dessous où :

$AM=3$; $MB=2x$; $AN=2$; $ND=x$



1. Dans le cas particulier où $x=2$, déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle $ABCD$ a mesure 28.

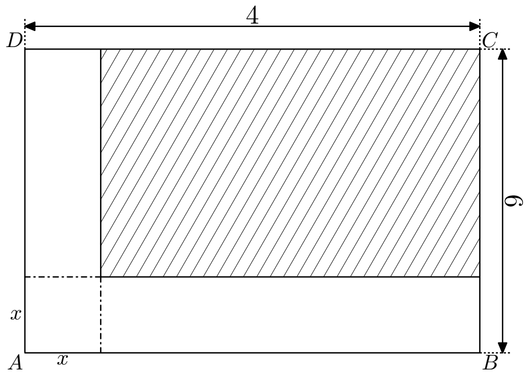
2. On se place dans le cas général où x représente un nombre indéterminé :

   a. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle $ABCD$ a pour valeur :
   $\mathcal{A}=2{\cdot}x^2+7{\cdot}x+6$

   b. Déterminer la ou les valeurs de x afin que l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle $ABCD$ a pour valeur 36.

Exercice 7171

On note x une mesure indéterminée et on considère le rectangle $ABCD$ de dimensions 6 et 4 représenté ci-dessous :



où un rectangle, domaine représenté rayé, obtenue en réduisant les dimensions de $ABCD$ de x.
On note $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle représenté rayé.

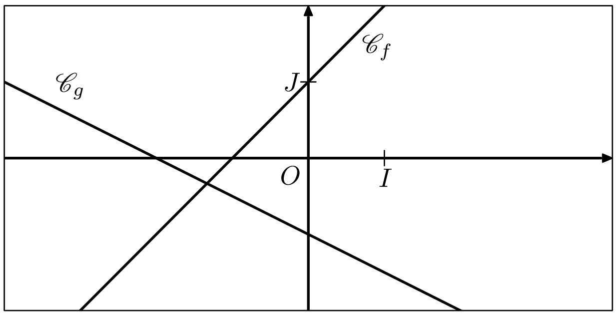
1. Démontrer que l'aire $\mathcal{A}$ s'exprime par :
$\mathcal{A}=x^2-10\cdot x+24$
2. Déterminer la valeur de x afin que $\mathcal{A}$ ait pour valeur 8.

6. Rappels sur les tableaux de signes :

Exercice 7173

on considère les deux fonctions f et g définies par :
$f(x) = x+1 \quad ; \quad g(x) = -0{,}5\cdot x - 1$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ donné ci-dessous, sont représentés les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.



Sans justification, compléter les tableaux de signes des fonctions f et g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		

Exercice 7172

Compléter le tableau de signe de chacunes des expressions E :

1.

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$			0	
$3+x$		0		
$E=(2x+1)(3+x)$		0	0	

2.

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
$x-2$				
$4x-3$				
$E=(x-2)(4x-3)$				

3.

x	$-\infty$	$+\infty$
$2+x$		
$2-x$		
$E=(2+x)(2-x)$		

7. Tableau de signes :

Exercice 7174

Le tableau de signe d'un polynôme du second degré dépend du signe du coefficient du terme du second degré et du signe du discriminant.
Les six possibilités sont représentées ci-dessous :

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$ α et β sont les deux racines
$a>0$	x: $-\infty$ … $+\infty$ Signe: $+$	x: $-\infty$ $-b/2a$ $+\infty$ Signe: $+$ 0 $+$	x: $-\infty$ α β $+\infty$ Signe: $+$ 0 $-$ 0 $+$
$a<0$	x: $-\infty$ … $+\infty$ Signe: $-$	x: $-\infty$ $-b/2a$ $+\infty$ Signe: $-$ 0 $-$	x: $-\infty$ α β $+\infty$ Signe: $-$ 0 $+$ 0 $-$

Dresser le tableau de signe de chacune des expressions suivantes :

a. x^2+x-6 b. $2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+1$

c. $3x^2+3x-6$ d. $-x^2+x+2$

e. $-2x^2+12x-18$ f. $3x^2-5x-2$

Exercice réservé 7175

Dresser le tableau de signes des expressions suivantes :

a. $2{\cdot}x^2+3{\cdot}x-5$ b. $6{\cdot}x^2+x-1$

c. $-2{\cdot}x^2+4x+6$ d. $-3{\cdot}x^2-3{\cdot}x-1$

8. Inéquations :

Exercice 7198

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2-3x+2>0$ b. $x^2-x-2<0$

c. $-9x^2+12x-4\leqslant 0$ d. $5x^2+4x-1<0$

e. $-4x^2+2x+2\geqslant 0$ f. $-x^2+x-3>0$

Exercice réservé 7199

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2+5x+4<0$ b. $-x^2-x+6<0$

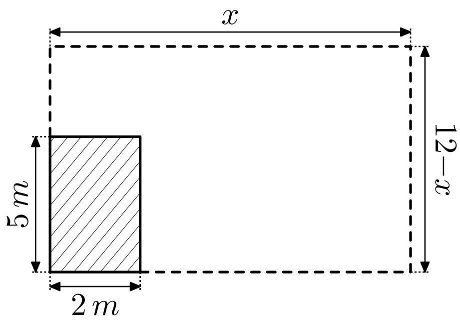
c. $4x^2+4x+1>0$ d. $-2x^2+5x+3>0$

e. $4x^2-3x+2\leqslant 0$ f. $12x^2+12x+3\leqslant 0$

9. Problèmes :

Exercice 7200

Dans son champ, un agriculteur possède un poulailler de forme rectangulaire et de dimensions $5\,m$ et $2\,m$. Il souhaite construire un enclos *(représenté en pointillée)* comme l'indique la figure ci-dessous avec $17\,m$ de clôture :



Le poulailler est représenté par la partie hachurée, la clôture est représentée en pointillés et la partie extérieure dédiée aux poules est représentée par la partie blanche.

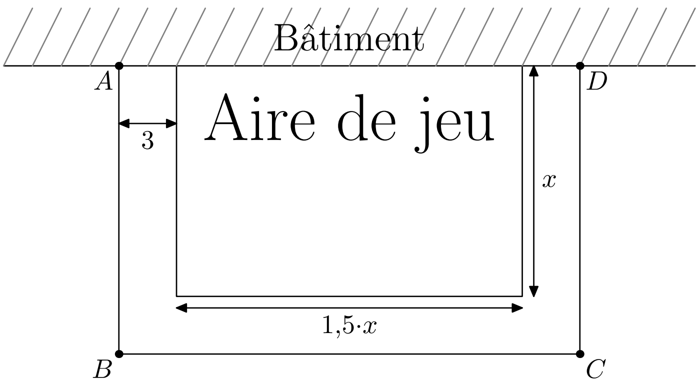
On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie extérieure.

1. Justifier que l'aire $\mathcal{A}$ de l'espace extérieur a pour expression : $\mathcal{A}(x)=-x^2+12{\cdot}x-10$

2. Pour quelles valeurs de x, l'espace extérieure a une aire de $25\,m^2$.

Exercice 7201

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à $10\,m$. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allée de $3\,m$ de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



1. Exprimer l'aire totale du terrain *(en incluant les allées)*.

2. Pour quelle valeur de x, l'aire $\mathcal{A}$ mesure $84\,m^2$.

