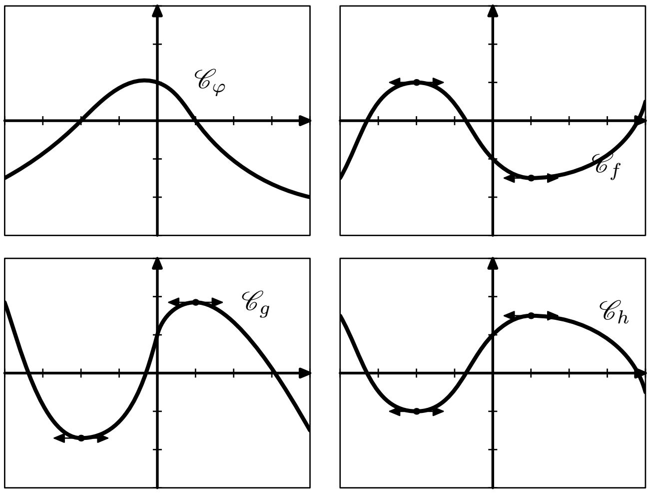
Term Spécialité/Primitives et équations différentielles

1. Introduction aux primitives :

Exercice 3575

On considère quatre fonctions φ, f, g, h définies sur l'intervalle $[-4\,;4]$. Leurs courbes représentatives sont données, ci-dessous, dans un même repère orthonormé :

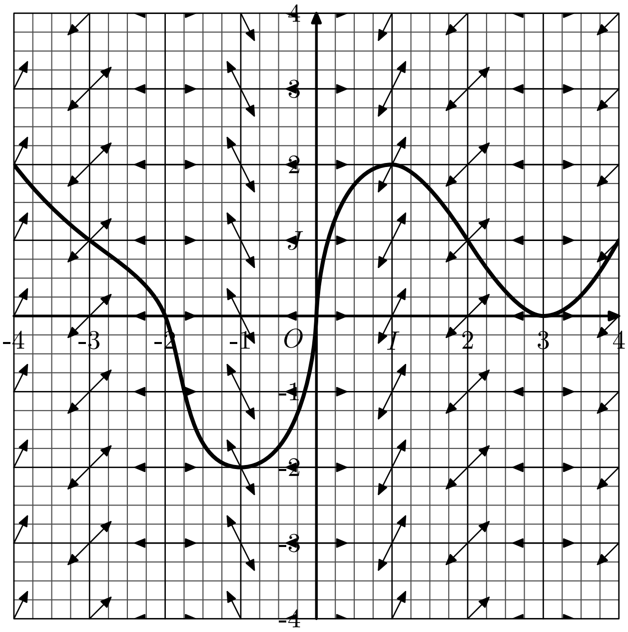


Quelle fonction, parmi f, g et h, peut admetttre la fonction φ comme fonction dérivée?

Exercice 3560

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\,;4]$ et admettant la fonction f' comme dérivée.

Dans le repère ci-dessous, est tracée la courbe représentative de la fonction f'.



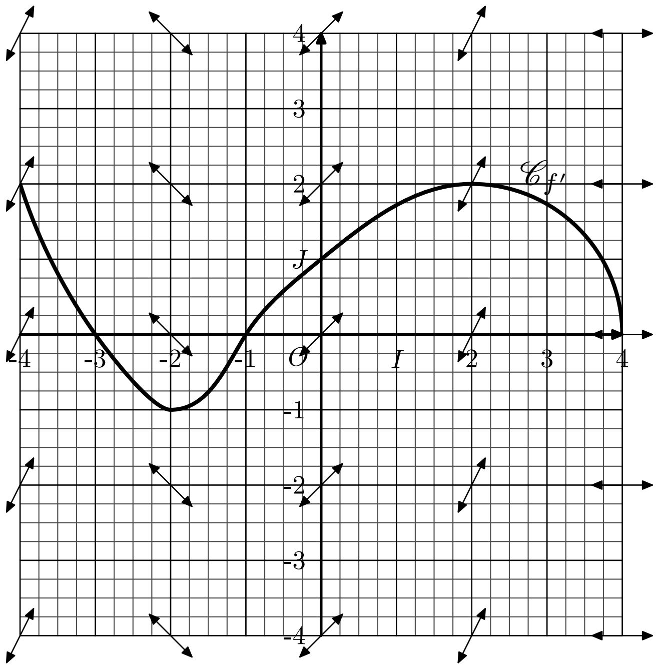
1. a. Quelle est la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 1?

   b. Donner le coefficient directeur de toutes les tangentes représentées sur la droite d'équation $x=1$.

2. Tracé une représentation "*possible*" de la fonction f dans ce repère.

Exercice 3561

On considère une fonction f dérivable sur $[-4\,;4]$. Dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_{f'}$ de la fonction f' dérivée de la fonction f.



1. a. Quelle est le nombre dérivée de la fonction f en -2.

   b. Tout au long de la droite d'équation $x=-2$ sont représentés des tangentes ; quel est le coefficient de ces tangentes.

2. Tracer une courbe représentative $\mathscr{C}_f$ acceptable de la fonction f dont les tangentes aux points d'abscisses -4, -2, 0, 2, 4 sont, dans chaque cas, une des tangentes proposées sur le graphique.

2. Equation différentielle : $y' = f$:

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 6911

Compléter les pointillés :

1. On note f une fonction vérifiant : $f'(x)=2{\cdot}x$.
   Une expression possible de f est :
   $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. On note g une fonction vérifiant : $g'(x)=x^2$.
   Une expression possible de g est :
   $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. On note h une fonction vérifiant : $h'(x)=-2$.
   Une expression possible de h est :
   $h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. On note j une fonction vérifiant : $j'(x)=\dfrac{1}{x^2}$.
   Une expression possible de j est :
   $j(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. On note k une fonction vérifiant : $k'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
   Une expression possible de k est :
   $k(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. On note ℓ une fonction vérifiant : $\ell'(x)=\mathrm{e}^x$.
   Une expression possible de ℓ est :
   $\ell(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
7. On note m une fonction vérifiant : $m'(x)=\dfrac{1}{x}$.
   Une expression possible de m est :
   $m(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 5206

Pour chaque question, déterminer l'expression d'une fonction f admettant pour dérivée l'expression proposée :

a. $f'(x) = 3$ b. $f'(x) = 2x + 1$ c. $f'(x) = x^3$
d. $f'(x) = -\dfrac{2}{x}$ e. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ f. $f'(x) = \mathrm{e}^{2x}$

Exercice 6912

Donner une primitive de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = 2{\cdot}x + 1$ b. $g(x) = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
c. $h(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ d. $j(x) = \mathrm{e}^{2\cdot x}$

3. Détermination d'une primitive d'une fonction de référence :

Exercice 5207

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 2x + 1$ b. $g(x) = 1 - 3x$ c. $h(x) = 2x^2$
d. $i(x)=x^2+x+1$ e. $j(x) = 4x^3$ f. $k(x) = 1 - 2x^2$

Exercice 3992

Déterminer une primitive de chacune des fonction suivantes :

a. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ b. $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$ c. $h(x) = \dfrac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$
d. $j(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ e. $k(x) = \dfrac{1}{x}$ f. $\ell(x) = -\dfrac{1}{2x}$
g. $m(x) = \mathrm{e}^x$ h. $n(x) = 3\mathrm{e}^x$ i. $p(x) = -\mathrm{e}^x$

4. Détermination d'une primitive de la composée de fonctions :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 5209

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = (x+3)^4$ b. $g(x) = (2-x)^3$
c. $h(x) = (2x-3)^2$ d. $j(x) = x{\cdot}(x^2+1)^6$
e. $k(x) = 3x^2{\cdot}(x^3-2)^3$ f. $\ell(x) = x^4{\cdot}(1-x^5)^2$

Exercice 5221

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 3x - 5x^5$ b. $g(x) = \dfrac{1}{x} - x$
c. $h(x) = x{\cdot}\left(2x^2-3\right)^4$ d. $j(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{x^2-4x}}$
e. $k(x) = \dfrac{6x+2}{3x^2+2x-3}$ f. $\ell(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2}$

Exercice 5210

Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = \dfrac{2}{2x+3}$ b. $g(x) = \dfrac{1}{1-3x}$
c. $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ d. $j(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$
e. $k(x) = \dfrac{2}{(3x+1)^2}$ f. $\ell(x) = \dfrac{x}{x^4+2x^2+1}$

5. Quelques primitives particulières :
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 6006

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = (x-1)\cdot e^x$
Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. En déduire l'expression d'une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x\cdot e^x$

Exercice 6005

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par l'expression :
$f(x) = \dfrac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}$
Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

2. En déduire l'expression d'une primitive de la fonction racine carrée.

6. Recherche d'une primitive :
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5222

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :
$g(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$:
$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

2. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

7. Détermination d'une primitive avec condition initiale :
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3950

Pour chaque question, déterminer la primitive de la fonction vérifiant la condition proposée :

a. $f(x) = \dfrac{x^2-2\cdot x+4}{x}$; $F(1) = 2$

b. $g(x) = x\cdot e^{x^2}$; $G(1) = 3\cdot e$

c. $h(x) = \dfrac{5}{(4\cdot x-3)^2}$; $H(1) = 1$

d. $j(x) = \dfrac{2\cdot x-3}{x^2-2x+1}$; $J(0) = -2$

Exercice 6917

On considère les deux fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\ln(x^2+1)$; $g(x)=\ln(2\cdot x^2+2)$

1. Déterminer l'image de 0 par chacune de ces deux fonctions.

2. Etablir que ces deux fonctions sont des primitives d'une même fonction qu'on précisera.

8. Equations différentielles : exemples de solutions :

Exercice 3647

On considère l'équation différentielle : (E) : $y'+y=e^{-x}$

Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x)=x\cdot e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle.

Exercice 3663

1. Déterminer l'expression de la fonction f vérifiant l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 2 \end{cases}$$
Justifier votre réponse.

2. Déterminer l'expression de la fonction g vérifiant l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} g' = 2\cdot g \\ g(0) = 1 \end{cases}$$
Justifier votre réponse.

3. Déterminer l'expression de la fonction h vérifiant

l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} h' = 2\cdot h \\ h(0) = 2 \end{cases}$$

Justifier votre réponse.

Exercice 3664

1. On considère l'équation différentielle :
(E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :
$u(x) = x\cdot\mathrm{e}^{-x}$
est une solution de l'équation différentielle (E).

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \dfrac{9}{2}\cdot\mathrm{e}^{-2x} - 3\cdot\mathrm{e}^{-3x}$

Montrer que la fonction f vérifie l'équation différentielle :
$y' + 2y = 3\cdot\mathrm{e}^{-3x}$

Exercice 3673

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vérifiant la condition (E) :

pour tout nombre réel x strictement positif :
$x\cdot f'(x) - f(x) = x^2\cdot\mathrm{e}^{2x}$

1. Montrer que si une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$
vérifie :
(E) : $\begin{cases} \text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif :} \\ \quad g'(x) = \mathrm{e}^{2x} \end{cases}$

2. Conjecturer l'expression des fonctions g vérifiant :
$g'(x) = \mathrm{e}^{2x}$

3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$?

Exercice 3690

Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x + \dfrac{1-k\cdot\mathrm{e}^x}{1+k\cdot\mathrm{e}^x}$

1. Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :
(E) : $2\cdot y' = (y-x)^2 + 1$.

2. En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8474

On considère l'équation différentielle : $y' + \dfrac{3\cdot y}{x} = 1$

et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{x}{4}$

Montrer que la fonction f est une solution de cette équation différentielle.

Exercice 8475

On considère l'équation différentielle : $2\cdot y' + x\cdot y = 0$

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ci-dessous est solution de cette équation différentielle :

$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$

9. Equations differentielles : $y' = ay$:

Exercice 3679

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a. $y' = -3y$ b. $y' - y = 0$

c. $5y' - 2y = 0$ d. $y = -3y'$

Exercice 3680

Pour chaque question, déterminer la valeur de $a \in \mathbb{R}$ afin que la fonction f soit une solution de l'équation différentielle :
$y' = a\cdot y$

a. $f(x) = -3\cdot\mathrm{e}^{4x}$ b. $f(x) = 4\cdot\mathrm{e}^{0{,}2x}$

Exercice 3681

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

a. $y' - 3y = 0$; $f(0) = 2$

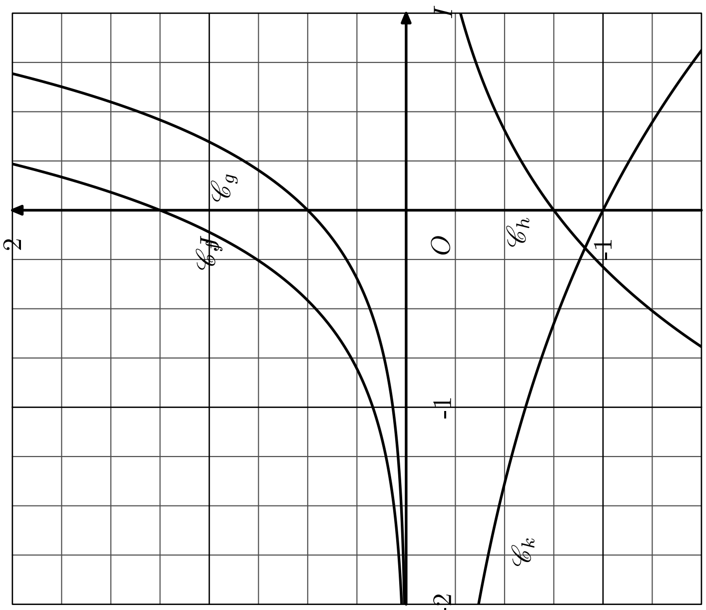
b. $2y' + 3y = 0$; $f(0) = -1$

c. $3y' - 2y = 0$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2$

d. $y - 3y' = 0$; $f(6) = \mathrm{e}^3$

Exercice 3683

Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbe représentative de fonctions vérifiant l'équation différentielle :
$y' = a\cdot y$ pour $a \in \mathbb{R}$

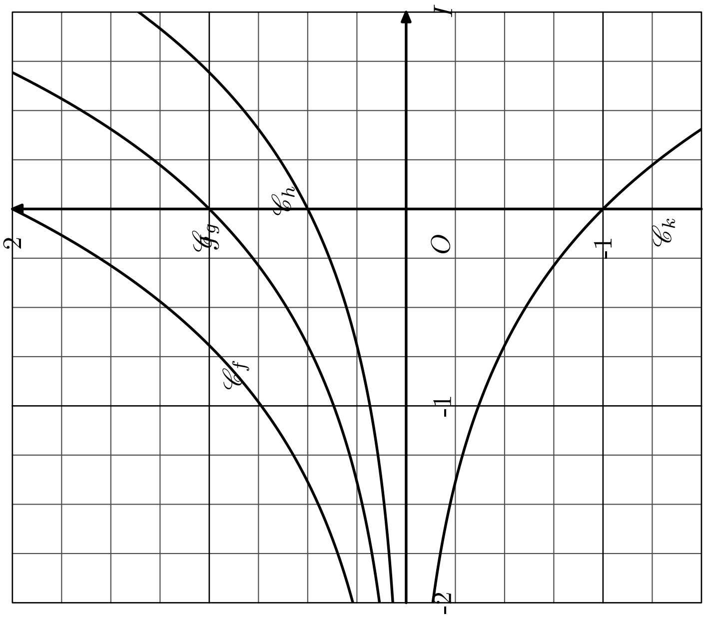


En observant les tangentes à ces courbes au point d'abscisse 0, déterminer l'équation différentielle vérifiée par chacune de ces fonctions.

Exercice 3682

Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbe représentative de fonctions vérifiant l'équation différentielle :

$y' = y$



Déterminer les conditions initiales définissant chacune de ses fonctions.

10. Equations differentielles : $y' = ay + b$:

Exercice 3692

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' + y = 2$

b. $y' - 3{\cdot}y = -3$

c. $6{\cdot}y = 3{\cdot}y' + 2$

d. $5{\cdot}y = \dfrac{3}{2}{\cdot}y' + \dfrac{1}{3}$

Exercice 3693

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $4{\cdot}y' - y = 4 \quad ; \quad y(1) = e$

b. $15{\cdot}y' + 24{\cdot}y = 12 \quad ; \quad y\left(\dfrac{5}{4}\right) = 2$

c. $-\dfrac{3}{2}{\cdot}y' + \dfrac{1}{4}{\cdot}y = -1 \quad ; \quad y(3) = 6 + 2{\cdot}e$

11. Equations différentielles : $y' = ay + f$:

Exercice 3685

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)}{\mathrm{e}^x}$

Vérifier que f est solution de l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

Exercice 3686

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}{\cdot}\ln\left(1 + 2{\cdot}\mathrm{e}^x\right)$

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \; y' + 2{\cdot}y = 2{\cdot}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + 2{\cdot}\mathrm{e}^x}$$

1. Vérifier que la fonction f est solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle :
   $(E') : \; y' + 2y = 0.$
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Exercice 4304

On considère les deux équations différentielles :

$(E) : \; y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

$(E') : \; y' + y = 0$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E').
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Exercice 3655

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\dfrac{9}{2}\cdot e^{-2x}-3\cdot e^{-3x}$

Soit l'équation différentielle : (E) : $y'+2y=3e^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle : (E') : $y'+2y=0$.

2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x)=\dfrac{9}{2}\cdot e^{-2x}$ est solution de (E').

3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x)=-3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

4. En remarquant que $f=g+h$, montrer que f est une solution de (E).

Exercice 3678

La fonction f est définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
$f(x)=\left(20x+10\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :
(E) : $y'+\dfrac{1}{2}y=20\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$

1. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

   a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ de l'équation différentielle :
   (E') : $y'+\dfrac{1}{2}\cdot y=0$

   b. Résoudre l'équation différentielle (E').

   c. Conclure.

Exercice 3684

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle : $y'-2y=e^{2x}$, (E)

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :
$u(x)=x\cdot e^{2x}$
est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle :
$y'-2\cdot y=0 \quad (E_0)$

3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0).

4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Etude d'une fonction

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left(x+1\right)\cdot e^{2x}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1. Etudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

Partie C - Résolution d'une équation

1. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $\left[0{,}2\,;0{,}3\right]$.

2. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.

3. Sur le papier millimétré ci-dessous, où les unités sont de $10\,cm$ en abscisses et $5\,cm$ en ordonnées, tracer l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ pour x appartenant à $\left[0\,;0{,}3\right]$.
Faire apparaître x_0 sur le graphique.

Exercice 3687

On cherche à résoudre l'équation différentielle :
(1) : $y'-2y=x\cdot e^{x}$

1. Résoudre l'équation différentielle :
(2) : $y'-2y=0$,
où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$u(x)=\left(a\cdot x+b\right)\cdot e^{x}$

   a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

   b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u+v$ est solution de (1).

   c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Exercice 3966

On considère l'équation différentielle : (E) : $y'=2\cdot y+\cos x$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x)=a\cdot\cos x+b\cdot\sin x$
soit une solution f_0 de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle : (E_0) : $y'=2\cdot y$.

3. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f-f_0$ est solution de (E_0).

4. En déduire les solutions de (E).

5. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

Exercice 3689

On considère une l'équation différentielle :

$$(E):\ y'-3y=\frac{-3e}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\mathrm{e}^{-3x}\cdot\varphi(x)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x)-3\cdot\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.

2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\varphi(0)=\dfrac{e}{2}$.

12. Autres équations différentielles :

Exercice 3676

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écrant plat, en fonction de l'année.

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x=0$ en 2005, $g(0)=1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $\left[0\,;+\infty\right[$ de l'équation différentielle :

$$(E):\ y'=\frac{1}{20}\cdot y\cdot(10-y)$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et on pose $z=\dfrac{1}{y}$

   a. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle :
   $$(E_1):\ z'=-\frac{1}{2}\cdot z+\frac{1}{20}$$

   b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
   $$g(x)=\frac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+1}$$

3. Etudier les variations de g sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement déassera-t-il 5 millions?

Exercice 3691

En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongueurs vivants au temps t *(exprimé en années)* dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2)\ \left\{\begin{aligned} u'(x)&=\frac{u(t)}{4}-\frac{\left[u(t)\right]^2}{12} \quad \text{pour } t\in\mathbb{R}_+^* \\ u(0)&=1\end{aligned}\right.$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

1. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t)>0$. On considère, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, la fonction h définie par $h=\dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement, si la fonction h satisfait aux conditions :
   $$(E_3)\ \left\{\begin{aligned} h'(t)&=-\frac{1}{4}\cdot h(t)+\frac{1}{12} \quad \text{pour } t\in\mathbb{R}_+^* \\ h(0)&=1\end{aligned}\right.$$
   où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle :
   $$y'=-\frac{1}{4}\cdot y+\frac{1}{12}$$
   et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

3. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 3773

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ vérifiant l'équation différentielle : $(E):\ x\cdot f'(x)-(2x+1)\cdot f(x)=8\cdot x^2$

1. a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par :
   $$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$
   est solution de l'équation différentielle :
   $$(E'):\ y'=2\cdot y+8$$

   b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x)=x\cdot h(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 3646

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ vérifiant pour tout nombre réel x strictement positif :
   $$xf'(x)-f(x)=x^2\cdot\mathrm{e}^{2x}$$
   Soit g la fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par : $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

   Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :
   $$g'(x)=\mathrm{e}^{2x}$$

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
   $$h(x)=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}-\frac{e}{2}x$$
   Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de $h(x)$.

Exercice 3688

On appelle (E) l'équation différentielle : $y''-y=0$,
où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Déterminer les réels r tels que la fonction h, définie par $h(x)=\mathrm{e}^{r\cdot x}$, soit solution de (E).

2. Vérifier que les fonction φ définies par $\varphi(x)=\alpha\cdot\mathrm{e}^{x}+\beta\cdot\mathrm{e}^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des so-

lutions de (E). On admet qu'on obteint ainsi toutes les solutions de (E).

3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2\,;\frac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\frac{5}{4}$.

