Première ES/Fonctions dérivées et études de fonctions

1. Rappels :

Exercice 4829

Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées à chacun des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 3{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x + 1$

b. $g(x) = 5{\cdot}x^6 - 3{\cdot}x^3 - 4$

c. $h(x) = 5 + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

d. $j(x) = \dfrac{1}{x^5 + 1}$

e. $k(x) = \dfrac{5{\cdot}x - 2}{3{\cdot}x + 1}$

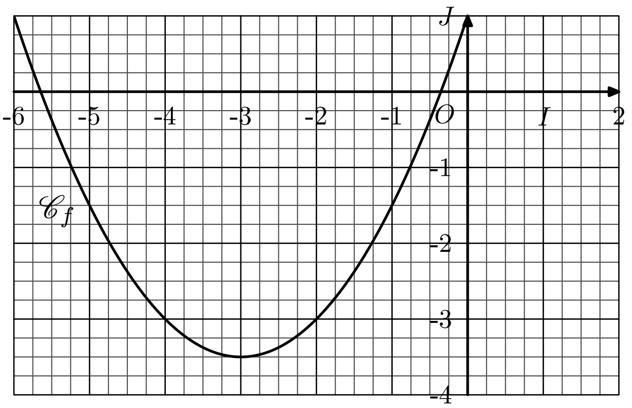
f. $\ell(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2{\cdot}x + 1}$

Exercice réservé 4839

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x + 1$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On note (d) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.

1. a. Déterminer l'image du nombre -2 par la fonction f.

   b. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

   c. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -2.

2. Déterminer l'équation réduite de la droite (d).

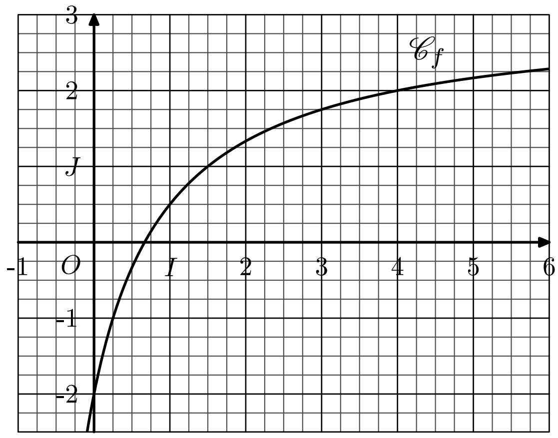
3. Tracer la tangente (d) dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

Exercice 4830

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ et dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On note (d) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (d).

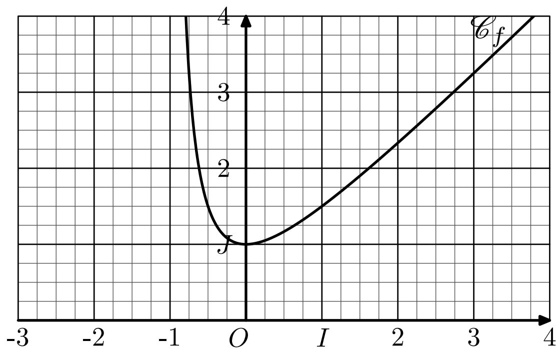
2. Tracer la tangente (d) dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

Exercice réservé 4883

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ dont l'expression est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression : $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2{\cdot}x}{(x+1)^2}$

2. On considère les droites (d) et (Δ) tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses respectives $-\dfrac{1}{2}$ et 1.

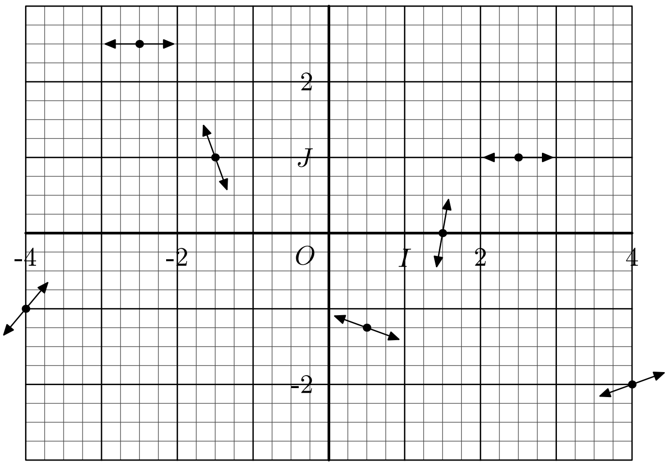
   a. Déterminer les équations réduites des tangentes (d) et (Δ).

   b. Tracer les droites (d) et (Δ).

2. Introduction à l'étude des variations :

Exercice 4828

Tracer la courbe représentative d'une fonction passant par tous les points indiquées et respectant en chacun d'eux la tangente représentée :

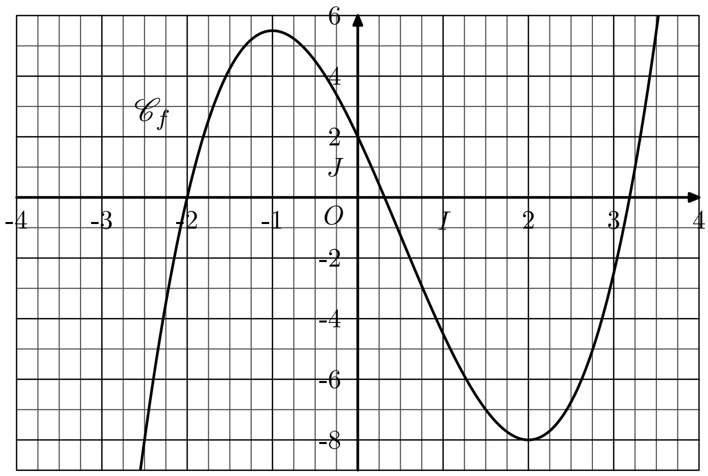


Exercice réservé 4840

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}\cdot x^2-6\cdot x+2$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Graphiquement et sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{2}\,;\frac{11}{4}\right]$, dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

   b. Etudier le tableau de signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

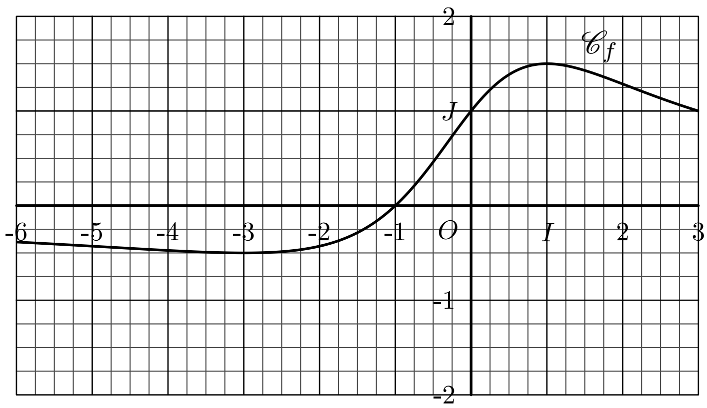
3. Quel conjecture peut-on faire entre le signe de la fonction dérivée f' et du sens de variation de la fonction f.

Exercice 4841

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{3x+3}{x^2+3}$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. A l'aide de sa représentation graphique, dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-6\,;3]$ *(par lecture graphique, on utilisera des valeurs approchées)*.

3. a. Etablir l'expression suivante de la fonction f' dérivée de la fonction f :

   $$f'(x)=\frac{-3\cdot x^2-6\cdot x+9}{(x^2+3)^2}$$

   b. Etudier le tableau de signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

4. Quel conjecture peut-on faire entre le signe de la fonction dérivée f' et du sens de variation de la fonction f.

3. Tableau de signes et de variations : graphiquement :

Exercice 4772

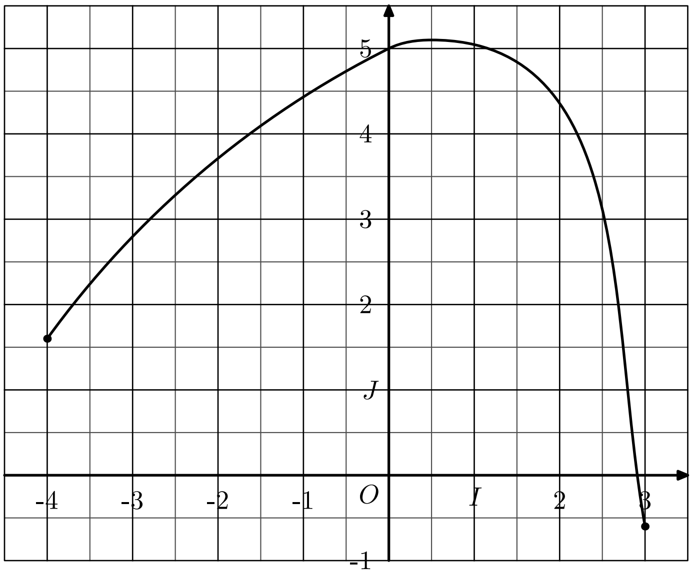
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;3]$, et l'on note f' la fonction dérivée de f.

La courbe représentative de f est la courbe Γ donnée ci-dessous.

On admet que la courbe Γ possède les propriétés suivantes :

- La courbe Γ passe par le point $A(0\,;5)$;
- La tangente en A à la courbe Γ passe par le point $B(-2\,;4)$;
- La courbe Γ admet une tangente parallèle à l'exe des abscisses au point d'abscisse 0,5.

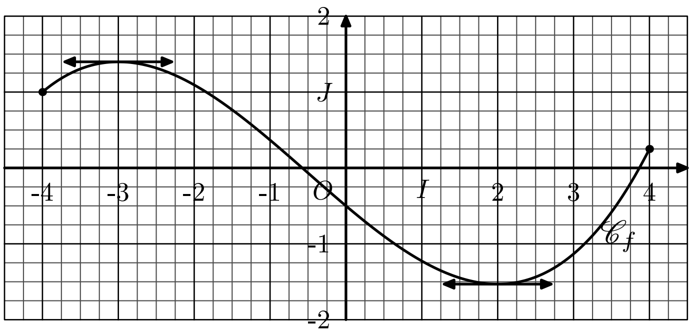
En outre, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-4\,;0{,}5]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;3]$.



1. Placer les points A et B et tracer la tangente en A à la courbe Γ.
2. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=3$, et donner pour chaque solution un encadrement par deux entiers consécutfis.
3. a. Donner $f'(0)$ *(aucune justification n'est demandée).*
   b. Résoudre l'équation $f'(x)=0$. Justifier votre réponse.
   c. Résoudre l'inéquation : $f'(x) \leqslant 0$.

Exercice 4857

On considère le fonction f définie sur $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera, le cas échéant, des valeurs arrondies obtenues par lecture graphique.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Dresser le tableau de signe de la fonction f' dérivée de la fonction f.

Exercice 4858

On considère une fonction f définie sur $[-3\,;5]$ dont la dérivée admet le tableau de signe suivant :

x	-3		-1		2		5
Signe de f'		$+$	0	-	0	$+$	
Variation de f							

On a les valeurs et relations suivantes :

- $f(-1)=3$
- $f(5)=-2\cdot f(-1)$
- $f(-3)=f(5)+5$
- $f(2)=f(-1)\cdot f(5)$

Dans le tableau précédent, compléter la ligne correspondant aux variations de la fonction f.

Exercice 3004

Le tableau ci-dessous représente le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-4	-2	-1	2	$+\infty$
Signe de f'						
Variation de f		5			$-\frac{1}{2}$	
			0			
	$-\infty$			-2		-3

1. Compléter correctement la ligne correspondant au signe de la fonction dérivée f'.
2. Sur lesquels de ces intervalles, la fonction f est soit positive, soit négative. Préciser alors son signe.
   a. $[-1\,;2]$ b. $[-4\,;-1]$ c. $]-\infty\,;-1]$

Exercice réservé 4855

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	2	5	$+\infty$
Variation de f			3		
		0		0	
	-2				-1

1. Sur lesquels de ces intervalles, la fonction f est soit positive, soit négative. Préciser alors son signe :
   a. $[-3\,;5]$ b. $]-\infty\,;2]$ c. $]-3\,;+\infty[$
2. Sur lesquels de ces intervalles, la fonction f' est soit positive, soit négative. Préciser alors son signe :
   a. $[-3\,;5]$ b. $]-\infty\,;2]$ c. $]-3\,;+\infty[$

4. Polynôme : étude de fonctions :

Exercice 4850

On considère la fonction f définie sur l'intervalee $\big[0\,;10\big]$ dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la formule :
$f(x)=x^3-6{\cdot}x^2+9{\cdot}x+3$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Etablir le tableau de signe de la fonction f'.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 4851

On considère la fonction f définie sur $\big[-4\,;5\big]$ par la relation :
$f(x)=-2{\cdot}x^3+3{\cdot}x^2+12{\cdot}x-2$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Etablir le signe de la fonction f' sur $\big[-4\,;5\big]$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 1756

Chacune des fonctions ci-dessous est définie sur $\mathbb{R}$. Etudier les variations de chacune de ces fonctions :

1. $f(x)=x^3-9{\cdot}x^2+15{\cdot}x-7$
2. $g(x)=-x^3-3{\cdot}x^2-3{\cdot}x+3$
3. $h(x)=-\dfrac{1}{3}{\cdot}x^3+\dfrac{1}{2}{\cdot}x^2-\dfrac{1}{2}{\cdot}x-1$

(on indiquera dans le tableau de variations les valeurs des extrémums locaux)

Exercice réservé 4844

On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x)=x^3+3{\cdot}x^2-2$

1. a. Etablir l'égalité : $f(x)=\big(x+1\big)\big(x^2+2{\cdot}x-2\big)$
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f *(on indiquera les valeurs exactes des extrémums locaux).*

Exercice 4842

On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x)=-x^3+3{\cdot}x^2+9{\cdot}x-2$

1. a. Etablir l'égalité : $f(x)=(x+2)(-x^2+5{\cdot}x-1)$
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 4843

On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x)=x^3+3{\cdot}x^2-9{\cdot}x+5$

1. a. Déterminer la valeur des réels a, b et c réalisant l'égalité : $f(x)=(x+5)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. Polynôme : problèmes :

Exercice 7783

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $\big[0\,;25\big]$ par :
$C(x)=x^3-30{\cdot}x^2+400{\cdot}x+100$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. Justifier que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $\big[0\,;25\big]$ est :
   $B(x)=-x^3+30{\cdot}x^2-153{\cdot}x-100$
2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Calculer $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\big[0\,;25\big]$.
3. Justifier le tableau suivant :

x	0		3		17		$+\infty$
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations complet de la fonction B sur l'intervalle $\big[0\,;25\big]$.
5. Déterminer le nombre de pièce que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal?

Exercice 7784

Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large ; on note x sa longueur exprimée en kilomètre, x étant un nombre compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euro de ce tissu est donné, en fonction de x, par :
$C(x)=15{\cdot}x^3-120{\cdot}x^2+350{\cdot}x+1\,000$

Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise.

Pour tout $x\in[0;10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

2. Montrer que pour tout $x\in[0;10]$:
$B(x) = -15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 + 180{\cdot}x - 1\,000$

3. Déterminer $B'(x)$ pour $x\in[0;10]$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

4. Etudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de la fonction B sur $[0;10]$.

5. a. Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal?
   b. Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal?

Exercice 4889

Dans un cadre économique, on appelle fonction de satisfaction une fonction f définie et dérivable sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle $[0;100]$.

On dit qu'il y a "*saturation*" lorsque la fonction de satisfaction prend la valeur 100.

La fonction v, dérivée de la fonction f, est appelée fonction "*envie*". On a donc :
$v = f'$.

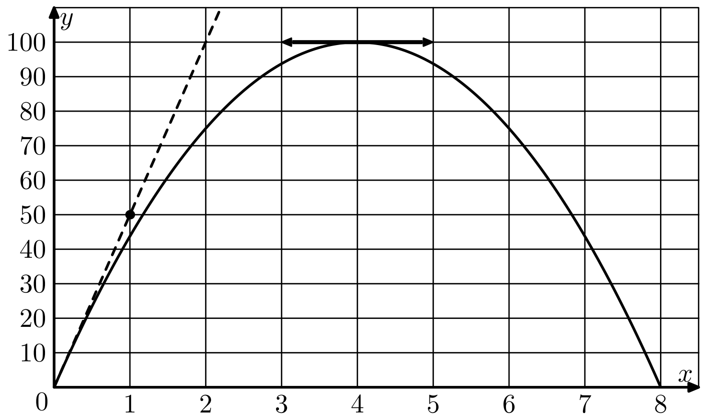
On dit qu'il y a "*envie*" lorsque v est positive, sinon on dit qu'il y a "*rejet*".

Charlotte doit rédiger un mémoire de recherche. Elle souhaite connaître la durée quotidienne de travail qui lui convient le mieux, sachant qu'elle a la possibilité d'y consacrer entre 0 et 8 heures par jour.

En début de journée, elle est de plus en plus efficace, mais après un certain temps sa productivité ne la satisfait plus.

Elle modélise son taux de satisfaction en fonction du nombre d'heures x passées quotidiennement à travailler.

La courbe représentant sa satisfaction f est donnée ci-dessous.



La tangente à cette courbe au point d'abscisse 4 est parallèle à l'axe des abscisses.

La courbe passe par l'origine du repère et la tangente en ce point passe par le point de coordonnées $(1;50)$.

1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   a. Pour quelle durée de travail quotidien y a-t-il "*saturation*"?
   b. Sur quel intervalle y a-t-il "*envie*"?
   c. Sur quel intervalle y a-t-il "*rejet*"?
   d. Donner $v(4)$.

On admettra que la fonction v est ici une fonction affine définie sur l'intervalle $[0;8]$.

2. Justifier que son expression est : $v(x)=-\dfrac{25}{2}{\cdot}x+50$

3. a. Justifier que la fonction f admet pour expression :
   $f(x) = -\dfrac{25}{4}{\cdot}x^2 + 50{\cdot}x + c$ où $c\in\mathbb{R}$
   b. Déterminer la valeur du nombre réel c.

4. En déduire les valeurs de x pour lesquelles la satisfaction prend la valeur 75.

6. Quotient : variations :

Exercice 4848

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :
$$f(x) = \frac{2-x}{x^2+5}$$

1. Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{x^2-4{\cdot}x-5}{\left(x^2+5\right)^2}$$

2. Dresser le tableau de signe de la fonction f'

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f *(on notera la valeur exacte des extrémums locaux)*.

Exercice réservé 4849

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{7{\cdot}x-7}{x^2+3}$$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f *(on indiquera les valeurs exactes des extrémums locaux)*.

Exercice réservé 4882

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{x^2-2{\cdot}x+4}{x+1}$$

1. Montrer que la fonction g' dérivée de la fonction g a pour expression : $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-6}{(x+1)^2}$

2. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

7. Quotient : variations et signes :

Exercice réservé 4891

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2+4}$$

1. a. Donner la forme factorisée du polynôme x^2+5x+4.

   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

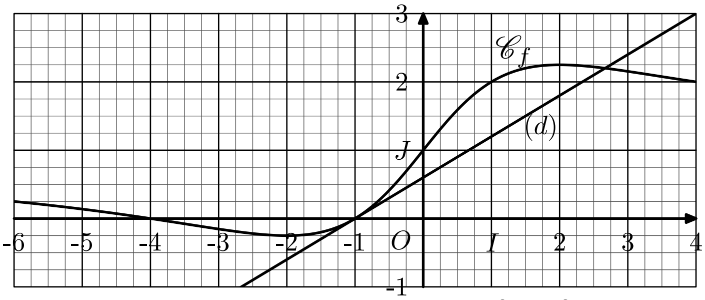
   c. Résoudre l'inéquation : $\dfrac{5x}{x^2+4} \geqslant -1$

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f :

   a. Etablir que la fonction f' admet pour expression :
   $$f'(x) = \frac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. *(on indiquera les valeurs des extrémums locaux).*

3. Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



   a. La droite (d) a pour équation $y = \frac{3}{5}\cdot x + \frac{3}{5}$. Justifier que la droite (d) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

   b. Déterminer l'équation de la tangente (Δ) de la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   c. Tracer sur le graphique la droite (Δ).

Exercice 4847

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3\cdot x+3}{x^2+3}$$

1. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

2. Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{-3\cdot x^2-6\cdot x+9}{\left(x^2+3\right)^2}$$

3. a. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. *(on indiquera les valeurs exactes des extrémums locaux)*

Exercice réservé 4845

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2\cdot x^2-x-1}{2\cdot x+2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. a. Factoriser le polynôme : $2\cdot x^2-x-1$.

   b. Déduire de l'ensemble des questions précédentes le tableau de signe de la fonction f.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Etablir l'égalité suivante :
$$f'(x) = \frac{4\cdot x^2+8\cdot x}{(2\cdot x+2)^2}$$

4. a. Etablir le tableau de signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. On indiquera la valeur exacte des deux extremums locaux de cette fonction.

Exercice 4846

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2+2\cdot x+1}{x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Etablir l'égalité suivante :
$$f'(x) = \frac{x^2-2\cdot x-3}{(x-1)^2}$$

3. a. Etablir le tableau de signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

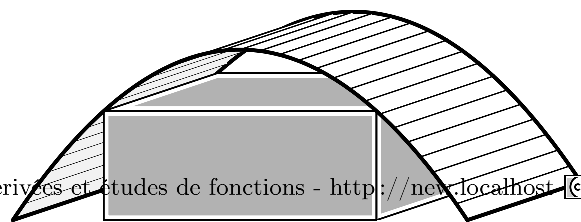
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. On indiquera la valeur exacte des deux extremums locaux de cette fonction.

4. Déduire de l'ensemble des questions précédentes le tableau de signe de la fonction f.

8. Problème d'optimisation :

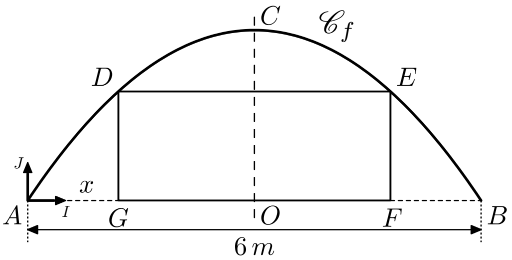
Exercice 4863

Sous un hangar, dont le toit est de forme "*parabolique*", on souhaite installer une habitation de forme parallélépipédique. Le dessin ci-dessous illustre le problème :



On suppose l'habitat s'étalant sur toute la longueur du hangar. Le but de cet exercice est de déterminer les dimensions de la façade de cet habitat afin d'en maximaliser le volume.

On modélise ce problème par la figure ci-dessous :



Le rectangle $DEFG$ admet la droite (CO) pour axe de symétrie. On note x la mesure de la longueur AG.

Dans le repère $(A\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par la relation :

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot x$$

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $DEFG$ en fonction de x.

1. Le point G appartenant au segment $[AO]$, quelles sont les valeurs possibles pour la variable x?

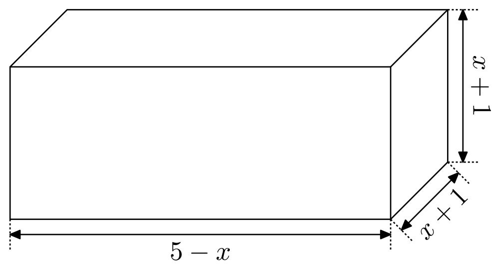
2. Démontrer que pour $x \in [0\,;3]$:
$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{9}{2}\cdot x^2 + 9\cdot x$$

3. a. Déterminer le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.

   b. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $DEFG$ est maximale.

Exercice réservé 4864

On considère le parallélépipède rectangle représentée ci-dessous :



Le nombre x permet de définir les mesures de ce solide comme indiqué sur la figure.

1. Quelles valeurs peut prendre la variable x?

2. On note $\mathcal{V}(x)$ le volume de ce solide en fonction de x. Donner la forme développée et réduite de $\mathcal{V}$.

3. a. Etablir le tableau de variations de la fonction $\mathcal{V}$.

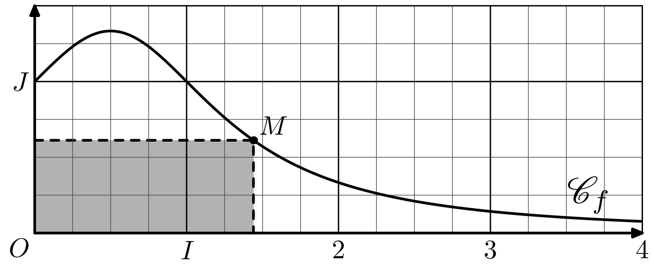
   b. Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume du parallélépipède est maximal.

Exercice réservé 4881

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On considère un point M appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et on construit comme l'indique la figure ci-dessus un rectangle où les points O et M sont des sommets de celui-ci.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de la valeur de x.

1. Donner l'expression de la fonction $\mathcal{A}$.

2. a. Déterminer l'expression de la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$.

   b. Dresser le tableau de signe de la fonction $\mathcal{A}'$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.

3. Quel est la position du point M afin que l'aire du rectangle soit maximale?

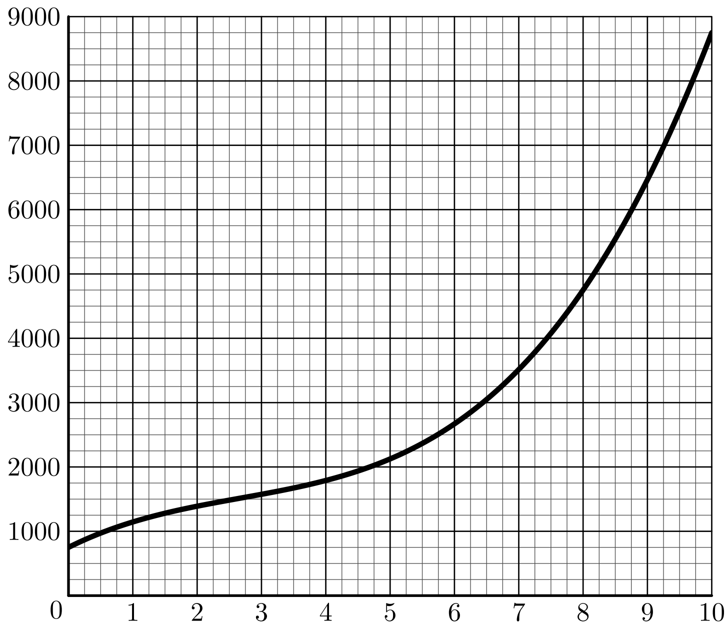
Exercice 4885

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C.



Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Etude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = p\cdot x$.

1. Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation : $y = 400\cdot x$.

Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

   a. Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation :
   $y = 680{\cdot}x$.
   Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

   b. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;10[$ par :
   $B(x) = 680{\cdot}x - C(x)$
   Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;10]$, on a :
   $B'(x) = -45{\cdot}x^2 + 240{\cdot}x + 180$

   c. Etudier les variations de la fonction B sur $[0\,;10]$.
   En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum.
   Donner la valeur de ce bénéficec.

Partie B : étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$, on a :
$$C'_M(x) = \frac{30{\cdot}(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$$

2. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
   En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0\,;10]$.

   b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum?
   Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total?

Exercice réservé 4773

Partie A

1. Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de 25 %, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution?

2. Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de -20 %, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution?

Partie B

D'une façon générale, un prix P subit deux évolution successibes, la première à un taux de x, et la deuxième à un taux de y. Il revient alors à sa valeur initiale P.

1. Montrer que x et y vérifient : $(1+x)(1+y)=1$.

On admet alors que : $y=\dfrac{-x}{1+x}$

2. On veut étudier sur l'intervalle $[-0{,}5\,;2]$ la fonction f telle que :
$$f(x) = \frac{-x}{1+x}.$$
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

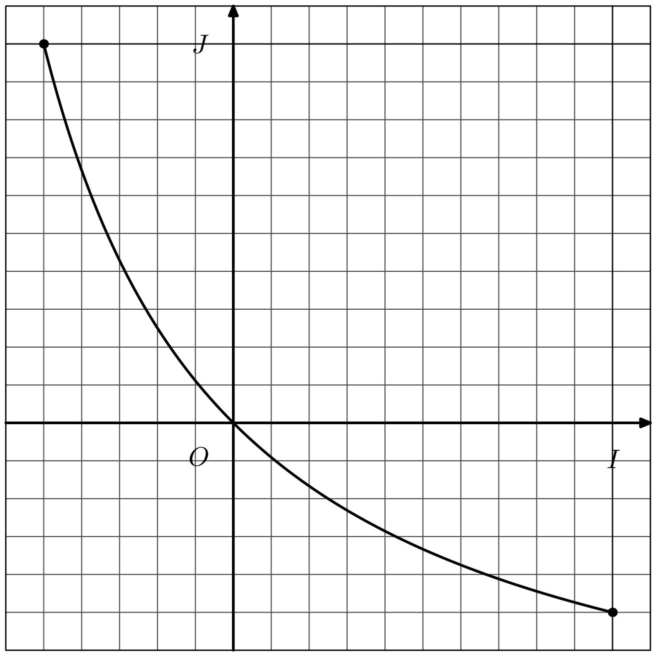
   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

   b. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-0{,}5\,;2]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

3. A l'aide de la représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}$ donnée en annexe, ou à l'aide d'un calcul, répondre aux questions suivantes :

   a. Quelle évolution faut-il faire subir à un prix augmenté de 50 % pour retrouver le prix initial?

   b. Quelle évolution faut-il faire subir à un prix diminué de 50 % pour retrouver le prix initial?



Exercice 379

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur. Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.
Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule :

$$P(x) = \frac{x+300}{x+100} \quad \text{pour } x \in [100\,;+\infty[.$$

Par exemple si le supermaché achètre 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus :

$$P(300) = \frac{600}{400} = 1{,}50 \text{ euros le kilogramme.}$$

Dans ce cas, le supermarché devra payer $300\times1{,}5=450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A : Etude du prix P proposé par le fournisseur.

1. Montrer que : $P'(x)=\dfrac{-200}{(x+100)^2}$ sur $[100\,;+\infty[$.

2. Donner le sens de variations de la fonction P sur $[100\,;+\infty[$.

Partie B : Etude de la somme S à dépenser par le supermarché.

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits *(ces*

fruits vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).
Cette somme est donc égale à :
$S(x)=x\cdot P(x)$ pour $x\in[100\,;+\infty[$.

1. Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$:

$$S'(x)=\frac{x^2+200\cdot x+30\,000}{(x+100)^2}$$

2. Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$:

$$S(x)=x+200-20\,000\times\frac{1}{x+100}$$

9. Variations et tableaux de signes :

Exercice 4856

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admettant une dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, on a l'information : $f(2)=0$.

   Dresser le tableau de signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ admettant une dérivée g' vérifiant :
   Pour tout réel x, on a : $g'(x)<0$
   De plus, on sait que : $g(-3)=0$.

   Dresser le tableau de signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

