Première ES/Bernouilli et binomiale

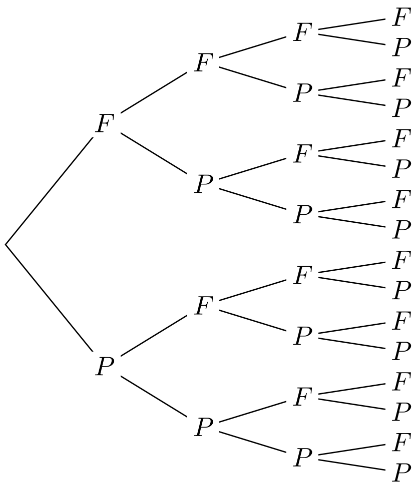
1. Introduction :

Exercice 389

1. Un joueur lance une pièce qui n'est pas équilibré dont la probabilité d'obtenir le côté face est de 0,63.

   Quel est la probabilité d'obtenir le côté pile?

On souhaite étudier certains évènements issus de quatre lancers de cette pièce. On admet que ces lancers sont indépendants entre eux.



Remarque : les évènements élémentaires P-P-F-P et P-F-P-P sont des issues différentes de cette expérience aléatoire mais chacune d'elles réalise le même nombre de piles et que de faces.

2. a. Combien d'issus correspondent à l'obtention de 3 côtés faces et 1 côté pile?

   b. Quel est la probabilité d'une issue contenant 3 côtés faces et 1 côté pile?

   c. En déduire la probabilité d'obtenir 3 côtés faces au cours de ce jeu.

3. a. Parmi les calculs suivants, lequel représente la probabilité d'une issue contenant exactement 2 côtés faces :

   $(1-0{,}63)^2$; $0{,}63^3\times(1-0{,}63)$

   $0{,}63^2\times(1-0{,}63)^2$; $0{,}63\times(1-0{,}63)^3$

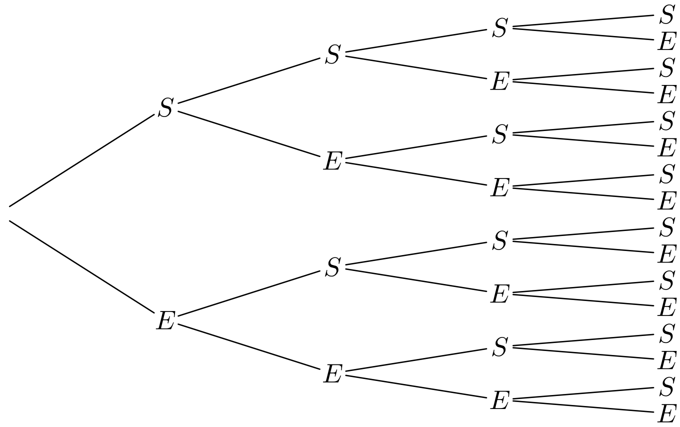
   b. Déterminer la probabilité d'obtenir 2 côtés faces au cours de ce jeu.

Exercice 4886

Dans un jeu issu d'une expérience aléatoire, on ne considère que deux issues : le succès (S) à ce jeu et l'échec (E).
La probabilité du succès est de 0,15.

Partie A : répétition successive et indépendante de 4 parties

Voici l'arbre de choix correspondant à cette répétition d'expériences ;

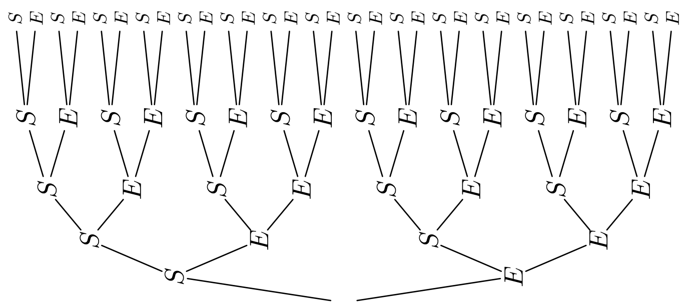


1. Déterminer la probabilité de l'évènement A :
   "*Le joueur a gagné exactement 3 fois*"

2. Déterminer la probabilité de l'évènement B :
   "*Le joueur a gagné exactement 2 fois*"

Partie B : répétition successive et indépendante de 5 parties

Voici l'arbre de choix correspondant à ce jeu :



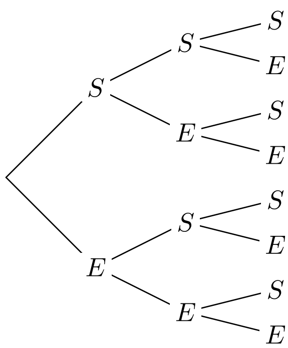
3. Déterminer la probabilité de l'évènement C :
   "*Le joueur a gagné exactement 3 fois*".

Exercice réservé 7827

On considère une épreuve admettant que deux issues : une nommé "*succès*" et noté S de probabilité 0,4 ; l'autre nommé "*échec*" et notée E.

On décide de répeter trois fois cette même épreuve. On obtient l'arbre de probabilité ci-contre.

On suppose ces répétitions indépendantes entre elles.



1. Compléter cet arbre de probabilité?

2. a. Combien de chemins comportent 3 succès?

   b. Donner la probabilité d'obtenir trois succès à l'issue de cette expérience aléatoire?

3. a. Combien de chemins comportent 0 succès?

   b. Donner la probabilité de n'obtenir aucun succès à l'issue de cette expérience aléatoire?

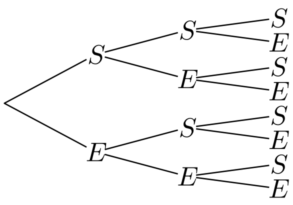
4. a. Combien de chemins comportent 2 succès?

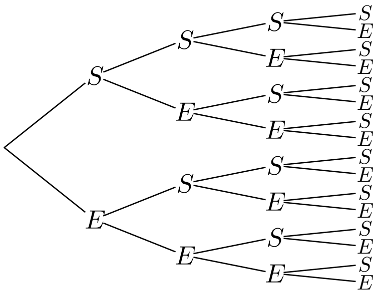
b. Donner la probabilité d'obtenir exactement deux succès à l'issue de cette expérience aléatoire?

2. Schéma de Bernoulli :

Exercice 4887

Voici les arbres de choix associés à la répétition d'une épreuve de Bernoulli respectivement 3 et 4 fois :





1. Pour la répétition trois fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3
Nombre d'issues				

2. a. Pour la répétition quatre fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4
Nombre d'issues					

b. Y a-t-il une méthode pour obtenir le second tableau à partir du premier?

Exercice 4888

On considère une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules bleus indiscernable au toucher.

1. On tire une boule au hasard dans cet urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge?

On décide de tirer successivement trois boules. On remet à chaque fois la boule dans l'urne *(on dit que le tirage se fait avec remise)*.

2. On considère le schéma de Bernoulli issu de cette répétition où le succès est associé à l'évènement "*avoir tiré une boule rouge*"

a. Quels sont les paramètres de ce schéma de Bernoulli?

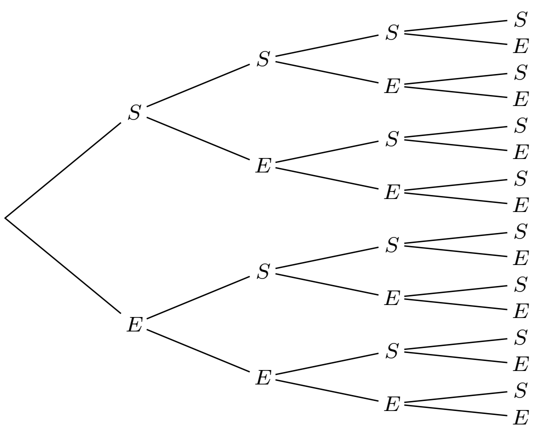
b. Construire l'arbre représentant cette situation.

c. Combien d'évèments élémentaires réalisent l'évènement :
"*avoir tiré 2 boules rouges*"

3. Coefficient binomial :

Exercice 4911

1. On considère l'arbre de choix ci-dessous issu de la répétition quatre fois d'une épreuve de Bernoulli :



Déterminer les coefficients binomiaux ci-dessous :

a. $\binom{4}{2}$ b. $\binom{4}{3}$

2. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants :

a. $\binom{5}{3}$ a. $\binom{12}{5}$ a. $\binom{8}{6}$ a. $\binom{7}{2}$

Exercice réservé 7828

A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants :

a. $\binom{5}{3}$ a. $\binom{12}{5}$ a. $\binom{8}{6}$ a. $\binom{7}{2}$

4. Loi binomiale :

Exercice 4938

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n=35$ et $p=0{,}34$.

Déterminer la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-5} de chacune des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=25)$

Exercice réservé 7829

Soit $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres 15 et 0,35. C'est à dire : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(15\,;0{,}35)$

Déterminer la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

Exercice 7830

Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

Déterminer la probabilité exacte pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie, puis sa valeur arrondie au dixième.

5. Loi binomiale et calculatrice :

Exercice 7831

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=0{,}63$.

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :

   a. $\binom{15}{13}$ b. $\binom{15}{14}$ c. $\binom{15}{15}$

2. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-4} près des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=13)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=14)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=15)$

3. En déduire la valeur, arrondie à 10^{-4} près, de la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X}\leqslant 12\}$.

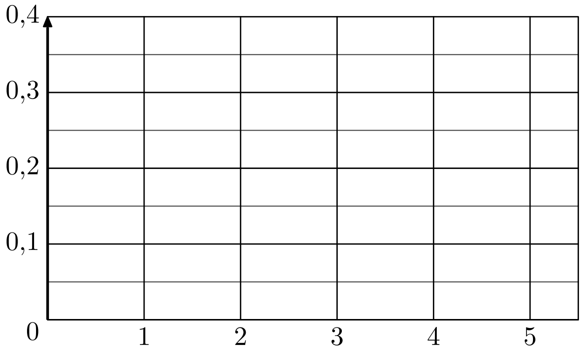
6. Loi binomiale et représentation :

Exercice 4930

1. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}5$.

   a. A l'aide de la calculatrice et en arrondissant les valeurs à 10^{-4}, dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

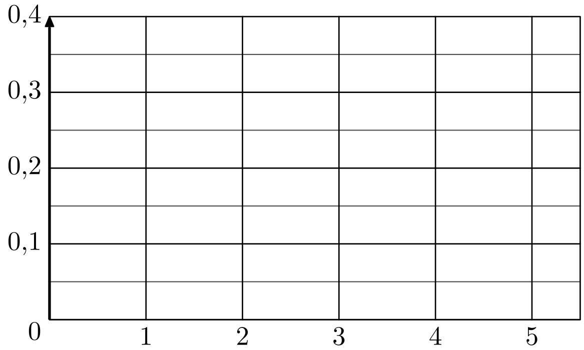
   b. Tracer le diagramme en barre représentant la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.



2. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}37$.

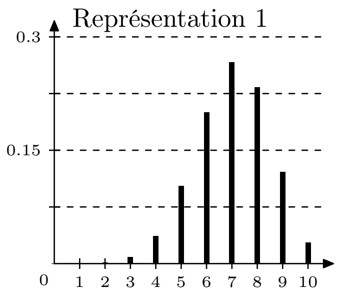
   a. A l'aide de la calculatrice et en arrondissant les valeurs à 10^{-4}, dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

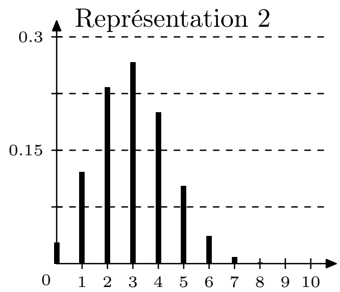
   b. Tracer le diagramme en barre représentant la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.



Exercice 4937

Des deux représentations ci-dessous et sans justification, donner celle qui représente la loi d'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}3$:





7. Loi binomiale et fonction de répartition :

Exercice 4926

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=0{,}63$.

On donnera la probabilité exacte de chacune des probabilités demandées.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$

2. Donner la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X}\geqslant 14\}$.

8. Loi binomiale, fonction de répartition et calculatrice :

Exercice 4929

On suppose qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0{,}37$

Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant 7)$ arrondie au centième près.

Exercice réservé 4939

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n=35$ et $p=0{,}35$.

Déterminer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités suivantes arrondies au millième près :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 10)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 20)$

Exercice réservé 4909

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Dans une ville, une étude montre que 87 % des habitants possèdent un téléphone portable.

On choisit successivement, au hasard et de manière indépendante trois habitants. On note $\mathcal{X}$ le nombre de personnes sélectionnés possédant un téléphone portable.

1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

On admet que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0,87 :

2. Donner, dans un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins deux de ses trois personnes possèdent un téléphone portable?

9. Loi binomiale et complémentaire :

Exercice 4928

On suppose qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}6$

1. A l'aide de la calculatrice, dresser un tableau représentant la loi de la variable $\mathcal{X}$ avec les probabilités arrondies au millième près.
2. En déduire les probabilités suivantes arrondies au centième :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}>1)$

Exercice 4927

Un vaccin est en phase de test sur une population de 100 individus. 30 d'entre eux réagissent avec ce vaccin avec de fortes fièvres. Chaque phase de test est effectué sur un groupe de 5 individus choisis au hasard et indépendemment entre chaque test.

Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chaque phase de test le nombre d'individus ayant eu une réaction avec de fortes fièvres.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les valeurs des paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour que 2 individus aient réagi au vaccin avec de la fièvre sur une phase de test.
3. Sur une phase de test, quelle est la probabilité qu'au moins 4 individus aient réagi avec de la fièvre.

Exercice réservé 4910

On arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Dans une fabrique de montres, lorsque les machines de productions sont bien réglès, 4 % des montres produites sont défectueuses.

Pour vérifier l'état de la production, on prélève 10 montres successivement, au hasard et indépendamment les unes des autres.

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ associe à ce tirage, le nombre de montres défectueuse.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 1 montre soit défectueuse? On donnera la valeur exacte et la valeur approchée au millième près.
3. Un ingénieur teste la chaine de production. Après plusieurs test de lot de 10 montres, il obtient 81 % de lots possédant au moins 1 montre défectueuse.
   Que peut-on dire de l'état de la chaîne de production?

Exercice 7487

Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.
On sait 38 % des candidats ont été recrutés.

1. Justifier que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}38$.
2. Calculer la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée.
   On donnera la valeur exacte puis une valeur du résultat arrondie à 10^{-3}.

Exercice réservé 7640

En choisissant un élève au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension, on sait que la probabilité pour que l'élève choisit soit satisfait de la demi-pension est de 0,675.

A chaque fois, on interroge un groupe de 4 élèves.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre d'élèves déclarant être satisfaits de la qualité des repas. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
2. Calculer la probabilité de l'évènement A : "*les quatre élèves sont satisfaits de la qualité des repas*".
3. Décrire à l'aide d'une phrase l'évènement $\overline{A}$ et calculer sa probabilité.

10. Intervalle de fluctuation :

Exercice 7857

Un agriculture conditionne ses tomates en fonction de leur taille *(calibre)*. A ses fournisseurs, il annonce que 40 % de ses tomates ont un calibre supérieur ou égal à 6 *(un diamètre supérieur à 47 mm)*.

Se rendant dans l'exploitation, un fournisseur prélève 30 tomates et observent que, parmi elles, 10 tomates sont d'un calibre supérieur ou égal à 6.

Ci-contre est donnée la loi cumulative d'une variable aléatoire binomiale de paramètres 30 et 0,4. On peut y extraire les résultats ci-dessous :

$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 10)\approx 0{,}2915 \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 20)\approx 0{,}9991$

L1	L2
0	2.2E-7
1	4.6E-6
2	4.7E-5
3	3.1E-4
4	0.0015
5	0.0057
6	0.0172
7	0.0435
8	0.094
9	0.1763
10	0.2915
11	0.4311
12	0.5785
13	0.7145
14	0.8246
15	0.9029
16	0.9519
17	0.9788
18	0.9917
19	0.9971
20	0.9991
21	0.9998
22	1
23	1
24	1
25	1
26	1
27	1
28	1
29	1
30	1
------	------

1. (a.) Déterminer la valeur du plus petit entier a réalisant la condition :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$

   (b.) Déterminer la valeur du plus petit entier b réalisant la condition :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$

   (c.) En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence observée pour la variable aléatoire $\mathcal{X}$. *(on arrondira les bornes à 10^{-3})*
2. Que peut-on dire de l'observation du fournisseur?

Exercice 7858

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 9 et 0,3 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(9\,;0{,}3)$

Le tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,04	0,196	0,463	0,73	0,901	0,975	0,996	1,0	1,0	1,0

Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;5]$.

Exercice 7859

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 9 et 0,5 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(9\,;0{,}5)$

Les deux tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,002	0,02	0,09	0,254	0,5	0,746	0,91	0,98	0,998	1,0

1. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)>0{,}025$?
2. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)\geqslant 0{,}975$?
3. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[2\,;7]$.

Exercice réservé 7860

Une société affirme que 80 % de ses clients sont satisfaits par ses produits.

1. Une association de consommateurs souhaite vérifier cette allégation et commande une étude portant sur 50 clients de cette société.

   (a.) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

   (b.) L'étude obtient un taux de satisfaction de 71 %. Selon cette étude, que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 %?
2. L'association renouvelle son étude qui porte cette fois sur 100 clients. Cette nouvelle étude obtient toujours un taux de satisfaction de 71 %.
   Que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 %.

Exercice réservé 7861

On considère un jeu utilisant deux urnes contenant des boules de couleurs rouges et bleues indiscernables au toucher. On suppose les tirages dans les deux urnes indépendant l'un de l'autre. Voici la composition de chacune des urnes :

- L'urne A est composée de trois boules rouges et de deux boules bleues ;
- L'urne B est composée de 12 boules rouges et de 28 boules bleues.

Chaque participant doit retirer une boule dans l'urne A, puis une boule dans l'urne B.

1. a. Construire un arbre de probabilité représentant ce jeu.

   b. Montrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge a pour valeur $\dfrac{18}{25}$

2. On répète 20 fois ce jeu de manière indépendante. On considére la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui compte le nombre de jeu où au moins une boule rouge a été tirée.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

   b. Déterminer la probabilité de $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant 18\big)$. Puis, donner la valeur approchée au millième de cette probabilité.

3. a. Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % de la loi binomiale d'une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suivant une loi binomiale de paramètres 100 et $\dfrac{18}{25}$.

   b. Une étude statistique a portée sur la répétition 100 fois de ce jeu. La fréquence d'appartion de l'évènement "*au moins une boule rouge a été obtenue*" a été de 0,55. Doit-on rejeter cette étude avec un risque de 5 %?

