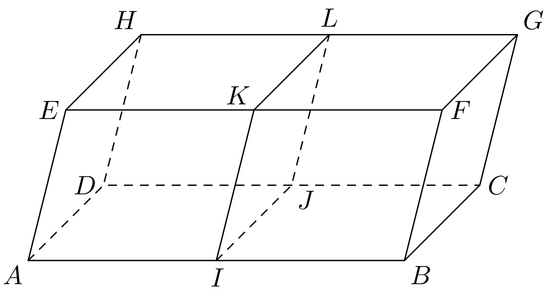
Term Spécialité/Vecteurs, droites, plans dans l'espace

1. Vecteurs de l'espace :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 2759

Dans l'espace, on considère le parallélépippède $ABCDEFGH$. On note I, J, K, L les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$, $[GH]$.



1. a. Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AJ}$.

   b. Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{ED}$.

   c. Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{DK}$.

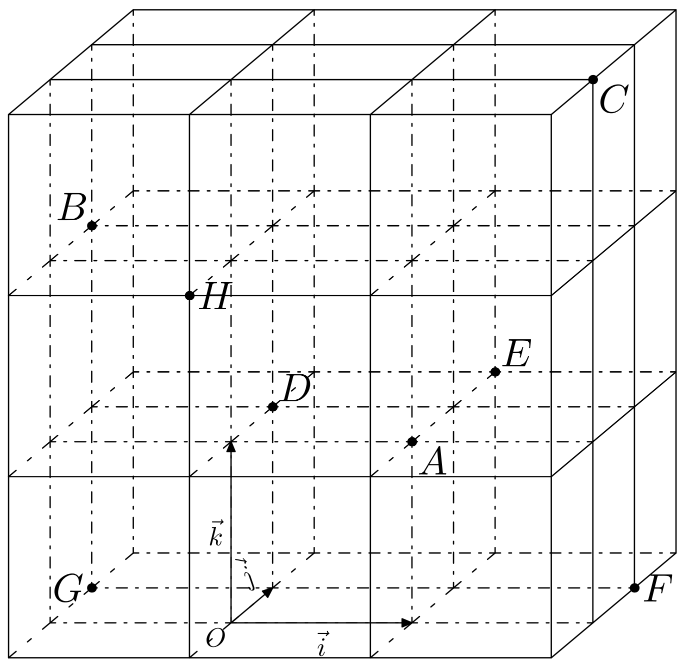
2. Donner un représentant de chaque somme suivante :

   a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{LF}=\overrightarrow{\ldots}$ b. $\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{HI}=2\cdot\overrightarrow{\ldots}$

   c. $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{\ldots B}$

Exercice 2771

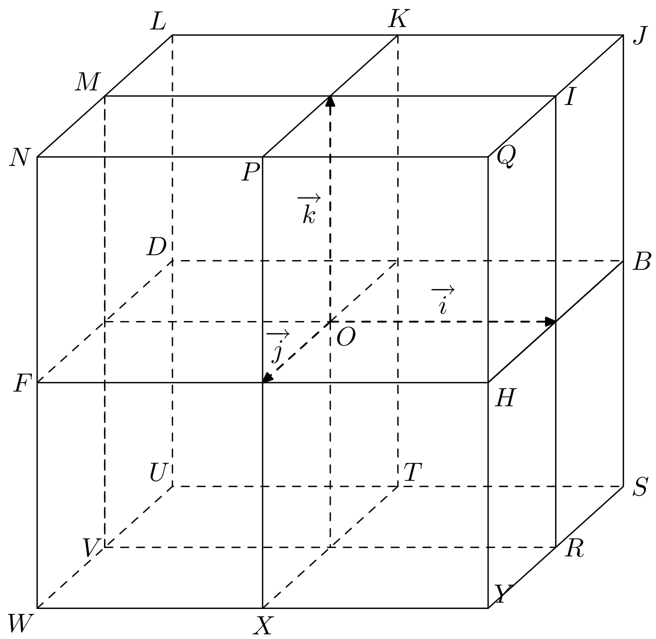
L'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$; ce repère et le quadrillage associé est représenté ci-dessous :



Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H.

Exercice 4180

Dans l'espace $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les cubes ci-dessous :



1. Quels points de la figure vérifient $y\geqslant 0$?

2. a. Le pavé droit $PQJKXYST$ est-il inclus dans le demi-espace défini par l'inéquation : $x\geqslant 0$

   b. Le pavé droit $FDBHWUSY$ est-il inclus dans le demi-espace défini par l'inéquation : $z\geqslant 0$

3. Décrire les demi-espaces suivants :

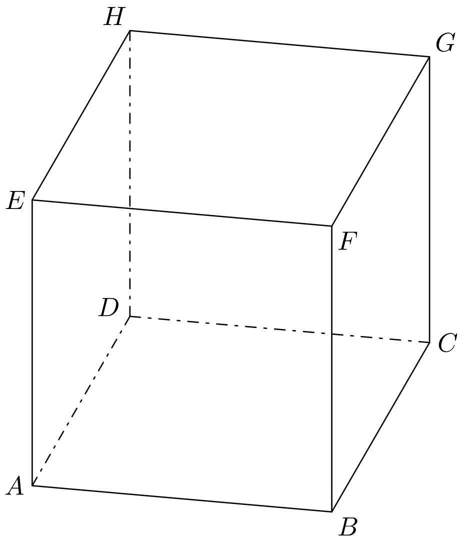
   a. $x\leqslant 0$ b. $z\geqslant 0$ c. $y-z\leqslant 0$

2. Position relative :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 6816

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



1. Donner la position relative des couples de droites suivants :

   a. (EH) et (BC) b. (EB) et (FA)

   c. (BA) et (EG) d. (EC) et (AG)

2. Donner la position relative des couples de droite et plan suivants :

   a. (EH) et (AFG) b. (HD) et (FAG)

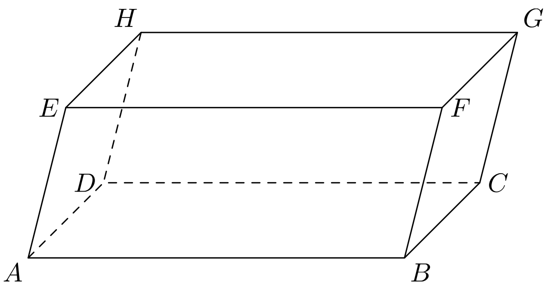
   c. (FA) et (DHG) d. (BC) et (HFA)

3. Donner la position relative des plans suivants :

   a. (HED) et (BCF) b. (HGA) et (DCB)

Exercice 2885

On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



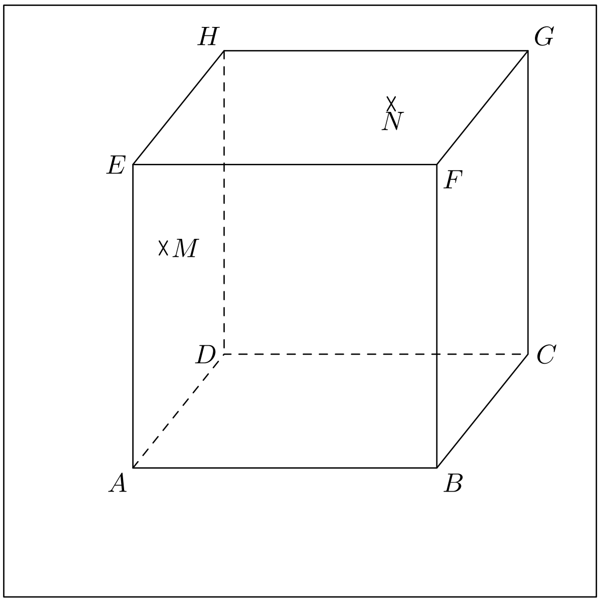
Notons O le milieu du segment $[AG]$:

1. Démontrer que le point O est milieu du segment $[EC]$.

2. Démontrer que le point O est milieu du segment $[HB]$.

Exercice 2775

On considère le cube $ABCDEFGH$ et les points M et N de l'espace.



1. Supposons le point M appartenant au plan (EFB) ; justifier que les droites (AD) et (HM) sont non-coplanaires.

2. Supposons le point M appartenant au plan (EHD) :

   a. Justfier que les droites (AD) et (HM) sont coplanaires.

   b. Placer le point L intersection des droites (AD) et (HM).

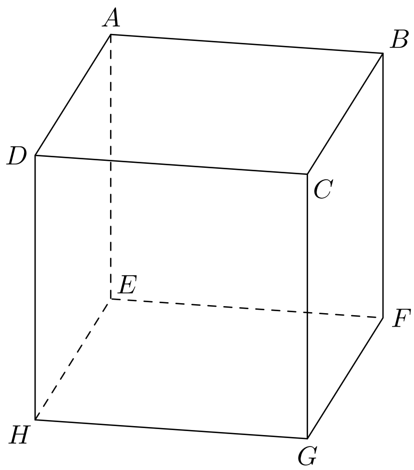
3. Suivant la position du point N dans l'espace, préciser si les droites (GF) et (HN) sont coplanaires ; si oui, placer leur point d'intersection :

   a. $N \in (HEF)$ b. $N \in (HDC)$

Exercice 585

Définition :

Deux droites sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan.



Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre :

1. Parmi les couples de droites ci-dessous, lesquelles sont coplanaires entre elles :

a. (EA) et (FB) b. (HE) et (CB)

c. (HC) et (AD) d. (GA) et (CA)

e. (HB) et (DA)

Dans la question suivante, nous allons utiliser les trois définitions suivantes :

Définition :
Deux droites sont parallèles dans l'espace si elles sont **coplanaires** *et si elles sont parallèles dans ce plan.*

Définition :
Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun ou alors lorsqu'ils sont confondus.

Définition :
Une droite et un plan sont parallèles lorsque :

- *ou bien $\mathcal{P}$ et Δ n'ont aucun point en commun.*
- *ou alors la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$*

2. Parmi les couples ci-dessous, lesquels définissent un couple d'objets parallèles :

a. (GD) et (AB) b. (EB) et (HGC)

c. (EF) et (DC) d. (BAH) et (GFH)

Vocabulaire :
On parle de droites perpendiculaires uniquement dans le cas de droites coplanaires

Définition :

- *Deux droites sont orthogonales si elles sont respectivement parallèles à deux droites perpendiculaires d'un même plan*
- *Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes droites de ce plan.*

3. Donner les couples ci-dessous qui sont orthogonaux :

a. (EF) et (HE) b. (DB) et (AB)

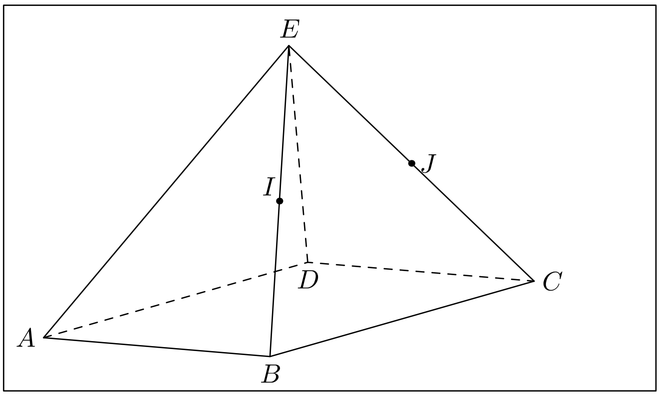
c. (HD) et (ABC) d. (HB) et (BFG)

e. (AC) et (HDF) f. (HF) et (GCF)

3. Parallélisme :

Exercice 2766

La figure ci-dessous représente la pyramide $ABCDE$ à base carrée ; les points I et J représentent les milieux respectifs des arêtes $[BE]$ et $[CE]$.



1. Justifier que les points A, D, I, J sont coplanaires.
2. a. Justifier que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.

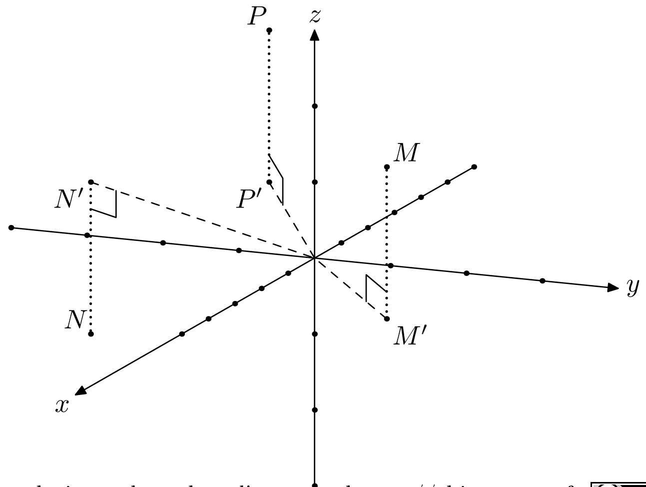
   b. On note M leur point d'intersection. Placer le point M dans la figure ci-dessus.
3. En déduire la droite d'intersection des plans (ABE) et (CDE).

4. Repérage dans l'espace :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 2776

On munit d'un repère orthonormé dont les graduations sur les axes sont représentées ; on considère les trois points M, N, P et leurs projections respectives M', N', P' sur le plan (OIJ) dont voici les représentations :



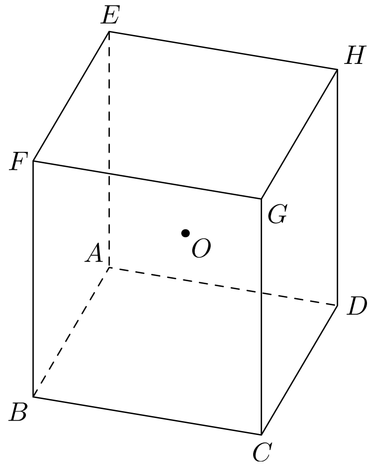
1. a. Déterminer les coordonnées du point M' appartenant au plan (OIJ).

b. Donner les coordonnées du point M.

2. Déterminer les coordonnées du point N et du point P.

Exercice 4024

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous de centre O.



Déterminer les coordonnées des points de chacun des sommets du cube ainsi que du point O dans chacun des repères suivants :

a. $\left(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BF}\right)$ b. $\left(A\,;\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$

c. $\left(O\,;\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OG}\,;\overrightarrow{OE}\right)$

5. Colinéarité :

Exercice 2779

1. Montrer que les couples suivants de vecteurs sont coliéaires :

a. $\vec{u}\,(6\,;21\,;9)$; $\vec{v}\,(4\,;14\,;6)$

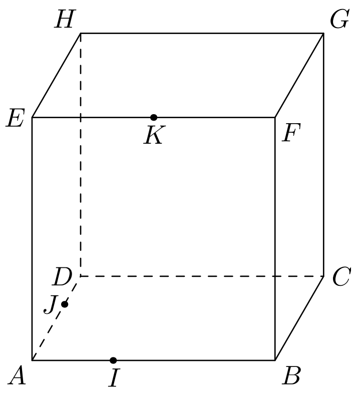
b. $\vec{u}\left(3\,;5\,;\dfrac{4}{3}\right)$; $\vec{v}\left(\dfrac{6}{5}\,;2\,;\dfrac{8}{15}\right)$

2. Justifier que les deux vecteurs suivants ne sont pas colinéaires : $\vec{u}\,(5\,;8\,;3)$; $\vec{v}\left(3\,;\dfrac{24}{5}\,;\dfrac{8}{5}\right)$

Exercice 2792

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre et les trois points définis par :

- Le point K est le milieu de $[EF]$;
- le point I vérifie la relation $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$;
- le point J vérifie la relation $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AD}$.



En utilisant le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$, montrer que les droites (IJ) et (KH) sont parallèles.

Exercice 6880

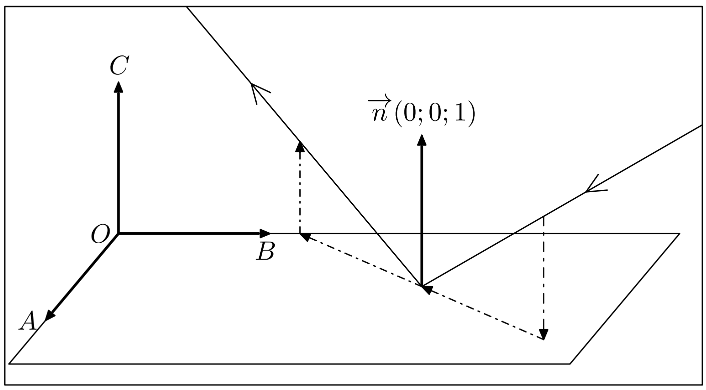
Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de "*coin de cube*", les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC}\right)$ soit un repère orthonormé.
On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux *admises* :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\,;b\,;c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(a\,;b\,;-c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\,;b\,;c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(-a\,;b\,;c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\,;b\,;c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(a\,;-b\,;c)$;



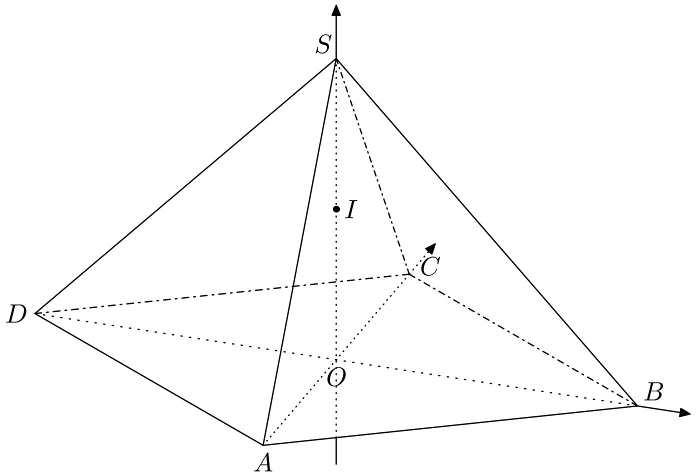
Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)

Propriété des catadioptres

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\,;b\,;c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Exercice 6886

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constitué de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB=1$.
On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $(O\,;\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OS})$ est orthonormé.

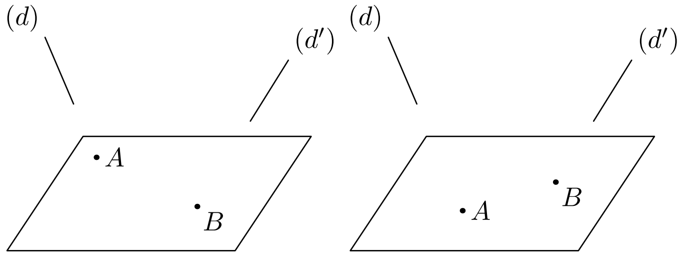
Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OS})$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK}=\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.
   a. Déterminer les coordonnées du point K.
   b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.
   c. On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
   Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
   d. Déterminer les coordonnées du point L.

6. Les objets des l'espace :

Exercice 579

Vérifier que sur les deux dessins ci-dessous, A et B sont les points d'intersection respectives des droites (d) et (d') avec le plan (P)



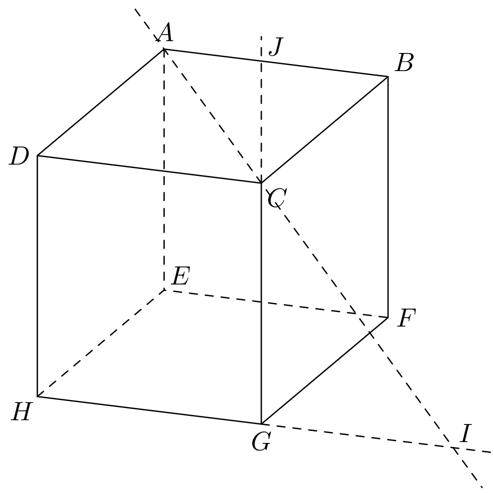
Exercice 588

Répondre par oui ou non aux questions suivantes:

1. Deux points définissent toujours une unique droite?
2. Trois points définissent toujours un unique plan?
3. L'intersection de deux plans est un point?

Exercice 581

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ dont la représentation est donnée ci-dessous:



Dans la représentation suivante, I est un point appartenant à la droite (GH) et J appartient à la droite (AB).

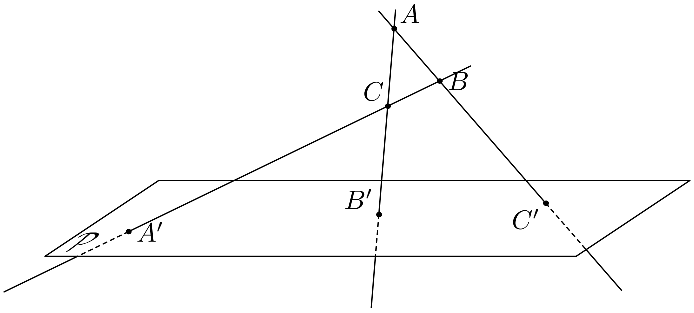
Quatre affirmations sont proposées ci-dessous. Dire si chacune de ces propositions est vrai ou fause en justifiant votre réponse.

1. Le triangle EHD rectangle en H.
2. Les droites (AC) et (GH) sont sécantes en I
3. Le quadrilatère $BCHE$ est un rectangle.
4. J est le point d'intersection de (CG) et (AB)

Exercice 587

On considère dans l'espace un plan $(\mathcal{P})$ et A, B, C n'appartenant pas à ce plan et non-alignés. On note:

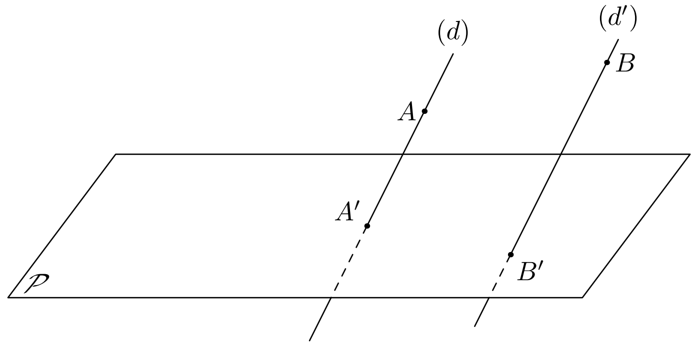
- A' le point d'intersection de la droite (BC) avec $(\mathcal{P})$;
- B' le point d'intersection de la droite (AC) avec $(\mathcal{P})$;
- C' est le point d'intersection de la droite (AB) avec $(\mathcal{P})$;



Démontrer que les points A', B' et C' sont alignés.

Exercice 584

Dans l'espace, on considère un plan $(\mathcal{P})$ et deux droites (d) et (d') parallèles. A et B sont respectivement des points des droites (d) et (d'). On nomme A' et B' les points d'intersections respectifs des droites (d) et (d') avec le plan $(\mathcal{P})$.



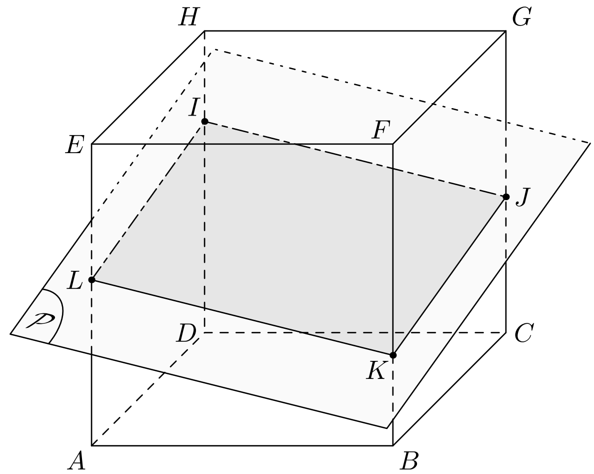
1. Justifier que les points A, B, A' et B' sont coplanaires.
2. Justifier que, sur le graphique, les droites (AB) et $(A'B')$ ne sont pas parallèles.
3. Placer, dans la figure, le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.

7. Règles d'incidence :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 2768

$ABCDEDFGH$ est un cube; on considère le plan $(\mathcal{P})$ dont la section avec le cube est le quadrilatère $IJKL$



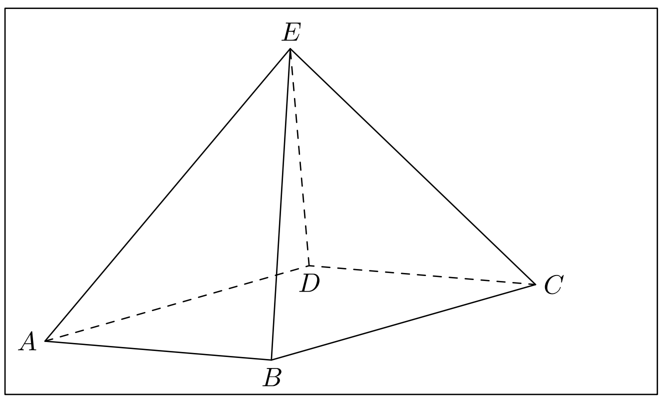
Justifier que $IJKL$ est un parallélogramme.

8. Théorème du toit :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5404

On considère la pyramide $ABCDE$, représentée ci-dessous, à base carrée :



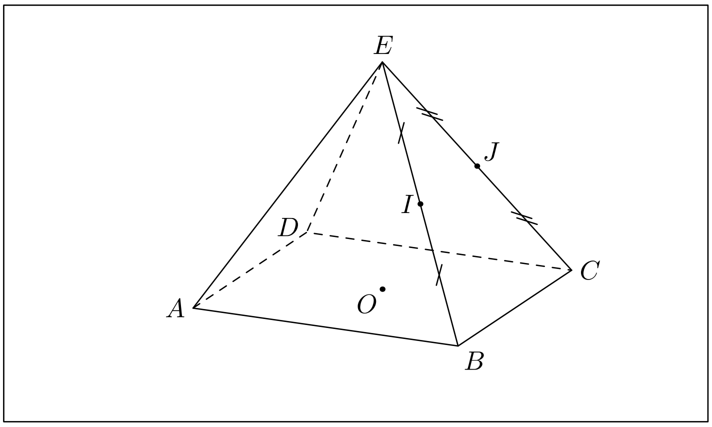
1. Déterminer la position de la droite (d) intersection des plans (ABE) et (CDE).
2. Représenter la droite (d).

255. Exercices non-classés :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 4913

On considère la pyramide $ABCDE$ à base rectangulaire $ABCD$ représentée ci-dessous :



On note I et J les milieux respectifs des segments $[EB]$ et $[EC]$, et O le centre du rectangle $ABCD$.

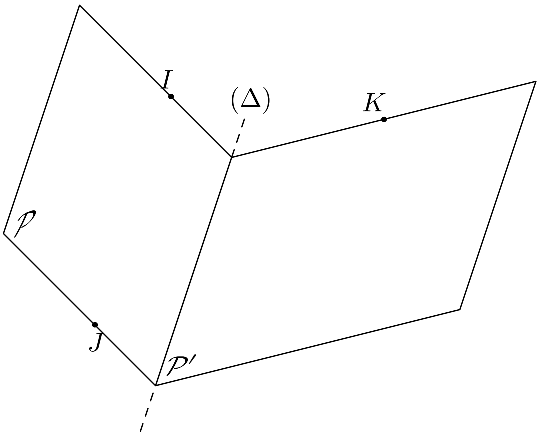
1. a. Justifier que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

   b. Justifier que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles.

2. Justifier que le droite (AD) est parallèle au plan (OIJ).

Exercice 4948

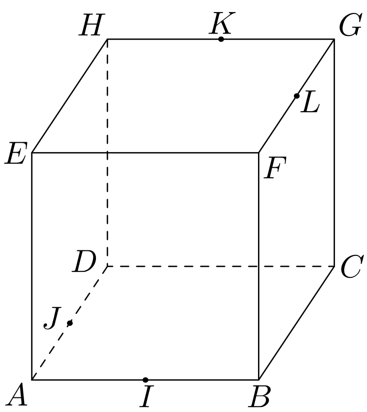
Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans sécants. Soient I, J deux points du plan $(\mathcal{P})$ et K un point du plan $(\mathcal{P}')$.



Tracer la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P}')$ et (IJK). Justifier votre démarche.

Exercice 4942

On considère le cube ci-dessous où les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[HG]$ et $[GF]$.



1. Justifier que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.

2. a. Justifier que les points H, D, B et F sont coplanaires.

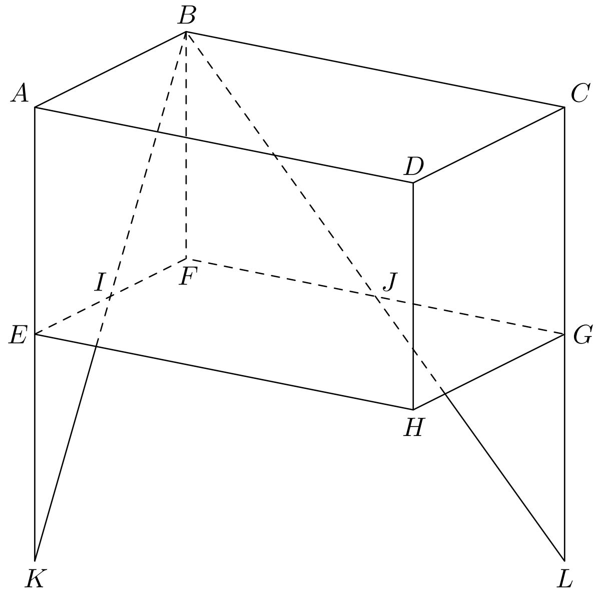
   b. Justifier que les droites (HF) et (DB) sont parallèles.

   c. Démontrer que les points I, J, K, L sont coplanaires.

3. Quel est la nature du quadrilatère $IJKL$?

Exercice 580

Dans l'espace, on considère le parallélépipède $ABCDEFGH$. On note I et J les milieux respectifs des arêtes $[EF]$ et $[FG]$. On note K l'intersection des droites (AE) et (BI) ; on note L le point d'intersection des droites (BJ) et (CG).

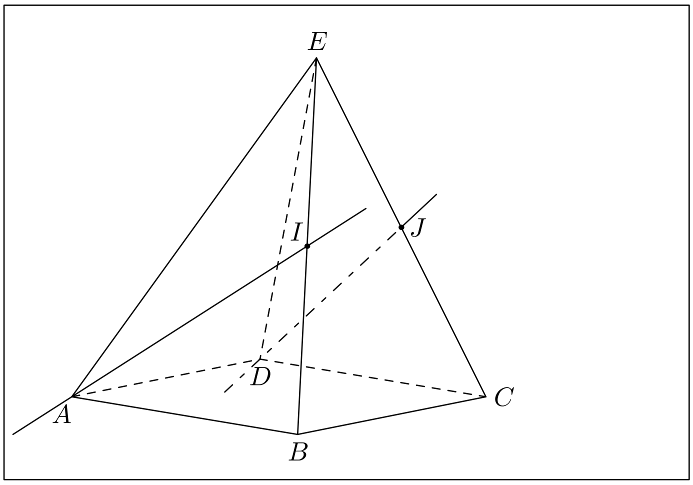


1. Justifier que les points I, J, K et L appartiennent à un même plan.

2. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

Exercice 583

Dans l'espace, on considère la pyramide $ABCDE$ à base carré ; on note I et J les milieux respectifs des arêtes $[EB]$ et $[EC]$:



1. a. Démontrer que les points A, D, I et J sont coplanaires.

   b. Démontrer, sans utiliser aucun argument graphique, que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.

   c. On note M le point d'intersection des droites (AI) et (DJ). Placer le point M sur le graphique.

2. a. Démontrer que le point M appartient au plan (AEB) et (DEC).

   b. En déduire que la droite (EM) est la droite d'intersection des plans (AEB) et (DEC).

3. En déduire que (EM) est parallèle à la base $ABCD$ de la pyramide.

