# Première S/Concours olympiades

## 1. Appréhender une nouvelle définition :

**Exercice 5940**

Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n=24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2+4=6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre de Harshad.

   b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad?

2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

   b. Soit $n$ un entier non nul. Donner un nombre Harshad de $n$ chiffres.

**Exercice 5941**

A partir de deux nombres entiers positifs, on construit une liste de nombres où chaque nombre est la somme des deux précédents.

1. Choisir deux nombres entiers positifs inférieurs à 10 et déterminer les dix premiers nombres de la liste définie précédemment.

2. Un mathé-magicien prétend être capable de déterminer rapidement et exactement la somme des dix premiers nombres d'une liste quelconque ainsi construite. Montrer que, quels que soient les nombres de départ, cette somme est multiple d'un des nombres de la liste dont on déterminera la position.

**Exercice 5982**

Une calculatrice défectueuse permet seulement :
- de taper des nombres positifs ou nuls ;
- de faire l'opération suivante : à partir de trois nombres entrés successivement $(x\,;y\,;z)$, elle affiche 0 si $x=y$ et le résultat de $\dfrac{z}{x-y}$ sinon.
$$(x\,;y\,;z) \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{z}{x-y} & \text{si } x\neq y \\ 0 & \text{si } x=y \end{cases}$$
- l'utilisation des parenthèses qui permet de composer des calculs.

1. En détaillant les calculs, vérifier les résultats suivants donnés par la calculatrice :
$$(0\,;1\,;2)\longmapsto -2 \quad ; \quad \big((2\,;0\,;1)\,;1\,;1\big)\longmapsto -2$$

2. Que donne $(2\,;0\,;1)$, $(0\,;2\,;1)$ et $\big(2\,;1\,;\,(2\,;1\,;2)\big)$?

3. Donner un calcul permettant d'obtenir $-1$.

4. Vérifier que le calcul $(a\,;0\,;1)$ permet d'obtenir l'inverse de $a$ pour tout $a>0$.

5. Proposer un calcul permettant de faire la division de deux nombres positifs : $\dfrac{a}{b}$ avec $a\geqslant 0$ et $b>0$.

6. Proposer un calcul permettant de faire la multiplication de deux nombres positifs : $a\times b$ avec $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 0$.

**Exercice 8128**

**Mesures d'angles à peu près**

On dit qu'un triangle $ABC$ est à peu près rectangle en un sommet $A$ si la mesure de l'angle en $A$ est dans l'intervalle $\big[75^o\,;105^o\big]$. On dit qu'un triangle $ABC$ est à peu près isocèle en un sommet $A$ si les mesures des angles en $B$ et en $C$ diffèrent de $15^o$ au maximum.

1. a. Un triangle rectangle est-il à peu près rectangle? Un triangle isocèle est-il à peu près isocèle.

   b. Un triangle peut-il être rectangle en deux sommets? A peu près rectangle en deux sommets? Le cas échéant, quant il est en plus acutangle *(c'est à dire que tous ses angles sont aigus)*, est-il à peu près isocèle?

2. Existe-t-il un triangle acutangle qui ne soit ni à peu près rectangle, ni à peu près isocèle?

3. Ecrire un programme *(en langage naturel ou calculatrice)*, à recopier sur votre copie, testant si un triangle $ABC$ dont on connaît les trois angles $A$, $B$ et $C$ est à peu près isocèle.

**Mesures de longueurs à peu près**

Dans cette partie, on suppose qu'une unité de longueur a été donnée dans le plan, et on adopte les définitions suivantes :

- Deux points sont à peu près égaux si leur distance est inférieure ou égale à 0,1 ;
- Deux segments sont à peu près de même longueur si leurs longueurs diffèrent de 0,1 ou moins ;
- Un triangle est à peu près équilatéral si les longueurs de ses côtés diffèrent, deux à deux, de 0,1 ou moins.

1. a. Un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure *(exactement)* 1 peut-il être à peu près équilatéral?

   b. Un triangle rectangle peut-il être à peu près équilatéral?

2. On considère un cercle, de centre $O$ de rayon *(exactement)* 2 et deux points de ce cercle : $A$, fixe, et $B$, mobile.
On appelle $I$ le milieu du segment $[OA]$ et $H$ le projeté orthogonal de $B$ sur la droite $(OA)$.

   a. Représenter sur une figure l'ensemble des points $B$ pour lesquels $H$ et $I$ sont à eu près égaux. En calculer la longueur *(le résultat sera donnée arrondi au centième)*.

   b. Si $H$ et $I$ sont à peu près égaux, le triangle $AOB$ est-il à peu près équilatéral?

# 2. Arithmétique :

## Exercice 5942

1. (a.) En partant de 12 589 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 12 705?

   (b.) En partant de 1 485 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 310 190?
   Expliquer votre démarche.

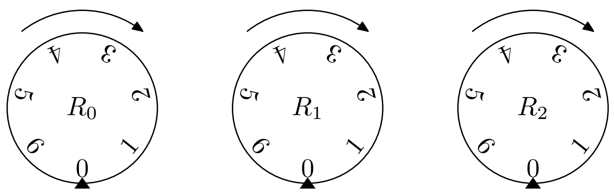
2. Quel est le plus petit entier positif à partir duquel, en comptant de 29 en 29, on peut atteindre 2013?

3. Existe-t-il des entiers positifs inférieurs à 2 013 à partir desquels il est possible d'atteindre ce nombre aussi bien en comptant de 29 en 29 qu'en comptant de 31 en 31?
   Si oui, les trouver tous.

## Exercice 5943

Un compteur est composé de trois roues crantées, nommées $R_0$, $R_1$ et $R_2$ comportant toutes les trois 7 crans, numérotés de 0 à 6. Ce compteur est conçu de sorte que :

- Les roues tournent toujours d'un cran vers le cran suivant, dans cet ordre :
  $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 0$
- Lorsque la roue $R_0$ effectue un tour complet, c'est à dire lorsqu'elle tourne de 7 crans alors la roue $R_1$ tourne d'un cran.
- Lorsque la roue $R_1$ effectue un tour complet, c'est à dire lorsqu'elle tourne de 7 crans, alors la roue $R_2$ tourne d'un cran.
- Initialement, les roues $R_0$, $R_1$ et $R_2$ affichent toutes 0.




*Entre chaque question, le compteur est remis à zéro, c'est-à-dire que chaque roue affiche de nouveau* 0

1. On tourne la roue $R_0$ de 15 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues?

2. On tourne la roue $R_0$ de 100 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues?

3. On tourne la roue $R_0$ jusqu'à ce que la roue $R_2$ affiche 5 pour la première fois. De combien de crans a-t-on tourné $R_0$?

4. De combien de crans faut-il tourner $R_0$ pour que les roues reviennent pour la première fois en même temps à 0?

5. On tourne la roue $R_0$ de 3580 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues?

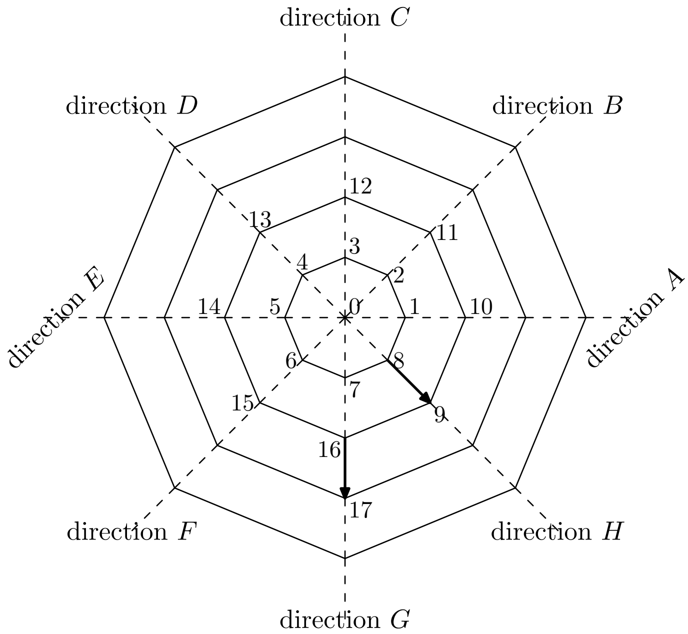
## Exercice 5968

On considère des octogones réguliers, de même centre $O$.
Aux sommets de l'octogone central, on note les huits premiers entiers non nuls.
Sur les sommets du deuxième octogone, on inscrit les 8 premiers nombres entiers suivants, avec une rotation de 45 degrés autour du point $O$.

Et ainsi de suite...

On dit que chaque nombre entier a une direction *($A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ ou $H$ par rapport à l'origine $O$).*
Par exemple, 1 a pour direction $A$, 2 a pour direction $B$...

Voici une figure représentant les quatre premiers octogones :




1. Quel sera le premier entier inscrit sur le quatrième octogone? Préciser sa direction.

2. Déterminer le premier entier inscrit sur le huitième octogone. Préciser sa direction.

## Exercice 5984

On part d'un entier $n$ strictement positif :

- Si $n$ est pair, on le transforme en $\dfrac{n}{2}$
- Si $n$ est impair $(n>1)$, on le transforme en $3n+1$.
- Si $n=1$, on s'arrête.

Exemples :

- Si $n=6$, on obtient la suite :
  $6 \longmapsto 3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
- Si $n=13$, on obtient la suite :
  $13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$

Il a été observé à l'aide d'un programme sur ordinateur, que pour chaque nombre entier testé, la suite aboutit toujours à 1. Mais ce résultat n'a pas été démontré à ce jour.

On peut par ailleurs, s'intéresser à la longueur de cette suite, qu'on notera $L(n)$.
Par exemple : $L(6)=9$ et $L(13)=10$.

1. Déterminer $L(n)$ pour les entiers allant de 1 à 12.

2. Soit $p$ un entier, on considère l'entier $n=2^p$.
   Exprimer $L(n)$ en fonction de $p$.

3. Trouver un nombre entier $n$ compris entre $2^{2008}$ et $2^{2009}$ tel que :
   $L(n)=2012$.
   *Indication : On pourra chercher un nombre de la forme* $2^p \times q$.

4. Soit $k$ un entier non nul.

a. Montrer que : $L(8k+4) = L(6k+4)+3$.

b. De même, montrer que : $L(8k+5) = L(6k+4)+3$.

c. Montrer que : $L(16k+2) = L(16k+3)$

**Exercice 8129**

Un ensemble $S$ de rationnels est un ensemble arithmétique *(en abrégé EA)* si pour tout couple $(a\,;b)$ avec $a$ et $b$ appartenant à $S$, il existe un élément $c$ de $S$ tel que l'un des nombres $a$, $b$ ou $c$ est la moyenne arithmétique *(c'est-à-dire la demi-somme)* des deux autres. On souhaite déterminer tous les entiers $n$ strictements positifs pour lesquels il existe un EA ayant $n$ éléments.

1. a. Les ensembles suivants sont-ils des EA? Justifier.
   - $S_1 = \{0\,;1\,;2\}$
   - $S_2 = \{0\,;1\,;2\,;3\}$
   - $S_3 = \{0\,;1\,;2\,;4\}$
   - $S_4 = \left\{\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\,;2\,;\frac{5}{2}\,;\frac{7}{2}\right\}$

   b. Démontrer qu'il n'existe pas d'EA à 2 éléments. Que dire des singletons *(ensemble à un seul élément)*?

   c. Donner un EA ayant 5 éléments, inclus dans l'intervalle $[0\,;2]$, et contenant 0, 1, 2.

2. a. Outre $\frac{a+b}{2}$, quels sont les deux autres rationnels à envisager pour vérifier qu'un couple $(a\,;b)$ d'éléments de $S$ ne fait pas échec à la définition d'un EA?

   b. On désire écrire un algorithme qui teste si un ensemble est un EA. L'ensemble $S$ est décodé sous la forme d'une liste $S = [S[1],\ldots,S[n]]$ de taille $n$. Par exemple la moyenne arithmétique du $i^{\text{ième}}$ et du $j^{\text{ième}}$ élément de $S$ s'écrit $Se(S[i]+S[j])/2$.

   On dispose de plus d'une fonction `Appartient(r,S)` qui renvoie `Vrai` lorsque le rationnel $r$ appartient à la liste $S$ et `Faux` sinon.

   Compléter le squelette de la fonction ci-dessou *(à recopier sur sa feuille de composition)* pour qu'elle renvoie `Vrai` si, et seulement si, $S = [S[1],\ldots,S[n]]$ est un ensemble arithmétique de longueur $n$.

```
fonction TesterEA(S=[S[1],...,S[n]],n)
  Resultat ← Vrai
  Pour i de 1 à n
    Pour j de 1 à n
      [...]
    Fin Pour
  Fin Pour
  Renvoyer(Resultat)
```

   c. Modifier la fonction pour qu'elle réalise moins d'opérations dans le cas général *(à recopier sur sa feuille de composition)*.

## 3. Equations et algèbre :

**Exercice 5971**

Calculer la somme suivante sans utiliser la calculatrice :

$$\begin{aligned}&(1^2-2^2-3^2+4^2)+(5^2-6^2-7^2+8^2)\\&\quad+(9^2-10^2-11^2+12^2)\\&\quad+\cdots+(2009^2-2010^2-2011^2+2012^2)\end{aligned}$$

**Exercice 5976**

1. $L$, $S$ et $V$ étant trois nombres réels positifs, montrer que les triplets $(a\,;b\,;c)$ solutions du système :
$$\left\{\begin{aligned}a+b+c&=L\\ab+ac+bc&=S\\abc&=V\end{aligned}\right.$$
sont tels que $a$, $b$ et $c$ sont les solutions de l'équation :
$X^3-L\cdot X^2+S\cdot X-V=0$

2. Déterminer les dimensions d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes ses arêtes est de $20\,cm$, la somme des aires des six faces est de $14\,cm^2$ et dont le volume est de $3\,cm^3$.

3. Quels sont les volumes minimum et maximum d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes les arêtes est de $20\,cm$, la somme des aires des six faces est de $14\,cm^2$.

## 4. Géométrie :

**Exercice 5969**

$A$ et $B$ sont deux points d'un cercle de centre $O$ et de rayon 5 tels que $AB=6$.

Le carré $PQRS$ est inscrit dans le secteur angulaire $OAB$ de sorte que :

- $P$ est sur le rayon $[OA]$ ;
- $S$ est sur le rayon $[OB]$ ;
- $Q$ et $R$ sont deux points de l'arc de cercle reliant $A$ et $B$.

1. Faire une figure correspondant à la situation proposée.

2. Calculer l'aire du carré $PQRS$.

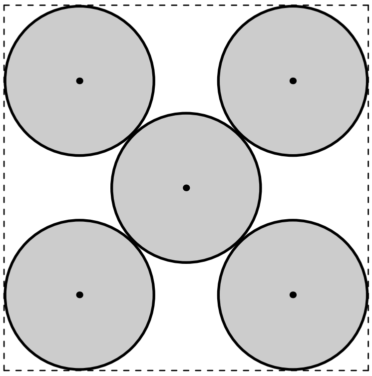
**Exercice 5975**

Cinq cercles de rayon $1\,cm$ ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin.

Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré.

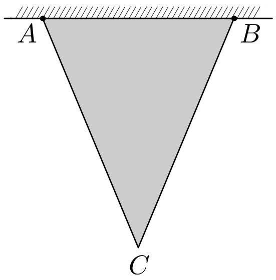
Déterminer la longueur d'un côté du carré.



### Exercice 5977

Un fermier dispose d'un grand terrain le long d'un mur et d'un grillage. Le long de ce même mur, il veut réaliser un poulailler sous la forme d'un triangle isocèle de sommet $C$. Le grillage ne sera pas posé contre le mur.

Quelle est l'aire maximale du poulailler sachant que le grillage a une longueur de $88\,m$?

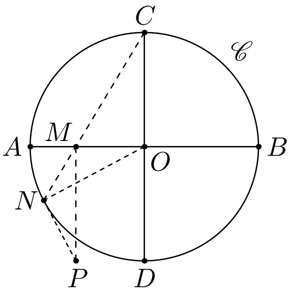



*(On pourra utiliser l'angle au sommet et le fait que* $\sin\theta\cdot\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{2}$*)*

### Exercice 5980

On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre $O$ et deux diamètres perpendiculaires $[AB]$ et $[CD]$. $M$ étant un point du segment $[AB]$, on trace $(CM)$ qui recoupe le cercle en $N$. La tangente en $N$ au cercle et la perpendiculaire en $M$ à $(AB)$ se coupent en $P$. Montrer que :

$OP = CM$.




### Exercice 8167

L'atelier de métallerie d'un chantier naval découpe des pièces de formes diverses dans des plaques d'acier carrées qu'il commande au laminoir.

Pour limiter les pertes de matière et donc les coûts de production, le chef d'atelier doit déterminer au préalable la taille des plaques carrées qu'il doit commander en fonction des pièces à découper.

Il arrive pour certaines commandes, que seuls la forme et la surface des pièces à découper leurs soient transmises.

Dans chacune des trois parties suivantes, on étudie la découpe de certains types de pièces.

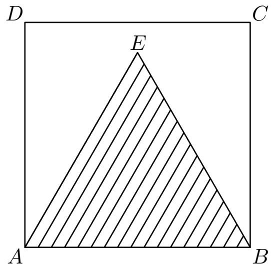
Ces parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

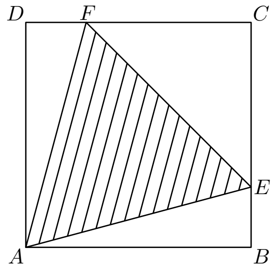
*On arrondira au besoin les longueurs au mm près, et les surfaces au $cm^2$ près.*

**Partie 1 : Découpe de pièces triangulaires**

L'atelier doit produire une pièce qui a la forme d'une triangle équilatéral d'une surface de $20\,m^2$.

Le chef d'atelier envisage deux solutions de découpe comme illustré sur les schémas suivants :




On note $a$ le côté du triangle et $c$ le côté du carré.

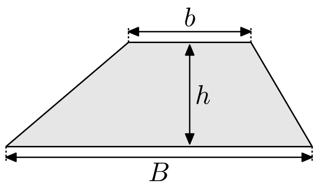
1. **Schéma n$^o$1 :**
   a. Exprimer la hauteur $h$ en fonction de $a$.
   b. En déduire le côté $a$ du carré à construire pour respecter les contraintes.
   c. Calculer la surface d'acier perdue avec cette méthode.
2. **Schéma n$^o$2 :**
   a. Justifier que l'angle $\widehat{BAE}$ mesure $15^o$.
   b. En déduire le côté $c$ du carré qu'il doit commander.
   c. Calculer la surface d'acier perdue avec cette méthode.
   d. Quel est le pourcentage d'acier gagné par rapport à la première prooposition de découpe?

## 5. *Géométrie et algèbre :*

### Exercice 5967

Rappel : Aire d'un trapèze

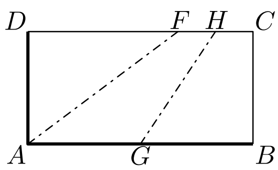
$$A = \frac{(B+b)\times h}{2}$$



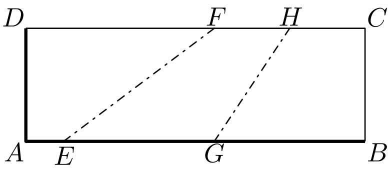

Une pizza rectangulaire $ABCD$ comporte de la croûte sur deux côtés consécutifs, $[DA]$ et $[AB]$. **On cherche comment partager la pizza en trois morceaux équitables** : chaque part doit avoir la même longueur de croûte et la même aire.

Dans chaque situation, on fixe la longueur du petit côté $AD$=1.

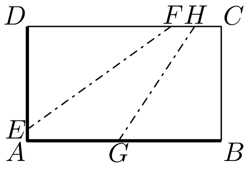
1. Dans le cas particulier ci-contre, on suppose que le partage réalisé est équitable.
   Quelle est la longueur $AB$?
   Déterminer les longueurs :
   $DF$, $FH$ et $HC$.




2. On généralise la situation en posant $AB$=$L$ *(et en supposant toujours que $AD$=1)*.
   Déterminer, pour chaque situation ci-dessous, les longueurs utiles permettant de découper équitablement la pizza.



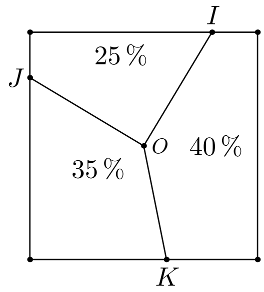
situation 1 : $L>2$



situation 2 : $L<2$

**Exercice 5970**

Dans un carré de $10\,cm$ de côté, on veut réaliser un graphique statistique dans lequel les aires des 3 parties doivent être proportionnelles aux fréquences qu'elles représentent *(O est le centre du carré).*
Le point $I$ est à $2\,cm$ du sommet le plus proche.

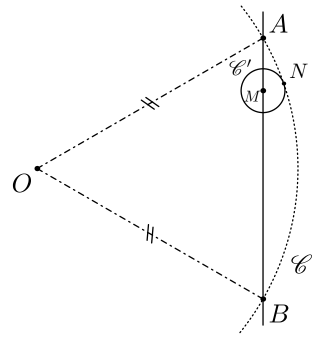



Calculer les distances de $J$ et $K$ aux sommets du carré les plus proches.

**Exercice 5978**

On considère un triangle $OAB$ équilatéral. On note $R$ la mesure des côtés du triangle $OAB$.
On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre $O$ passant par le point $A$.

Soit $x$ un nombre réel tel que $0<x<\dfrac{R}{2}$. On place le point $M$ sur le segment $[AB]$ vérifiant :
$AM=x$.



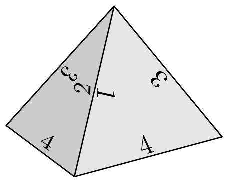

On considère le cercle $\mathscr{C}'$ de centre $M$ et tangent au cercle $\mathscr{C}$ au point $N$.

Exprimer le rayon du cercle $\mathscr{C}'$ en fonction de $R$ et de $x$.

# 6. *Probabilité :*

**Exercice 5983**

Un dé tétraèdrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre. Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraédrique est tombé sur la face 4.




Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraédriques réguliers et équilibrés mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6. Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$ et le nombre 6 avec la probabilité $\dfrac{3}{4}$.

- Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5 ;
- celui de Cyril 3, 3, 3 et 8 ;
- et enfin, celui de dianne 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette ce dé tétraédrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6?
2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cyril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.
   a. Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\dfrac{3}{4}$.
   b. Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.
3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.
   a. Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\dfrac{3}{32}$.
   b. Qui a le plus de chances de gagner ce jeu?

**Exercice 8130**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $n$ boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
On dit que le jeu est équitable lorsque la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne est égale à $\dfrac{1}{2}$.

1. a. Démontrer que si l'urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges alors $\mathcal{P}(G)=\dfrac{7}{15}$.
   b. Calculer $\mathcal{P}(G)$ lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 blanches, 6 rouges et 2 noires.
2. Dans cette question, l'urne contient 6 boules rouges et d'autres boules qui sont toutes blanches.
   a. Soit $x$ le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
   Démontrer que : $\mathcal{P}(G)=\dfrac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$
   b. Combien faudrait-il de boules blanches pour que le jeu soit équitable?
3. Dans cette question, l'urne ne contient que des boules de deux couleurs différentes.
   a. On suppose que l'urne présente la configuration $(a\,;b)$, c'est-à-dire qu'elle contient, par exemple, $a$ boules rouges et $b$ boules blanches. Démontrer que le jeu est équitable lorsque $n=(a-b)^2$
   b. Réciproquement, démontrer que si $n$ est le carré d'un entier $p$ alors il existe deux entiers naturels $a$ et $b$ avec

$a \geqslant b$ que l'on exprimera en fonction de $p$ tels que la configuration $(a\,;b)$ conduise à un jeu équitable.

c. Donner six couples $(a\,;b)$ conduisant à un jeu équitable.

## 7. Annales toutes séries :

### Exercice réservé 5929

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

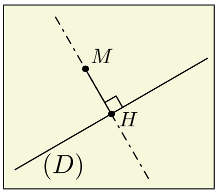
- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 3.

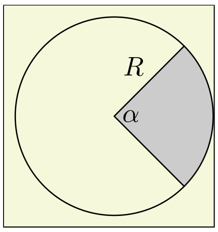
1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2. a. Donner tous les diviseurs à un chiffre du nombre 1000.
   b. En déduire un nombre *digisible* à quatre chiffres.
3. Soit $n$ un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
   a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   b. Démontrer que tous les chiffres de $n$ sont impairs.
   c. Démontrer que $n$ s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

### Exercice réservé 5930

On appelle ***distance entre un point*** $M$ ***et une droite*** $(D)$ la distance $MH$, où $H$ est le point d'intersection de $(D)$ avec la droite perpendiculaire à $(D)$ passant par $M$.

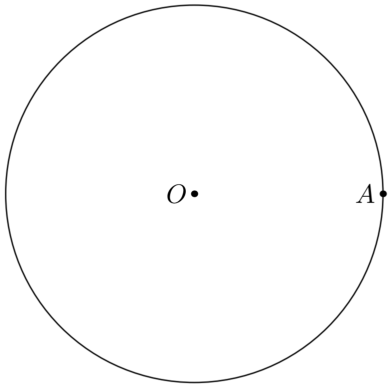



Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est $R$, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure $\alpha$ *(en degrés)*, alors l'aire de la portion de disque grisée vaut : $\dfrac{\pi \cdot \alpha \cdot R^2}{360}$.
Dans la partie **2** de l'exercice, on considérera la distance d'un point $M$ à un segment $[BC]$ comme étant la distance du point $M$ à la droite $(BC)$.




**Partie 1**

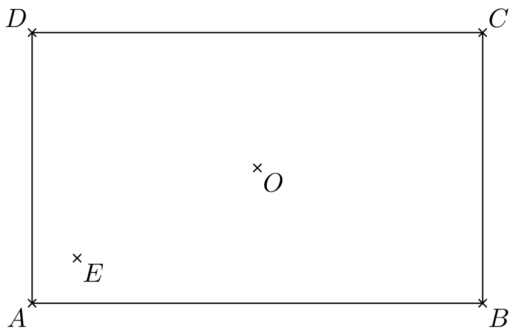
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$, $A$ un poin de ce cercle et $\mathcal{D}$ le disque délimité par ce cercle.




1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de $O$ et de $A$.
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de $O$ que de $A$.
3. Soit $M$ un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque $\mathcal{D}$.
   Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche de $O$ que de $A$?

**Partie 2**

Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AB = 20\,cm$ et de largeur $BC = 12\,cm$, de centre $O$.
Soit $E$ un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de $A$, à $2\,cm$ de chaque bord *(comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle)*.
Soit $M$ un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle $ABCD$.




1. Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche du côté $[BC]$ que du côté $[AD]$?
2. a. Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés $[AB]$ et $[BC]$.
   b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côtés $[BC]$ que du côté $[AB]$.
   c. Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche du côté $[BC]$ que du côté $[AB]$?
3. Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche du côté $[AB]$ que des trois côtés $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$?
4. Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche de $O$ que de 2?
5. Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche de $O$

que des quatre sommets $A$, $B$, $C$ et $D$?

## Exercice réservé 5931

### I. Un premier algorithme

Voici un algorithme applicable à des nombres entiers de trois chiffres dont le chiffre des centaines n'est pas égal à celui des unités :

| | |
|---|---|
| *Etape 1 :* | Inverser l'ordre des chiffres *(par exemple* 275 *devient* 572*)* |
| *Etape 2 :* | Calculer la différence du plus grand et du plus petit de ces deux nombres. |
| *Etape 3 :* | Ré-itérer l'étape 1 sur le nombre obtenu. |
| *Etape 4 :* | Additionner ces deux derniers nombres |

1. a. Appliquer l'algorithme aux nombres 123, 448 et 946.

   b. Que peut-on conjecturer?

2. Pour implémenter cet algorithme, l'étape 2, implicite lorsqu'on effectue les calculs "*à la main*", nécessite de dissocier l'entier saisi : d'en isoler le chiffre des unités, celui des dizaines puis celui des centaines.

   Compléter la fonction suivante, issue d'un algorithme, dont l'argument `n` est un entier naturel à 3 chiffres et dont le rôle est d'effectuer cette dissociation. Pour cette fonction, $a$ est le chiffre des centaines, $b$ celui des dizaines et $c$ celui des unités du nombre $n$ que l'on souhaite décomposer.

```
Fonction f(n)
    a ← 0
    b ← 0
    c ← 0
    Tant que n⩾100
        a ← a+1
        n ← n−100
    Fin Tant que
    Tant que n......
        b ← ......
        ......  ← ......
    Fin Tant que
    c ← ......
    Renvoyer (a ; b ; c)
```

3. On se propose maintenant de démontrer la conjecture établie en 1. b..
   Pour cela, on choisit un nombre de trois chiffres que l'on écrit $abc$ où $a$, $b$ et $c$ sont donc des entiers compris entre 0 et 9 et représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de $n$.
   On peut, sans perdre de généralité, supposer $a<c$

   a. Décomposer $abc$ selon les puissances de 10.

   b. Donner le nombre obtenu après l'étape 1 sous sa forme décomposée.

   c. Montrer que le nombre obtenu après l'étape 2 peut s'écrire :
   $(c-a-1)\times 100+9\times 10+10+a-c$

   d. Appliquer les étapes 3 et 4 et conclure.

### II. L'algorithme de Kaprekar

En mathématiques, l'algorithme de Kaprekar est un algorithme découvert en 1949 par le mathématicien indien D.R. Kaprekar pour les nombres entiers de quatre chiffres, mais qui peut être généralisé à tous les nombres entiers. Nous l'étudierons ici pour des nombres entiers de trois chiffres, tous ces chiffres étant distincts.
L'algorithme de Kaprekar consiste à associer à un nombre entier quelconque $n$ un autre nombre $K(n)$ généré de la façon suivante :

| | |
|---|---|
| *Etape 1 :* | A partir des chiffres qui composent $n$, former le plus grand nombre possible. On le note $G$ |
| *Etape 2 :* | A partir des chiffres qui composent $n$, former le plus petit nombre possible. On le note $P$ |
| *Etape 3 :* | $K(n)$ est alors égal à la différence $G-P$ |

Par exemple, partant de 539, on a : $G=953$ et $P=359$.
Donc : $K(539)=953-359=594$.

1. a. Calculer $K(198)$, $K(357)$ et $K(495)$.

   b. Ecrire un algorithme dont l'entrée est un nombre $n$ à trois chiffres tous distincts et dont la sortie est $K(n)$. Pour la séparation des chiffres des unités, des dizaines et des centaines, on pourra reprendre l'algorithme de la partie **I**.

   c. Appliquer l'algorithme de Kaprekar en partant du nombre 198 et en l'itérant autant de fois que nécessaire. Recommencer avec d'autres nombres à trois chiffres tous distincts. Que peut-on conjecturer?

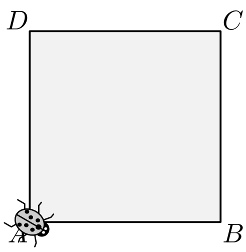
2. On se propose de démontrer la conjecture émise à la question 1..
   Pour cela, on choisit un entier $n$ composé de trois chiffres et que l'on écrit $abc$ où $a$, $b$ et $c$ sont donc des entiers tous distincts compris entre 0 et 9 qui représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de $n$.

   a. Expliquer pourquoi on peut, sans perdre des généralité, supposer que $a<b<c$.

   b. Montrer que : $K(n)=99(c-a)$.

   c. Démontrer la conjecture et préciser le nombre maximum d'itérations nécessaires.

## Exercice réservé 5932




Une coccinelle se déplace sur les côtés d'un carré $ABCD$ en partant du point $A$. Elle peut marcher à rebours si elle le souhaite.
On appelle déplacement tout trajet de la coccinelle le long d'un côté du carré. Une marche est constituée de déplacements, ainsi :
$A\longrightarrow B\longrightarrow A\longrightarrow D\longrightarrow C$
est une marche de quatre déplacements dont l'arrivée est le point $C$.

### Partie A

Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés d'un carré $ABCD$ et l'on considère sont équiprobables.

1. a. La coccinelle peut-elle atteindre le point $B$ en trois déplacements?

   b. Quelles sont les arrivées possible pour une marche de trois déplacements?

   c. Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre pair de déplacements?

   d. Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre impaire de déplacements?

2. Dans cette question, la coccineelle effectue deux déplacements.
Eventuellement à l'aide d'un arbre, calculer la probabilité de l'évènement $A_2$ : "*la coccinelle arrive en A en effectuant deux déplacements*".

3. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

| Nombre de déplacements de la marche | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité que la coccinelle arrive en $A$ | | | | | |

**Partie B**

Dans cette partie, la coccinelle se déplace toujours sur les côtés du carré $ABCD$ en partant du point $A$ mais elle a deux fois plus de chance de se déplacer verticalement qu'horizontalement. Elle peut toujours marcher à rebours si elle le souhaite.
En revanche, elle décide de s'arrêter dès qu'elle revient en $A$.

1. Dans cette question, la coccinelle effectue exactement deux déplacements.
   a. Calculer la probabilité de l'évènement $A_2$ : "*la coccinelle arrive en A en effectuant deux déplacements*".
   b. Calculer la probabilité de l'évènement $C_2$ : "*la coccinelle arrive en C en effectuant deux déplacements*".
2. a. Calculer la probabilité de l'évènement $A_4$ : "*la coccinelle arrive en A en effectuant exactement quatre déplacements*".
   b. Calculer la probabilité de l'évènement $A_6$ : "*la coccinelle arrive en A en effectuant exactement six déplacements*".
3. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à deux.
   a. On note $A_{2n}$ l'évènement : "*la coccinelle arrive en A en effectuant exactement 2n déplacements*" et $\mathcal{P}(A_{2n})$ la probabilité de cet évènement.
   Exprimer $\mathcal{P}(A_{2n})$ en fonction de $n$.

Soit $q$ un nombre réel différent de 1 et $n$ un nombre entier naturel non-nul. On rappelle que :

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

   b. On note $G_{2n}$ l'évènement : "*la coccinelle arrive en A en effectuant au maximum 2n déplacements*". Exprimer en fonction de $n$ la probabilité de $G_{2n}$ notée $\mathcal{P}(G_{2n})$.
   c. Quel est le plus petit entier $n$ tel que :
   $\mathcal{P}(G_n)\geqslant 0{,}9999$?

### Exercice 5938

On suppose qu'il existe une fonction $f$ définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété :
$(E)$ : pour tous $x$ et $y$ de $\mathbb{N}$, $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-x\cdot y$

**Préliminaire**

Démontrer que $f(0)=1$. On pourra admettre les résultats dans les parties suivantes.

**A. Etude d'un premier exemple** :
On suppose ici que : $f(1)=3$.

1. Calculer $f(2)$ puis $f(3)$.
2. Montrer par deux calculs distincts que $f(4)=60$ et que $f(4)=63$. Conclure.

**B. Etude d'un second exemple** :
On suppose ici que : $f(1)=0$.

1. Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.
2. Conjecturer l'expression de $f(n)$ en fonction de $n$.
3. Démontrer cette conjecture.
4. Prouver que pour la fonction trouvée aux 2. et 3. la propriété $(E)$ est bien vérifiée.

**C. Cas général**

***Première partie*** : on note $f(1)=a$

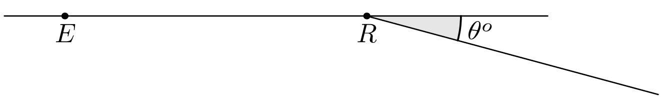
1. Exprimer $f(2)$ et $f(3)$ en fonction de $a$.
2. Exprimer $f(4)$ en fonction de $a$ de deux manières différentes.
3. En déduire que : $a=0$ ou $a=2$.

***Seconde partie*** : on étudie le second cas :
On suppose ici que : $f(1)=2$.
Exprimer $f(n)$ en fonction de $n$.

## 8. Annales série S :

### Exercice réservé 5934

Pierre et sa fille Eloïse se promènent sur une route horizontale. En un point $R$, cette route descend faisant un angle $\theta$ de $5^o$ avec l'horizontal *(voir figure)*

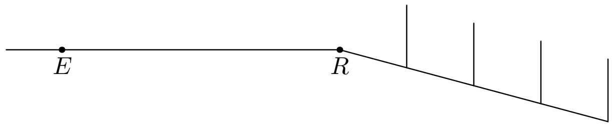



Eloïse, dont les yeux sont à 1,6 mètre du sol, s'arrête en un point $E$, à 24 mètres du point $R$.

Son père continuant à marcher, passe devant le point $R$ puis s'engage dans la partie en pente de la route.

1. Quand il se trouve à 86 mètres de $R$, il disparaît des yeux de sa fille.
Déterminer la hauteur de Pierre.
2. Dans la partie en pente de la route, des poteaux d'une hauteur de 6,5 mètres sont plantés verticalement tous les 28 mètres, comme sur le schéma ci-dessous




Le pied du premier poteau se situe à 28 mètres du point $R$.
On admet l'hypothèse que les poteaux ne peuvent se masquer les uns des autres.

Combien Eloïse peut-elle voir de poteaux de l'endroit où elle se trouve?

**3.** Quelle est, en réalité, la mesure de l'angle $\theta$, sachant qu'Eloïse ne voit que 5 poteaux?
On pourra utiliser la formule : $1+(\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$

On donnera une valeur approchée de $\theta$ à $10^{-3}$ près.

## Exercice réservé 5936

Trois entiers naturels distincts $a$, $b$, $c$ **rangés par ordre strictement croissant**, $a<b<c$, sont en progression arithmétique si : $c-b=b-a$

On dit alors que $(a\,;b\,;c)$ est un triplet arithmétique.

**1.** Compléter les triplets arithmétiques suivants :

a. $(57\,;101\,;\ldots)$ b. $(57\,;\ldots\,;101)$

c. $(\ldots\,;57\,;101)$

**2.** a. Peut-on trouver un triplet arithmétique $(a\,;b\,;c)$ dont la somme vaut 2012?

b. Combien y a-t-il de triplets arithmétiques $(a\,;b\,;c)$ de somme 2013?

**3.** On prend au hasard trois nombres entiers $a$, $b$, $c$ dans 1, 2, 3, ..., 10 avec $a<b<c$. Quelle est la probabilité que $(a\,;b\,;c)$ soit un triplet arithmétique?

**4.** On rappelle qu'un entier naturel $p$ est **premier** si $p\geqslant 2$ et si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et $p$.

a. Quels sont les cinq plus petits entiers premiers?

b. Donner un triplet arithmétique $(a\,;b\,;c)$ constitué d'entiers premiers. Ce triplet est-il celui pour lequel la somme $a+b+c$ est minimale? On demande de justifier la réponse. Sinon, trouver les trois entiers premiers $a<b<c$ en progression arithmétique et de somme minimale.

c. Peut-on trouver un triplet arithmétique $(a\,;b\,;c)$ constitué uniquement d'entiers premiers et dont la somme $a+b+c$ vaut 366?

**5.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3. On se donne une liste $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$, d'entiers rangés par ordre strictement croissant. On veut savoir si trois de ses termes consécutifs forment un triplet arithmétique.

a. **Dans cette question uniquement**, la liste est $[1,3,6,10,15,21,27,32,39,45]$. Contient-elle un triplet arithmétique formé de trois termes consécutifs?

b. On revient au cas général d'une liste $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$, d'entiers rangés par ordre strictement croissant. Ecrire un algorithme qui affiche, s'il existe, le premier triplet arithmétique formé de trois termes consécutifs.

c. Avec la calculatrice, programmer puis tester cet algorithme sur la liste $[a_1,a_2,\ldots,a_{20}]$ où, pour $1\leqslant k\leqslant 20$ :

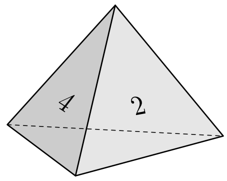
$a_k = -k^3+36k^2+9k$

On ne demande pas de vérifier que cette liste est formée d'entiers naturels rangés par ordre strictement croissant.

## Exercice 8131

On lance deux dés $D_a$ et $D_b$ successivement et indépendamment ; on considère le total de points ainsi ramené et sa probabilité d'apparition. Par exemple, avec deux dés standards à six faces, si le premier jet fournit le 1, et le second le 1 aussi, le total vaudra $1+1=2$, et sa probabilité d'apparition $\dfrac{1}{12}$. L'étude statistique de ces sommes peut intervenir dans certains jeux de hasard, le jeu de l'Oie par exemple.

Jusqu'en question **6**, les dé envisagés sont tétraédriques, comme dans le croquis ci-contre. En question **1** et **2**, leurs quatre faces sont standards, numérotées 1, 2, 3, 4.




**1.** Donner les trois manières d'obtenir pour total 6, en déduire que la probabilité d'obtenir un total de 6 est $\dfrac{3}{16}$.

**2.** Donner les différents totaux que l'on peut ainsi atteindre, puis leurs probabilités d'appartition. Qu'indiquent les coefficients de l'expression polynomiale $P(x)=\left(x+x^2+x^3+x^4\right)^2$ une fois développée? Expliquer.

Pour plus d'originalité, on prend maintenant des dés non standards : un dé $\mathcal{D}_1$ aux faces numérotées 1, 1, 2, 5 et un dé $\mathcal{D}_2$ aux faces numérotées 1, 4, 4, 4.

**3.** Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 6?

De manière générale, le dé $D_a$ a quatre faces dont les valeurs $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ vérifient $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4$ et sont stockées dans un tableau $t_a = \left[a_1,a_2,a_3,a_4\right]$. De même, le dé $D_b$ a quatre faces $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ vérifiant $1\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant b_3\leqslant b_4$ et stockées dans le tableau $t_b = \left[b_1,b_2,b_3,b_4\right]$. On définit les quantités polynomiales :

$A(x) = x^{a_1}+x^{a_2}+x^{a_3}+x^{a_4}$ et $B(x) = x^{b_1}+x^{b_2}+x^{b_3}+x^{b_4}$

Par exemple, les dés de la question **3.** donnent lieu à :

- $t_a = [1,1,2,5]$ • $t_b = [1,4,4,4]$
- $A(x) = 2x+x^2+x^5$ • $B(x) = x+3x^4$

**4.** Déterminer $t_a$, $t_b$, $A(x)$, $B(x)$ attachés aux dés $D_a$ et $D_b$ de faces 1, 2, 2, 3 et 1, 3, 3, 5.

**5.** L'algorithme suivante *(qu'il sera possible d'étendre à de grands dés)* renvoie le coefficient de $x^k$ dans le produit $x^p\left(x^{b_1}+x^{b_2}+x^{b_3}+x^{b_4}\right)$.
Modifier cet algorithme pour qu'il renvoie le coefficient de $x^k$ dans le produit $A(x)\cdot B(x)$ de deux dés à $n$ faces.

Le colonel George Sicherman *(Etats-Unis, XXe siècle)* recherca des couples de dés non-standards $D_a$ et $D_b$ dont les sommes des faces obéissent aux mêmes lois de probabilité que celles de deux dés standards. Voici comment il a pu procéder, d'abord sur des dés à quatre faces.

**1.** On reprend les notations $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4$, $1\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant b_3\leqslant b_4$ et $P(x) = \left(x+x^2+x^3+x^4\right)^2$

a. Justifier que $A(x)\cdot B(x) = P(x)$.

b. Factoriser $x+x^2+x^3+x^4$ en ne faisant apparaître que des quantités de degrés 1 et 2.

c. Que valent $A(0)$, $A(1)$, $B(0)$, $B(1)$?

d. Proposer dès lors une répartition possible et viable des facteurs de $P$ entre $A$ et $B$, définissant un bon couple de dés non standards.

2. Déterminer un couple de dés non standards à 6 faces dont la somme des faces obéit à la même loi de probabilités que celle de deux dés standards *(aux faces :* 1, 2, 3, 4, 5, 6*)*

## *9. Annales séries autres que S :*

### Exercice réservé 5933

Les sextuplés de M et Mme Logic sont dans la même classe de $2^{\text{nde}}$.
A la fin de la journée au cours de laquelle ils ont eu un contrôle de mathématiques, ils rentrent chez eux et présentent à leurs parents les réponses qu'ils ont fournies aux diverses questions

| | Alix | Béa | Carol | Delphine | Emile | Félix |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Question 1 | 150 | 700 | 150 | 100 | 700 | 150 |
| Question 2 | 103 | 101 | 101 | 101 | 103 | 35 |
| Question 3 | 101 | 732 | 107 | 101 | 101 | 107 |
| Question 4 | 34 | 125 | 216 | 28 | 34 | 34 |
| Question 5 | 216 | 216 | 27 | 55 | 25 | 103 |

"Papa, peux-tu nous dire combien nous avons chacun?"

- Je veux bien, mais vous ne m'avez pas donné les questions!
- On ne les a pas, on a dû rendre le sujet avec les réponses.
- Moi, je me rapelle qu'il fallait trouver le plus petit entier premier après 100, dit Béa.
- Il fallait aussi calculer le volume d'un cube dont le côté était un entier, je ne me rappelle plus lequel, rajoute Félix.
- On demandait aussi l'âge du capitaine de je ne sais quel bateau se souvient Carol.
- C'est tout ce que vous vous rappelez, demande le père?
- Oui, mais en regardant rapidement les copies, le professeur nous a dit que l'un d'entre nous avait tout juste... et un autre tout faux!

Au bout d'un moment, leur père leur annonce qu'il connait leurs notes.

Quelles sont ces notes *(chaque réponse juste rapporte* 4 *points)* et quel est l'âge du capitaine? Détailler le raisonnement ayant conduit au résultat.

Un entier premier est un entier strictement positif admettant exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
Les premiers entiers premiers sont :
2 ; 3 ; 5 ; 7...

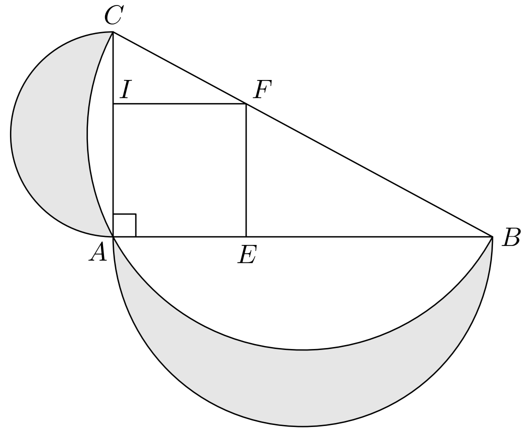
### Exercice réservé 5935

Une association souhaite créer un logo.

Ce logo a été conçu à partir de la construction suivante :

- $ABC$ est un triangle rectangle en $A$,
- on pose : $AC=x$ ; $AB=y$ ; $BC=z$,
- on a tracé les demi-cercles de diamètres $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$ et le carré $AEFI$ tel que $E\in[AB)$, $F\in[BC)$ et $I\in[AC)$.

1. Pour cette question on considère la figure suivante :

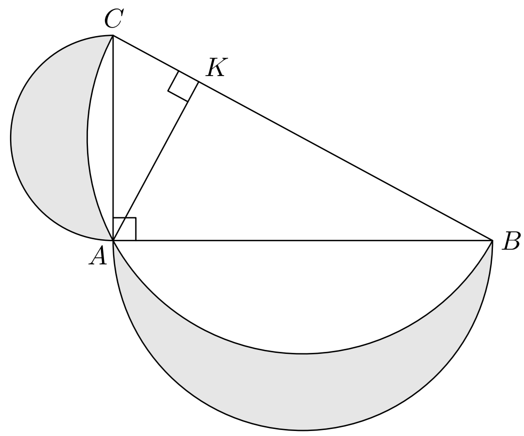



a. Calculer la longueur du côté du carré $AEFI$ en fonction de $x$ et $y$.

b. Que peut-on dire du point $I$ si le triangle $ABC$ est isocèle? *(justifier)*

c. On suppose $y=4$. L'aire du carré $AEFI$ peut-elle être égale à 9? *(justifier)*

2. Soit $K$ le pied de la hauteur issue de $A$ du triangle $ABC$. On pose $AK=h$. On a donc la figure suivante :




a. Justifier que : $(x+y)^2=z^2+2\cdot z\cdot h$.

b. Exprimer de même $(x-y)^2$ en fonction de $z$ et de $h$. Montrer que $h$ est inférieur à la moitié de $z$.

c. Est-il possible que : $z=10$ et $h=4{,}8$?
Si oui, déterminer les valeurs de $x$ et de $y$.

3. Comparer l'aire du triangle $ABC$ à l'aire de la surface grisée.

### Exercice 8132

Pour tous entiers naturels $m$ et $n$, on appelle triangle de $m$ par $n$, et on note $m\Delta n$, le nombre défini par les règles suivantes, dont on admet qu'elles sont possibles :

- $0\Delta n = n+1$
- $n\Delta 0 = (n-1)\Delta 1 \quad$ dès que $n \neq 0$ ;
- $(n{+}1)\Delta(m{+}1) = n\Delta\big((n{+}1)\Delta m\big)$

Attention, $m\Delta n$ n'est pas nécessairement égal à $n\Delta m$.

**Quelques résultats**

1. a. Montrer que : $\quad 1\Delta 0{=}2 \quad$ et $\quad 1\Delta 1{=}3$

   b. Calculer $1\Delta 2$

   c. Plus généralement, déterminer, pour tout entier naturel $n$, la valeur de $1\Delta n$. On pourra poser $u_n{=}1\Delta n$ et vérifier que la suite $(u_n)$ est arithmétique.

2. a. Calculer $2\Delta 0$, $2\Delta 1$ et $2\Delta 2$.

   b. Justifier, que pour tout entier nature $n$ : $\quad 2\Delta n{=}2n{+}3$

3. a. Calculer $3\Delta 0$, $3\Delta 1$ et $3\Delta 2$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $3\Delta n$ est égal à $2^{n+3}{-}3$. On pourra poser $u_n{=}3\Delta n$ et montrer que, pour tout $n$ supérieur ou égal à 1 :
   $u_n = 2{\cdot}u_{n-1} + 3$.

**Illustration de $3\Delta n$**

Un artiste a illustré ainsi les valeurs $3\Delta 0$ et $3\Delta 1$ :

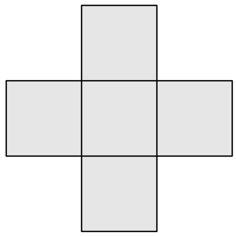


Figure 1

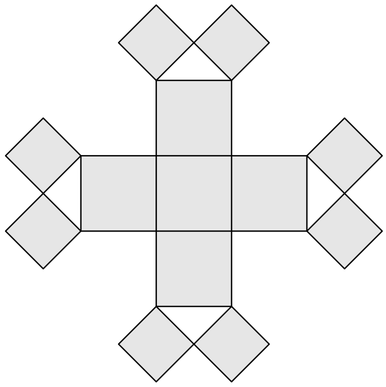


Figure 2

1. Tracer sur la copie une troisième figure qui viendrait logiquement compléter cette suite de dessins et illustrer la valeur de $3\Delta 2$.

2. Supposons que le côté d'un carré de la figure 1 mesure 1 *cm*.

   a. Déterminer l'aire respective des figures 1 et 2.

   b. Quelle serait l'aire de la figure illustrant $3\Delta n$? On ne tiendra pas compte des recouvrements éventuels.

## *255. Exercices non-classés :*

### Exercice 7317

**Echanges thermiques**

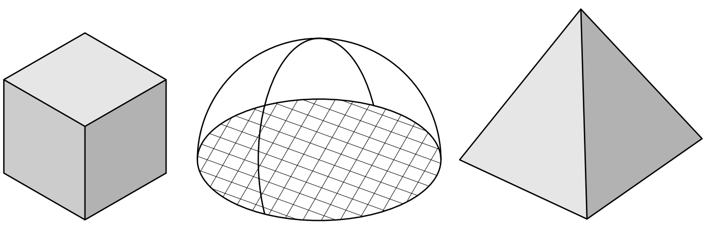
*En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure - y compris la base en contact avec le sol - de ce bâtiment, mesurée en $m^2$, à son volume, mesuré en $m^3$. Le facteur de compacité $c{=}\dfrac{S}{v}$, exprimé en $m^{-1}$, donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.*

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

   a. Déterminer le facteur de compacité du cube de côté $a$.

   b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon $r$. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon $r$ est $\dfrac{4}{3}{\cdot}\pi{\cdot}r^3$ et que sa surface a pour aire $4{\cdot}\pi{\cdot}r^2$.

   c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carré de côté $a$, et de hauteur verticale $a$.



   d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions sont $x$, $y$ et $z$.

   a. Vérifier que pour tous nombres $a$, $b$ et $c$ :

$$a^3{+}b^3{+}c^3{-}3{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}c = \frac{1}{2}{\cdot}(a{+}b{+}c)\big[(a{-}b)^2{+}(b{-}c)^2{+}(c{-}a)^2\big]$$

   b. En déduire que pour tous nombres réels positifs $a$, $b$ et $c$ :
   $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}c$

   c. En déduire que pour tous nombres réels positifs $A$, $B$ et $C$ dont le produit est égal à 1 : $\quad A{+}B{+}C \geqslant 3$

   d. Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est :
   $c = 2{\cdot}\Big(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\Big)$

### Exercice 7318

**Liber abaci**

*Il y a 4 000 ans, les anciens égyptiens utilisaient en calcul une propriété arithmétique bien étonnante : tout nombre rationnel $\dfrac{p}{q}$ strictement positif s'écrit comme une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire d'inverses d'entiers positifs, tous différents les uns des autres. Depuis lors, une telle décomposition s'appelle une "écriture égyptienne". Ainsi, la somme $\dfrac{1}{6}{+}\dfrac{1}{17}{+}\dfrac{1}{102}$ est-elle une "écriture égyptienne" du quotient $\dfrac{4}{17}$, tandis que les sommes $\dfrac{1}{17}{+}\dfrac{1}{17}{+}\dfrac{1}{17}{+}\dfrac{1}{17}$ et $\dfrac{1}{17}{+}\dfrac{3}{17}$ n'en sont pas. Plusieurs questions sur ces écritures demeurent, aujourd'hui encore, ouvertes.*

1. Pourquoi les deux dernières décompositions données en préambule ne sont-elles pas des "*écriture égyptiennes*"?
   Proposer une écriture égyptienne de $\dfrac{2}{3}$ comportant deux

fractions unitaires, puis une autre de $\frac{2}{3}$ en comportant trois.

**2. Un algorithme**

Soient $p$ et $q$ deux entiers tels que $0<p<q$. Le quotient $\frac{p}{q}$ est donc un élément de $]0\,;1]$.

```
k ← 1
p₁ ← p
q₁ ← q.
Tant que pₖ≠0
    Déterminer le plus petit entier positif nₖ
        tel que :        1/nₖ ⩽ pₖ/qₖ.
```

$$\textit{Ainsi :}\quad \frac{1}{n_k}\leqslant\frac{p_k}{q_k}<\frac{1}{n_k-1}$$

```
    pₖ₊₁ ← pₖ·nₖ − qₖ
    qₖ₊₁ ← qₖ·nₖ
```

$$\textit{Ainsi :}\quad \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{p_k}{q_k}-\frac{1}{n_k}$$

```
    Incrémenter k
```

*c'est-à-dire augmenter la valeur du compteur* `k` *d'une unité.*

```
Fin du Tant que
```

a. On fait ici tourner l'algorithme sur le quotient $\frac{p}{q}=\frac{1}{4}$.
Au début du premier tour de boucle :
$k=1$ ; $p_1=4$ ; $q_1=17$.
On déterminer alors $n_1=5$. Puis $p_2=3$, $q_2=85$ et $k$ vaut 2 avant d'entrer dans le deuxième tour de boucle.
Poursuivre jusqu'à l'arrêt complet.
Que vaut $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$?
Les quatre fractions unitaires sont-elles distinctes?

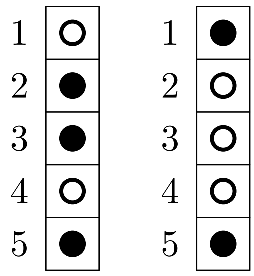
b. On suppose que l'algorithme prend fin à l'issue du $N^{\text{ème}}$ tour de boucle. Justifier qu'il permet de donner une "*écriture égyptienne*" du quotient $\frac{p}{q}$.

c. Justifier clairement que l'algorithme ne peut être illimité.

Cet algorithme permet donc de donner une "*écriture égyptienne*" de n'importe quel nombre rationnel élément de $]0\,;1[$. Il appartient à une classe d'algorithmes dits "*gloutons*" et est attribué à Léonard de Pise, auteur du *Liber abaci (1202)*.

*L'adjectif "glouton" s'applique à des algorithmes faisant, à chaque étape, un choix optimal. L'optimalité globale n'est pas nécessairement atteinte comme en témoignent les deux décompositions de* $\frac{4}{17}$ *rencontrées dans ce problème.*

## Exercice 7319



On dispose de $n$ pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à $n$. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **A chaque coups - qu'on appelle une *opération* dans toute la suite - on retourne un des pions et tous ses voisins du dessus**.

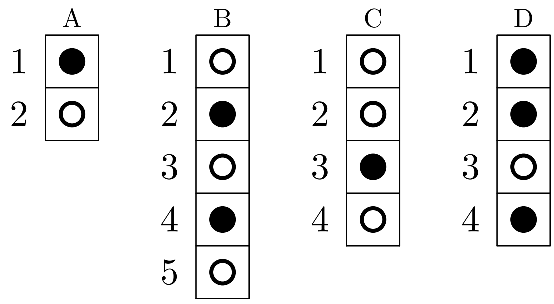
Le dessin ci-contre donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.

L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance?

2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques?

3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-dessous.




4. On donne l'algorithme suivant, pour une configuration de $n$ cases :

> Pour $k$ allant de $n$ à 1 par pas de $-1$
>
> Si le jeton $k$ est noir, effectuer une opération avec ce jeton
>
> Fin Pour

a. Expliquer pourquoi cet algorithme blanchit la colonne en un minimum d'opérations. Combien d'opérations met-il au maximum en oeuvre?

b. Donner un exemple de configuration de $n$ cases nécessitant $n$ opérations.