Première ES/Etudes de suites

1. Rappels : généralité :

Exercice 7716

Pour chaque question, déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

b. $u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 2$; $u_0 = 3$

c. $u_n = \sqrt{n^2+n+1}$

d. $u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 2$; $u_0 = 1$

e. $u_n = \dfrac{n-2}{n+1}$

f. $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$; $u_0 = 2$

Exercice réservé 7717

1. a. Dans un langage de programmation, saisir l'algorithme suivant :

```
a ← 2
Pour i allant de 0 à 4
   a ← a+3
Fin Pour
```

   b. En effectuant une exécution pas à pas, noter les valeurs successives prises par la variable `a` :
   ... ; ... ; ... ; ... ; ... ; ...

2. a. Modifier l'algorithme pour que les valeurs successives prises par la variable `a` soit :
   2 ; 6 ; 10 ; 14 ; 18 ; 22

   b. Modifier l'algorithme pour que les valeurs successives prises par la variable `a` soit :
   5 ; 10 ; 15

2. Rappels : suites arithmétiques et géométriques :

Exercice 7718

Un demandeur d'emploi se voit proposer deux offres :

- Un salaire initial de 1150 euros par mois et une augmentation de 5 % par mois.
  On note (a_n) la suite de ces revenus mensuels avec cette proposition.
- Un salaire initial de 1200 euros par mois et une augmentation de 3 % par mois. On note (b_n) la suite de ces revenus mensuels avec cette proposition.

1. Donner la nature et les élèments caractéristiques de chacune des suites (a_n) et (b_n).

2. Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs des termes au centième près.

n	0	1	2	3	4
a_n					
b_n					

3. a. Au bout du 5$^{\text{ième}}$ mois, quelle est la proposition rendant le salaire le plus avantageux?

   b. A la vue de la somme reçue au terme des cinq mois, quelle est la proposition la plus avantageuse?

Exercice réservé 7749

Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger. Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %

On modélise le nombre de films proposés par une suite géométrique (u_n) où n désigne le nombre de mois depuis l'ouverture du site. On a donc $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2 et donner le résultat arrondi à l'unité.

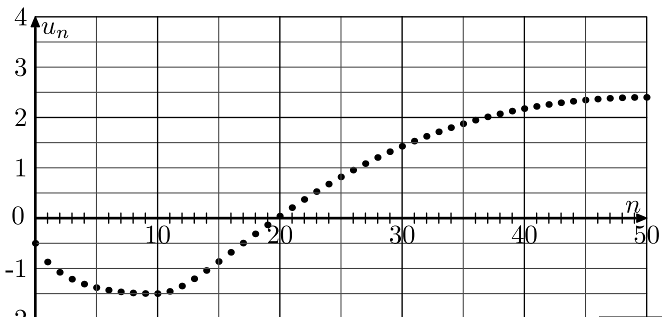
2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer la valeur du terme de rang 6 arrondie à l'unité.

3. Représentation graphique (explicite) :

Exercice 7750

On considère une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$. Dans un repère sont représentés les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ pour n compris entre 0 et 50 :



1. Donner les valeurs exactes de u_0 et u_{10}.

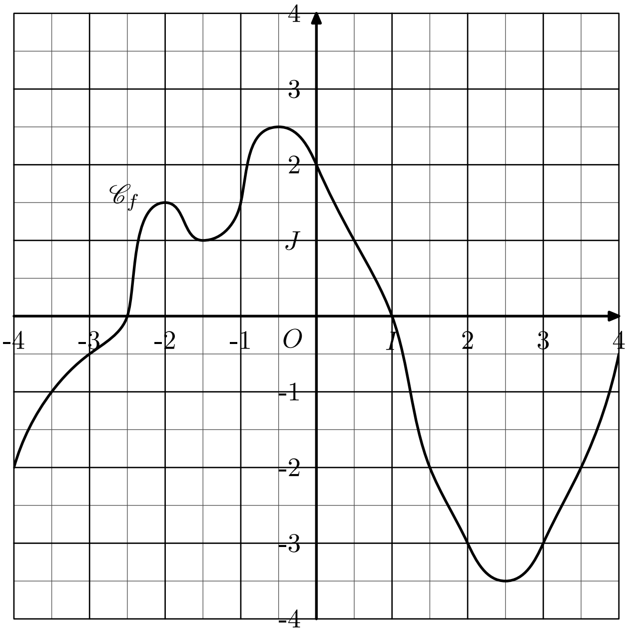
2. Donner des valeurs approchées de u_5, u_{30} et u_{40}.

3. Que peut-on dire des valeurs des termes u_n lorsque la valeur de n augmente?

4. Representation graphique (récurrence) :

Exercice 4583

On considère la fonction f définie sur $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation

$u_0 = 2 \quad$ et $\quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer que le terme u_1 est égal à -3.

2. Justifier les égalités suivantes :

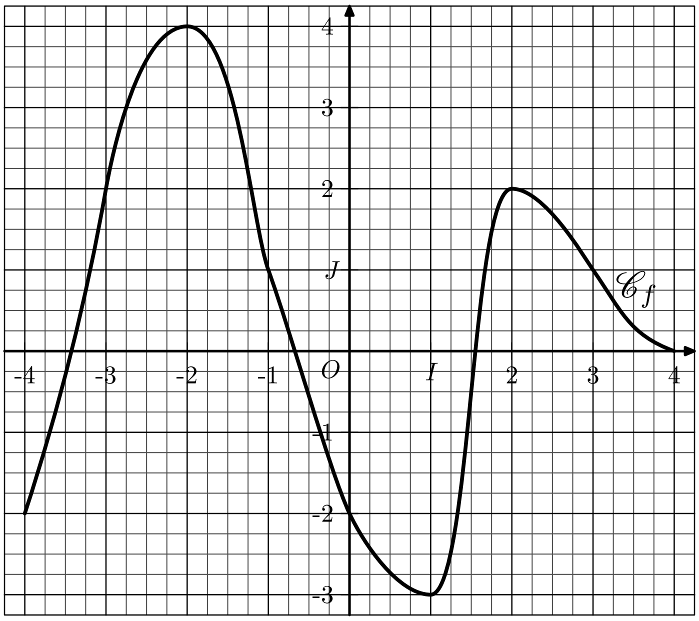
   a. $u_2 = -0{,}5$ b. $u_3 = 2{,}5$

3. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

Exercice 4584

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère la représentation $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations :

$u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad v_{n+1} = f(v_n)$

vérifiant les conditions initiales suivantes :

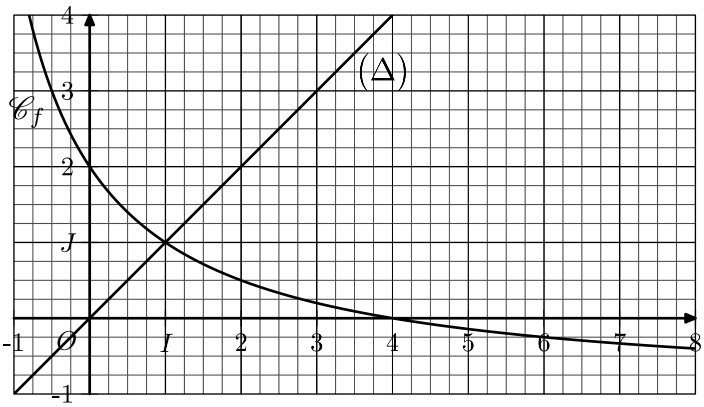
$u_0 = -1 \quad ; \quad v_0 = -4$

Déterminer les 100 premiers termes de chacune de ces deux suites.

Exercice 4609

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dont l'image d'un nombre x est défini par :

$$f(x) = \frac{-x+4}{x+2}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad u_0 = 8$

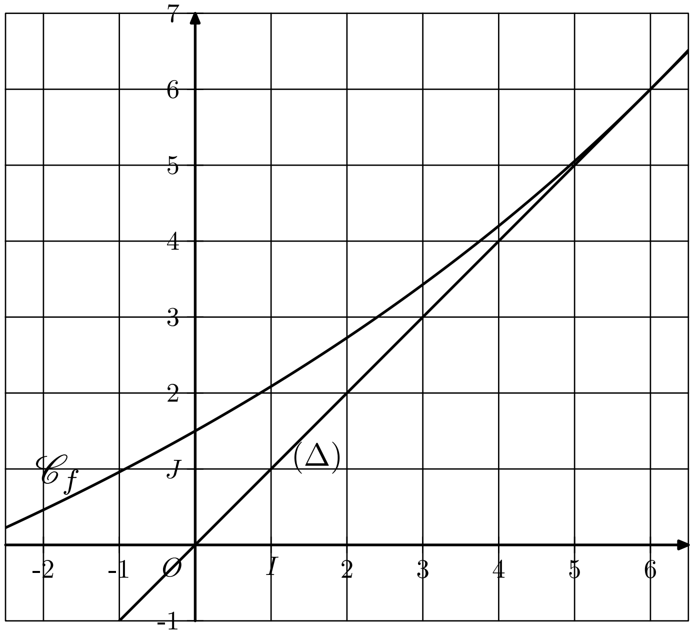
1. Sur l'axe des abscisses, présenter les valeurs des six premiers termes de la suite.

2. Déterminer, par le calcul, les trois premiers termes de la suite (u_n).

Exercice réservé 4610

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie par la relation :

$f(x) = -\dfrac{12x+36}{x-24}$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad u_0 = -2$

1. Graphiquement, placer sur l'axe des abscisses les cinq premières valeurs de la suite (u_n).

2. Déterminer, par le calcul, la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n).

5. Sens de variation : étude de fonction :

Exercice 4585

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est donné par la formule :

$u_n = n^2 - 7n + 1$

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											

2. Après avoir donner le tableau de variations de la fonction f dont l'image de x est défini par :

   $f(x) = x^2 - 7x + 1$

   Etablir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

Exercice réservé 4605

Pour chacune des questions suivantes, déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a. $u_n = \dfrac{1}{2}n - \dfrac{1}{4}$ b. $u_n = 3 - 2n$

c. $u_n = -2n^2 - 3n + 2$ d. $u_n = 3n^2 - 7n + 4$

Exercice réservé 4606

Pour chaque question, utiliser la calculatrice pour effectuer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ définie par :

a. $u_n = n^3 - 2n^2 - 3n$ b. $u_n = \dfrac{5^n}{n+2}$

c. $u_n = 3\big[1 + (-1)^n\big] + 4$ d. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{2n+5}$

6. Sens de variations par différences : polynômes :

Exercice 7763

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par la relation :

   $u_n = 3{\cdot}n + 5$

   a. Etablir que le terme de rang $n{+}1$ admet pour expression :

   $u_{n+1} = 3{\cdot}n + 8$

   b. En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) est croissante.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par la relation :

   $v_n = -2{\cdot}n^2 + n + 2$

   a. Etablir que le terme de rang $n{+}1$ admet pour expression :

$v_{n+1} = -2{\cdot}n^2 - 3{\cdot}n + 1$

b. Etablir que la différence consécutive de deux termes de la suite (v_n) a pour expression : $v_{n+1} - v_n = -4{\cdot}n - 1$

c. En déduire que la suite (v_n) est une suite décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 7808

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul par :
$u_n = -8{\cdot}n^2 + 5{\cdot}n + 7$

1. Etablir que le terme de rang $n+1$ de la suite (u_n) admet pour expression :
$u_{n+1} = -8{\cdot}n^2 - 11{\cdot}n + 4$

2. En étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n), montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice réservé 7809

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul par :
$u_n = -7{\cdot}n^2 + 6{\cdot}n + 1$

1. Etablir que le terme de rang $n+1$ de la suite (u_n) admet pour expression :
$u_{n+1} = -7{\cdot}n^2 - 8{\cdot}n$

2. En étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n), montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 7826

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n \in \mathbb{N})$ par la relation :
$u_n = 3{\cdot}n^2 - 2{\cdot}n + 4$

1. Exprimer le terme u_{n+1} en fonction de n.

2. En étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n), montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 4607

Pour chaque question, déterminer, en étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$, le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

a. $u_n = 3n^2 + n + 1$

b. $u_n = 2^n + 3n - 1$

c. $u_{n+1} = u_n + 2n + 1\ ;\ u_0 = -2$

d. $u_{n+1} = u_n - n + 5\ ;\ u_0 = 2$

Exercice réservé 7762

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :
$v_{n+1} = v_n - {v_n}^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
et la condition initiale $v_0 = 2$.

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2. En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite (v_n) est décroissante.

7. Sens de variations par différences : quotient :

Exercice 7760

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par la relation :
$$u_n = \frac{n+3}{n+1}$$

1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. a. Etablir l'identité pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)}$$

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice réservé 7761

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par la relation :
$$u_n = \frac{1}{2{\cdot}n + 1}$$

1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. a. Etablir l'identité pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(2{\cdot}n+1)(2{\cdot}n+3)}$$

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 7785

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par la relation :
$$u_n = \frac{n^2 - 1}{n+2}$$

1. Déterminer la valeur exacte des cinq premiers termes de la suite (u_n).

Puis, compléter le tableau ci-dessous avec les valeurs approchées au centièmes près :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2. Pour tout entier naturel n, montrer que :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{n^2 + 5{\cdot}n + 3}{(n+2)(n+3)}$$

3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

Exercice 7812

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier n strictement positif par : $u_n = \dfrac{3\cdot n-1}{\left(n-1\right)^2}$

En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante.

Exercice réservé 7824

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier n strictement positif par : $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$

En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante.

Exercice réservé 4586

Dans cet exercice, on utilisera la méthode de la différence pour prouver la monotonie des suites :

1. Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
   $$u_n = -32n + 102$$
   Montrer que cette suite est décroissante.
2. Soit $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
   $$v_n = \sqrt{2n-1}$$
   Montrer que cette suite est croissante.
3. Soit $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
   $$w_n = 2n - \frac{25}{n}$$
   Montrer que la suite $\left(w_n\right)$ est croissante.

8. Sens de variations par quotient :

Exercice 7756

Rappels :

Pour tous nombres réels a et b et pour tous enties relatifs n et m, on a :

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a\neq 0)$
- $\left(a^n\right)^m = a^{n\times m}$
- $a^n \times b^n = \left(a\times b\right)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ $(b\neq 0)$

Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites par la méthode des quotients.

1. La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
   $$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   Montrer que $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante.
2. On considère la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$v_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$
   Montrer que $\left(v_n\right)$ est strictement croissante.

Exercice 7757

Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

1. La suite $\left(u_n\right)$ est définie par la formule explicite :
   $$u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
2. La suite $\left(v_n\right)$ est définie par la formule explicite :
   $$v_n = \frac{3}{2^n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

9. Sens de variations des suites arithmétiques :

Exercice 7758

On considère la suite arithmétique $\left(u_n\right)$ de premier terme 5 et de raison 2.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$.
2. Exprimer la valeur du terme u_n en fonction de son rang n.
3. Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante.

10. Sens de variations des suites géométriques :

Exercice 7759

On considère la suite géométrique $\left(v_n\right)$ de premier terme 24 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite $\left(v_n\right)$.
2. Exprimer la valeur du terme v_n en fonction de son rang n.
3. Démontrer que la suite $\left(v_n\right)$ est décroissante.

Exercice 7779

Une entreprise décide de rentrer en bourse. Lors de son entrée en bourse, le prix d'une action est de 50 €.
Elle espère que le prix de son action augmente de 5 % par an.

On note u_0 le prix de l'action lors de son entrée en bourse et u_n, pour tout entier n strictement positif, le prix de l'action au bout de n années.

1. Donner la nature et les élèments caractéristiques de la suite (u_n).
2. a. Donner la formule explicite du terme de rang n de la suite (u_n).
   b. Donner le prix de de l'action au bout de 10 ans
3. a. Donner le sens de variation de la suite (u_n). Justifier votre réponse.
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le prix de l'action dépassera 100 €.

Exercice réservé 7780

L'espèce des éléphants d'Asie sont en voie de disparition. On estime la population en 2017 à 415 000 individus. On estime que le nombre d'éléphants diminue de 3 % par an.

On note u_n le nombre d'éléphants d'Asie à l'année $2017{+}n$.

1. Donner la nature et les élèments caractéristiques de la suite (u_n).
2. a. Donner la formule explicite du terme de rang n de la suite (u_n).
   b. Donner le nombre d'éléphants d'Asie en 2020.
3. a. Donner le sens de variation de la suite (u_n). Justifier votre réponse.
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer en quelle année le nombre d'éléphants d'Asie sera inférieure à 200 000.

Exercice 7810

L'indice de référence des loyers *(IRL)* sert de base pour réviser les loyers des logements vides ou meublés. Il fixe les plafonds des augmentations annuelles des loyers que peuvent exiger les propriétaires.

Source : http ://service-public.fr

Un logement est loué en 2018 pour un loyer de 814 € et dont l'augmentation est fixé à 0,5 % par an. On note u_n le montant du loyer à l'année $2018{+}n$.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_b).
2. a. Donner l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction n.
   b. Déterminer le montant du loyer en 2030.
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'année pour laquelle le loyer dépasse pour la première fois 900 €.

Exercice réservé 7811

Le salaire minimum de croissance *(SMIC)* correspond au salaire horaire minimum légal que le salarié doit percevoir.

Source : http ://service-public.fr

En 2018, le montant net du SMIC est de 1187 € et l'augmentation est fixé à 0,9 % par an. On note u_n le montant du SMIC à l'année $2018{+}n$.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n).
2. a. Donner l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction n.
   b. Déterminer le montant du SMIC en 2030.
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'année pour laquelle le SMIC dépassera pour la première fois le montant de 1400 €.

11. Sens de variations, vers les suites arithmético-géométriques :

Exercice 7777

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par la relation :
$u_n = 1{,}2^n + 30$

1. Etablir, pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$, on a la relation :
   $u_{n+1} - u_n = 0{,}2\times1{,}2^n$
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 7778

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par la relation :
$u_n = 400\times0{,}8^n + 30$

1. Etablir, pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$, on a la relation :
   $u_{n+1} - u_n = -80\times0{,}8^n$
2. En déduire que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice réservé 4608

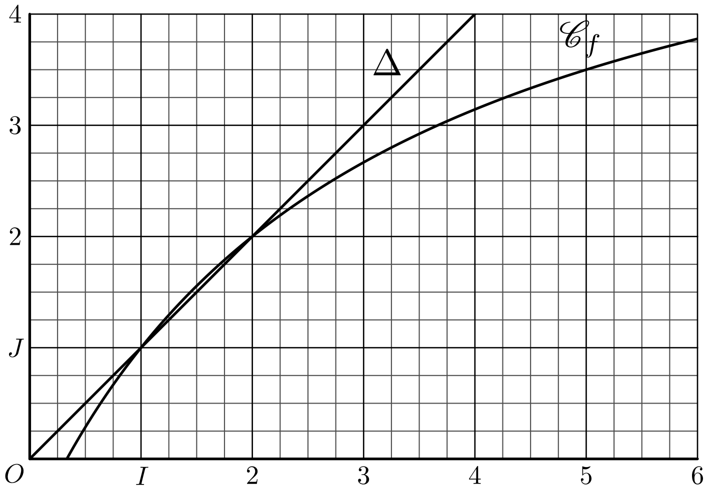
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est définie par :
$u_n = 7\times4^n - 2\times3^n$

1. Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation :
   $u_{n+2} = 7\cdot u_{n+1} - 12\cdot u_n$
2. a. Etablir l'identité : $u_{n+2} - 3u_{n+1} = 4\cdot(u_{n+1} - 3u_n)$
   b. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :
   $v_n = u_{n+1} - 3\cdot u_n$
   Déterminer la nature et les élèments caractéristiques de la suite (v_n).

Exercice 4619

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
$$f(x)=\frac{6x-2}{2x+1}$$

Dans le repère $(O;I;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



La droite Δ est la première bissectrice du plan ; son équation cartésienne est $y=x$.

1. a. Etablir l'égalité :
$$f(x)-x=\frac{-2x^2+5x-2}{2x+1}$$

   b. Déterminer le tableau de signe de l'expression $f(x)-x$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   c. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et Δ sur $[0;+\infty[$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0=6 \quad ; \quad u_{n+1}=f(u_n)$

   a. Représenter, sur l'axe des abscisses du repère, les six premiers termes de la suite (u_n) *(on laissera apparent les traits de construction)*.

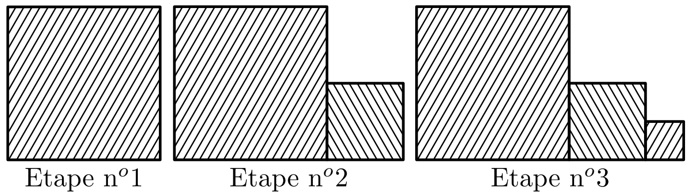
   b. Déterminer la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n)

   c. On admet que tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à 2. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice réservé 4627

On construit successivement une figure de la manière suivante :
- On part d'un carré dont le côté mesure $4\,cm$;
- A l'étape suivante, on rajoute un nouveaux carré dont le côté mesure la moitié du carré précédemment ajouté.

Voici les trois premières étapes de cette construction représentées :



On note u_n l'aire totale de la figure construite à l'étape n : on vient de construite la suite (u_n) de nombres réels.

1. On note (v_n) la suite des aires des carrés rajoutés à chaque étape de cette construction.

   a. Donner les cinq premiers termes de la suite (v_n).

   b. Quel est la nature de la suite (v_n)?

   c. Donner la formule explicite associant chaque terme de la suite (v_n) en fonction de son rang.

2. a. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.

   b. Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :
$$u_{n+1}=u_n+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

3. La formule explicite définissant la suite (u_n) est de la forme :
$u_n=\alpha\cdot(1-\beta^{n+1}) \quad \alpha\in\mathbb{R} \text{ et } \beta\in\mathbb{R}$

   Déterminer la valeur de α et β.

