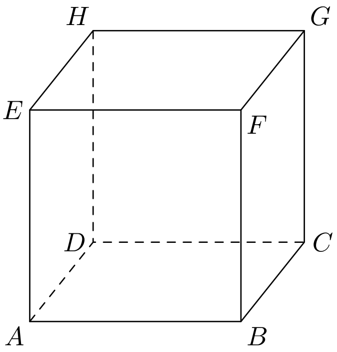
Term Spécialité/Orthogonalite, distance dans l'espace

1. Droites et orthogonalité :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5398

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



1. Justifier que les droites (EF) et (GC) sont orthogonales.
2. Justifier que les droites (AD) et (HF) ne sont pas orthogonales.
3. Les droites (AG) et (BG) sont-elles orthogonales?

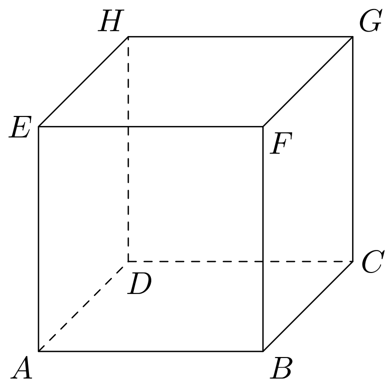
2. Droites, plans et orthogonalité :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 576

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté $5\,cm$ représenté ci-dessous :

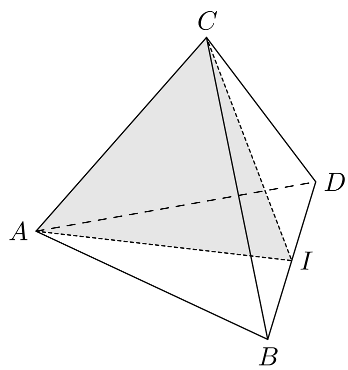
1. Montrer que le plan (ABC) est orthogonal à la droite (AE)
2. Calculer la longueur de la diagonale $[EC]$.



Exercice 5397

La figure ci-contre représente un tétraèdre régulier $ABCD$ et I le milieu du segment $[BD]$.

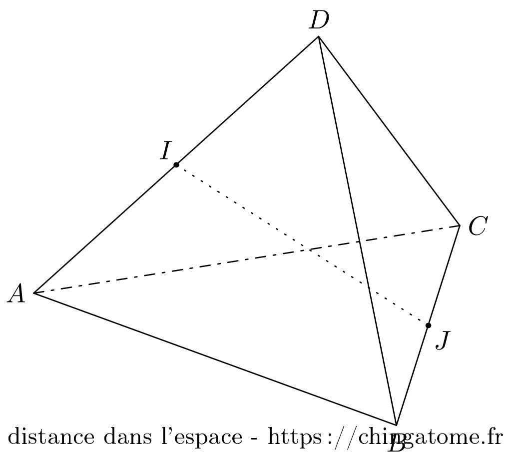
Justifier que la droite (BD) est orthogonale au plan (AIC).



3. Plan médian :

Exercice 6966

Dans l'espace, on considère le tétraèdre régulier $ABCD$ représenté ci-dessous :



Les points I et J sont respectivement les milieux des segments $[AD]$ et $[BC]$.

1. a. Justifier que le plan (JAD) est le plan médian du segment $[BC]$.

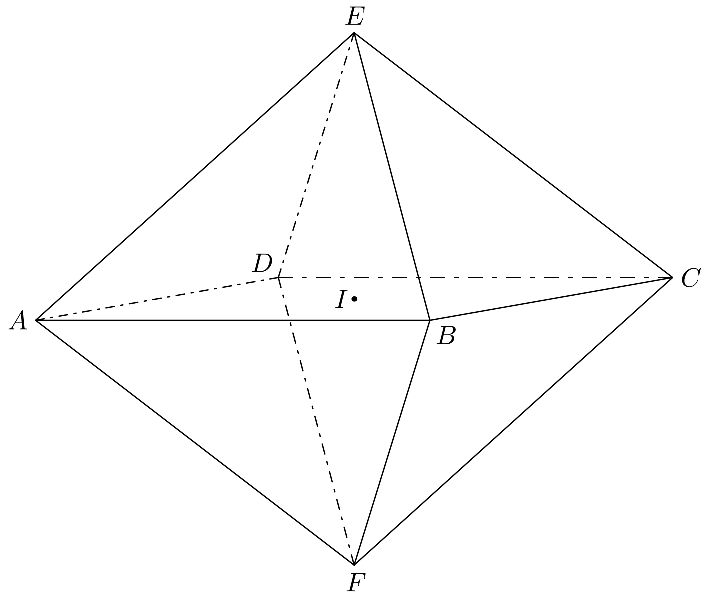
   b. Quelle est la position relative des droites (BC) et (IJ)?

2. Justifier que les droites (AD) et (IJ) sont perpendiculaires.

3. Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles? Justifier votre réponse.

Exercice 6868

On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée ci-dessous. Toutes les arêtes sont de longueur 1.



1. Justifier que les droites (DE) et (FB) sont parallèles.

2. Justifier que les plans (ABF) et (CED) sont parallèles.

4. Distance dans l'espace :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 2963

On rappelle les deux formules où A et B sont deux points de l'espace et I est le milieu du segment $[AB]$:

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Dans l'espace muni d'un repère $(O\,;I\,;J\,;K)$ orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :

$$A(3\,;-1\,;5)\quad;\quad B(-2\,;2\,;3)\quad;\quad C(-1\,;-2\,;4)\quad;\quad D\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;4\right)$$

1. Les points A, B, C sont-ils alignés?

2. Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.

3. Justifier que le point D est le pied de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

Exercice 2777

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J\,;K)$. On considère les trois points A, B, C définis par leurs coordonnées :

$$A\,(180\,;153\,;96)\quad;\quad B\,(180\,;135\,;120)\quad;\quad C\,(190\,;133\,;106)$$

1. Montrer que les points A, B, C appartiennent à une même sphère $\mathscr{S}$ de centre O.

2. Etablir que le triangle ABC est rectangle C.

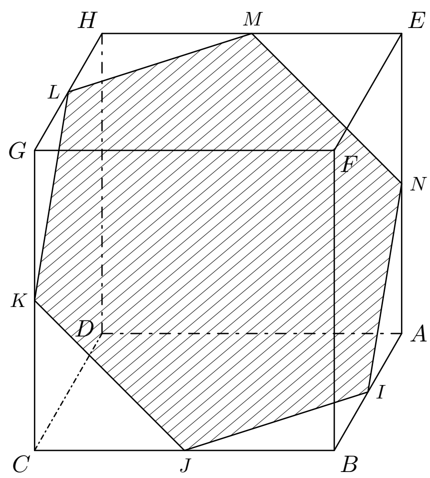
3. a. Est-ce qu'un des côtés du triangle ABC est un diamètre de la sphère $\mathscr{S}$?

   b. Pouvez-vous citer une propriété du plan qui ne peut s'étendre à l'espace?

Exercice 6752

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. On munit l'espace du repère $\left(C\,;\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CG}\right)$ orthonormal.

Les points I, J, K, L, M, N sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[EA]$.



1. Déterminer les coordonnées des points I, K et L.

2. a. Déterminer les coordonnées du point O milieu du segment $[IL]$.

   b. Déterminer les longueurs OK et KL.

3. On admet que le polygone $IJKLMN$ est un hexagone régulier. Ainsi, le point O est le centre de ce polygone.

   a. Donner la mesure de l'angle $\widehat{KOL}$.

   b. Déterminer l'aire du triangle KOL.

5. Définition du produit scalaire :

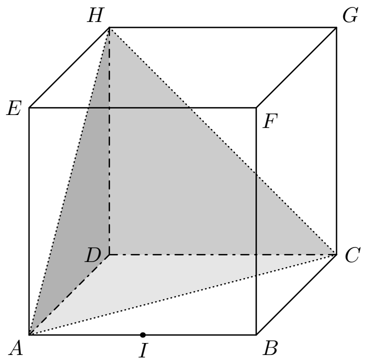
Exercice 8891

Définition : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est défini par le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ où :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ *(resp.* $\overrightarrow{AC}$*)* est un représentant du vecteur $\vec{u}$ *(resp.* $\vec{v}$*)*.
- le calcul du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ s'effectue dans un plan contenant les points A, B, C.

Proposition : soit A, B, C trois points définissant les deux vecteurs non-nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour valeur :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-contre.



Le point I est le milieu du segment $[AB]$.

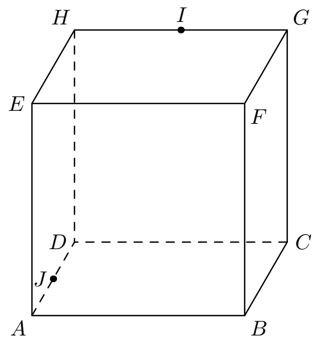
1. Déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FB}$
2. Déterminer le produit scalaire : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$
3. a. Quelle est la nature du triangle ACH ?
   b. En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$?

Exercice 8892

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls de l'espace.

- les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux entre eux si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires entre eux :
  - $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même sens : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
  - $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de sens contraire : $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-contre où les points I et J sont respectivement les milieux des segments $[GH]$ et $[AD]$.



En utilisant les propriétés du cube et du carré, déterminer la valeur des produits scalaires :

a. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{DH}$ b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$ c. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GF}$

6. Formule de bilinéarité :

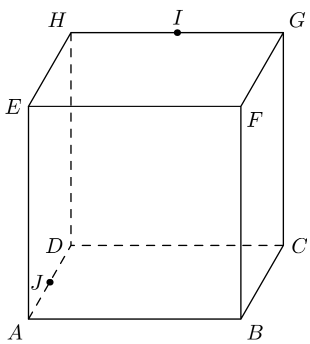
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5410

Proposition : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et k un nombre réel. On a les identités suivantes :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot\left(k\cdot\vec{v}\right) = \left(k\cdot\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-contre où les points I et J sont respectivement les milieux des segments $[GH]$ et $[AD]$.



Méthode : dans le calcul de produit scalaire, on utilise la relation de Chasles pour décomposer les deux vecteurs par des vecteurs colinéires ou orthogonaux entre eux. Cela facilite le calcul des produits scalaires. En voici un exemple :

Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{GF}$, on utilise la décomposition du vecteur $\overrightarrow{IE}$:
$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HE}$

On peut alors écrire :
$$\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{GF} = \left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HE}\right)\cdot\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{GF}$$
$$= 0 + HE\times GF = 0 + 1\times 1 = 1$$

En utilisant également la relation de Chasles, déterminer la valeur des produit scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HG}$ b. $\overrightarrow{JF}\cdot\overrightarrow{AB}$ c. $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{EF}$

7. Calcul de produit scalaire :

Exercice 8890

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. On considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\,(1\,;2\,;3)$ et $\overrightarrow{v}\,(2\,;-1\,;1)$, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.

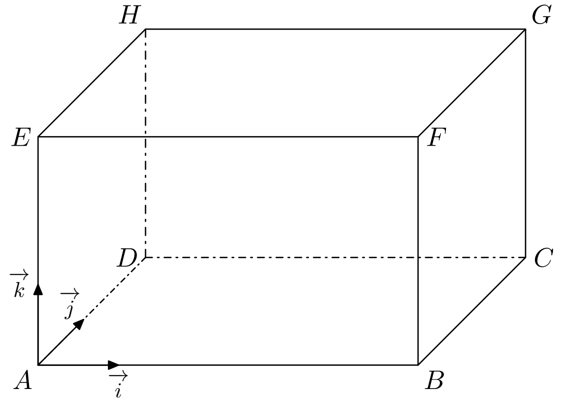
2. On considère les deux vecteurs $\overrightarrow{w}\,(-2\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{t}\,(-1\,;1\,;-1)$, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{t}$.

Exercice 8921

Proposition : pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

- $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$

On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



On munit l'espace du repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$ représenté ci-dessus. On a alors les mesures :

$AB = 10 \quad ; \quad AD = 5 \quad ; \quad AE = 4$

1. Déterminer les valeurs de $\|\overrightarrow{AC}\|$, $\|\overrightarrow{CG}\|$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CG}$.

2. En déduire la mesure de la diagonale $[AG]$.

8. Produit scalaire et orthogonalité :

Exercice 2778

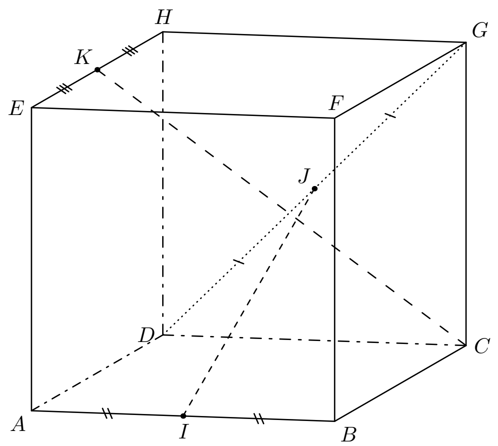
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points suivants :

$A\,(6\,;5\,;1) \quad ; \quad B\,(-4\,;2\,;-4) \quad ; \quad C\,(4\,;7\,;2)$

Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en C.

Exercice 8893

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous et où les points I, J, K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[DG]$, $[CK]$.

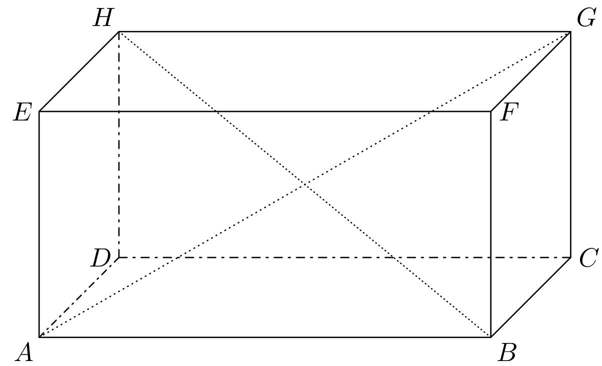


On considère l'espace muni du repère $\left(D\,;\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH}\right)$.
Montrer que les droites (IJ) et (CK) sont orthogonales.

Exercice 8920

On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous où :

$AB = a$ avec $a\in\mathbb{R}_+^* \quad ; \quad AD = 1 \quad ; \quad AE = 1$



1. Justifier que les droites (HB) et (AG) sont coplanaires.

2. Déterminer la valeur de a afin que les droites (HB) et (AG) sont perpendiculaires.

9. Déterminer la mesure d'un angle :

Exercice 4082

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé direct.

On considère les points :

$A(-2\,;0\,;1) \quad ; \quad B(1\,;2\,;-1) \quad ; \quad C(-2\,;2\,;2)$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.

2. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

3. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Exercice 4310

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les trois points :

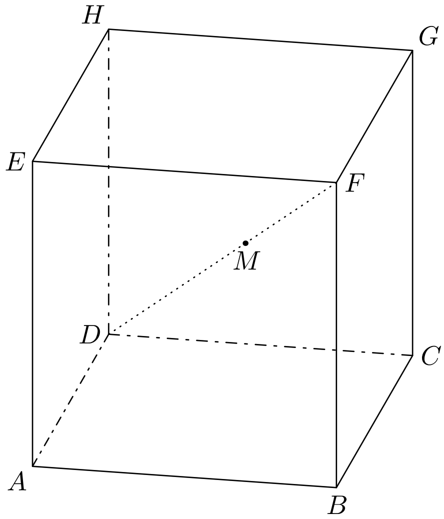
$E(2;1;-3)$; $F(1;-1;2)$; $G(-1;3;1)$

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse :

une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{FEG}$, arrondie au degré, est 50^o.

Exercice 6967

On considère un cuble $ABCDEFGH$ dont la représentation en perspective cavalière est donnée ci-dessous :



Les arêtes sont de longueur A. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$

A tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que :

$\overrightarrow{DM}=x\cdot\overrightarrow{DF}$

On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$.

On a : $0\leqslant\theta\leqslant\pi$

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

2. On admet que le point M a pour coordonnées $M(x;x;x)$.

   Montrer que : $\cos(\theta)=\dfrac{3\cdot x^2-4\cdot x+1}{3\cdot x^2-4\cdot x+2}$

   (On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$)

10. Vecteurs normaux à un plan :

Exercice 5411

Définition : soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace admettant les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-colinéaires pour vecteurs directeurs. Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est dit **normal** au plan $\mathcal{P}$ si il est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$A(0;1;-1)$; $B(1;-1;-8)$; $C(-1;0;0)$

1. Déterminer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{u}$.

2. Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{u}(3;-2;1)$ relativement au plan plan (ABC).

Exercice 5412

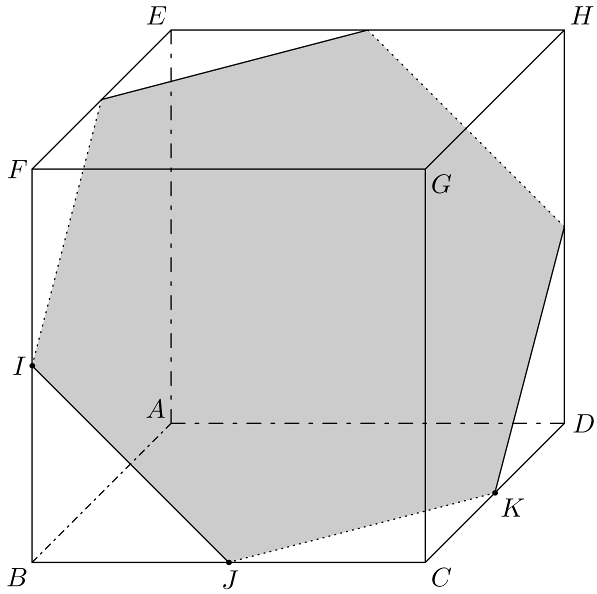
Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$A(1;0;0)$; $B(1;1;1)$; $C(7;2;-1)$

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}(-1;2;-2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 8900

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[CD]$.



Ci-dessus est représenté le plan (IJK).

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées A, G, I, J et K dans ce repère.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

11. Déterminer un vecteur normal à un plan :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 8919

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé, on considère un plan $(\mathcal{P})$ admettant les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(2\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{v}\,(2\,;-1\,;-2)$ non-colinéaires pour vecteurs directeurs.

Soit $\overrightarrow{n}\,(x\,;y\,;z)$ un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.

1. Montrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}$ vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

2. On note $\overrightarrow{n}'$ le vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ ayant 1 pour cote et on note ses coordonnées : $\overrightarrow{n'}\,(x'\,;y'\,;1)$

   a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}'$.

   b. Proposer un vecteur $\overrightarrow{n}''$ normal au plan $(\mathcal{P})$ à coordonnées entières.

Exercice 8901

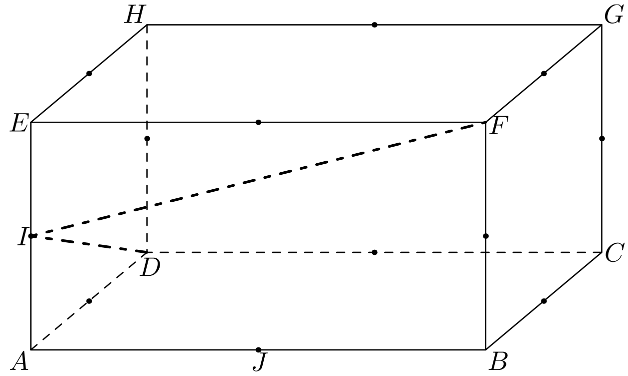
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

Pour chacune des questions, déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ non-nul et orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$\overrightarrow{u}\,(5\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{v}\,(-1\,;1\,;2)$

Exercice 8902

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



Les point I et J sont les milieux respectifs des segments $[AE]$ et $[AB]$. Les milieux des différentes arêtes sont représentés sur la figure.

1. Représenter la section du plan (DIF) et du parallélépipède. Justifier votre construction.

2. On munit le plan du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AJ}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ orthonormé. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$, à coordonnées entières, normal au plan (DIF).

12. Projeté orthogonal sur un plan :

Exercice 8905

Définition - proposition :
Dans l'espace muni, on considère un point A et un plan $(\mathcal{P})$. On appelle **projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$**, l'unique point M intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$

Corollaire : dans l'espace, on considère un point A et un plan $(\mathcal{P})$. Le projeté H du point A sur le plan $(\mathcal{P})$ est l'unique point du point $(\mathcal{P})$ tel que la droite (AH) est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

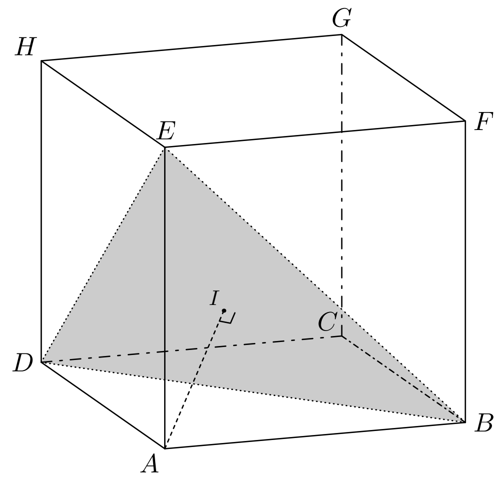
$ABCDEFGH$ est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point I de coordonnnées $I\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

1. a. Etablir l'égalité : $\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DI}$

   b. Montrer que le point I appartient au plan (BDE).

2. Montrer que le point I est le projeté du point A sur le plan (BDE).



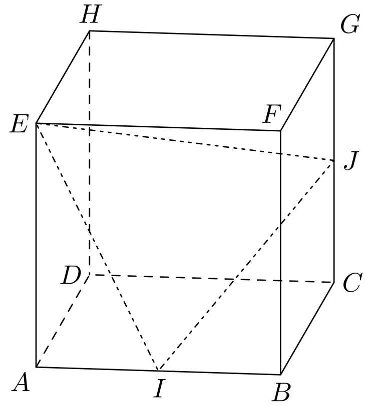
Exercice 8918

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé, on considère le point $M\,(5\,;2\,;-1)$ et le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $A(5;-6;-6)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}(2;1;2)$ pour vecteur normal.

Montrer que le point $H\,(1;0;-5)$ est le projeté orthogonal du point M sur le plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 8909

On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et on note I et J les milieux des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. On utilisera le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$



On note M le point de coordonnées :

$$M\left(\frac{1}{2}\,;\frac{2}{5}\,;\frac{4}{5}\right)$$

1. Montrer que le point M est le projeté du point I sur le plan (EFJ)

2. Montrer que le volume du tétraèdre $EFIJ$ est égal à $\frac{1}{6}$

13. Distance à un plan :

Exercice 8910

Proposition : dans l'espace muni, on considère un point A et un plan $(\mathcal{P})$. On note H le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$. La distance AH a pour valeur :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

Définition : dans l'espace, on considère un point A et un plan $(\mathcal{P})$, on appelle **distance du point A au plan $(\mathcal{P})$**, la distance du point AH où le point H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$

Dans l'espace muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{l})$ orthonormé, on considère les quatres points :
$A(2;2;0)$; $B(4;-4;1)$; $C(5;-2;-1)$; $M(6;4;4)$

1. Montrer que les points A, B, C sont non-alignés.

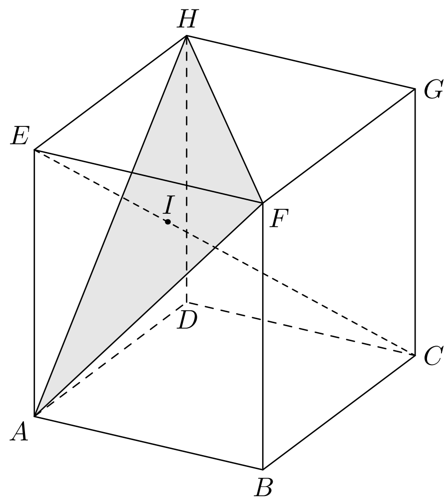
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2;1;2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. Déterminer la distance du point M au plan (ABC).

Exercice 8906

On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous et on utilise le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH})$ orthonormé.



On note I le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

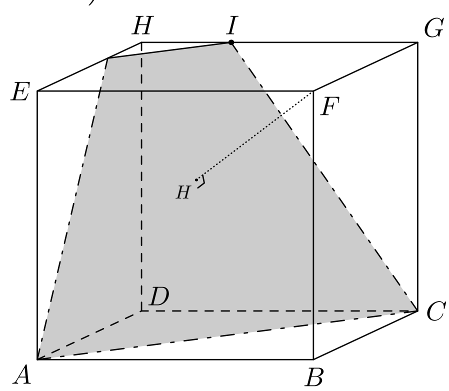
1. Justifier que la droite (EC) est orthogonale au plan (AHF).

2. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 8911

Proposition : Le projeté orthogonal H d'un point A sur un plan $\mathcal{P}$ est l'unique point du plan $\mathcal{P}$ le plus proche de A

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous et l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.



On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;1\,;1\right)$ et la section par le plan (FHI) est représenté grisé.

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3\,;-3\,;2)$ est normal au plan (ACI)

2. Déterminer la distance du point F au plan.

3. On note H le projeté orthogonal du point F sur le plan (ACI). Montrer que le point H a pour coordonnées :
$$H\left(\frac{7}{22}\,;\frac{15}{22}\,;\frac{12}{22}\right)$$

14. Projeté orthogonal sur une droite :

Exercice 8915

Définition - proposition :
Dans l'espace, on considère un point A et une droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. On appelle **projeté orthogonal du point A sur la droite (d)**, le point d'intersection de la droite (d) avec le plan passant par le point A et admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal.

Corollaire : dans l'espace, on considère une droite (d) et un point A n'appartenant pas à (d). Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est l'unique point M appartenant à (d) et tel que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal à tout vecteur directeur de la droite (d).

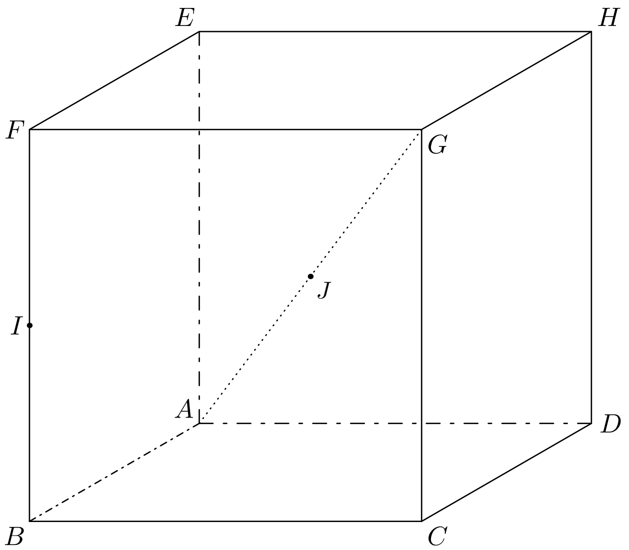
Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;,\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, on considère les trois points :
$$A(7\,;3\,;0)\quad ;\quad B(6\,;-1\,;-8)\quad ;\quad C(-4\,;4\,;2)$$
On considère le point $H(2\,;1\,;-4)$.

1. Montrer que le point H appartient à la droite (BC).

2. Etablir que H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

Exercice 8903

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1, le point I est le milieu du segment $[BF]$ et le point J est le milieu du segment $[AG]$.



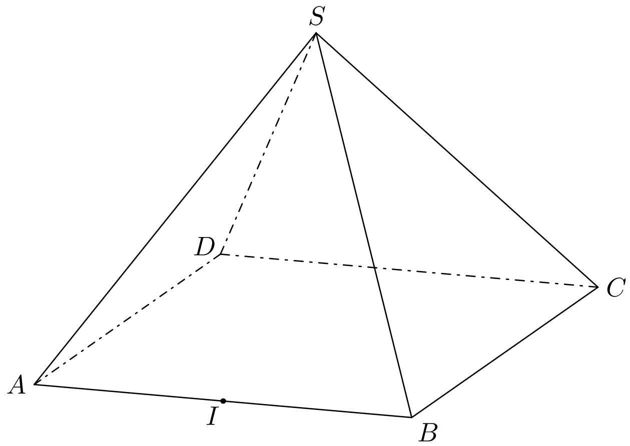
L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Etablir que le point J est le projeté du point I sur la droite (AG).

2. Déterminer la distance IJ.

Exercice 8916

Dans l'espace, on considère le pyramide $ABCDS$ à base carré avec ses faces latérales qui sont toutes des triangles équilatérals. On note I le milieu du segment $[AB]$.



On muni l'espace du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé direct.

1. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{CS}$ a pour coordonnées :
$$\overrightarrow{CS}\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On note $H(x\,;y\,;z)$ le projeté orthogonal du point A sur la droite (CS).

2. Justifier qu'il existe un réel k permettant d'écrire les coordonnées du point H :
$$H\left(-\frac{1}{2}\cdot k+1\,;-\frac{1}{2}\cdot k+1\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k\right)$$

3. En déduire les coordonnées du point H.

15. Distance à une droite :

Exercice 8912

Proposition : dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère une droite (d) passant par un point A et admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur et B un autre point du plan. En notant H le projeté du point B sur la droite (d), on a :

$$BH = \left\| \overrightarrow{BA} - \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{u}}{\left\| \overrightarrow{u} \right\|^2} \overrightarrow{u} \right\|$$

Définition : dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère une droite (d) et un point B de l'espace. On appelle **distance du point B à la droite (d)**, la distance BH où H est le projecté du point B sur la droite (d).

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé et on considère les points A, B et C dont les coordonnées sont :

$A(5\,;0\,;1)$; $B(-5\,;2\,;8)$; $C(7\,;-4\,;-4)$

Etablir que le point A est à une distance de 3 de la droite (BC).

Exercice 8914

Proposition : le projeté orthogonal H du point A sur la droite (d) est l'unique point de la droite (d) le plus proche du point A.

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé et on considère les points A, B et C dont les coordonnées sont :

$A(3\,;4\,;-7)$; $B(-5\,;-1\,;-6)$; $C(-1\,;-3\,;-2)$

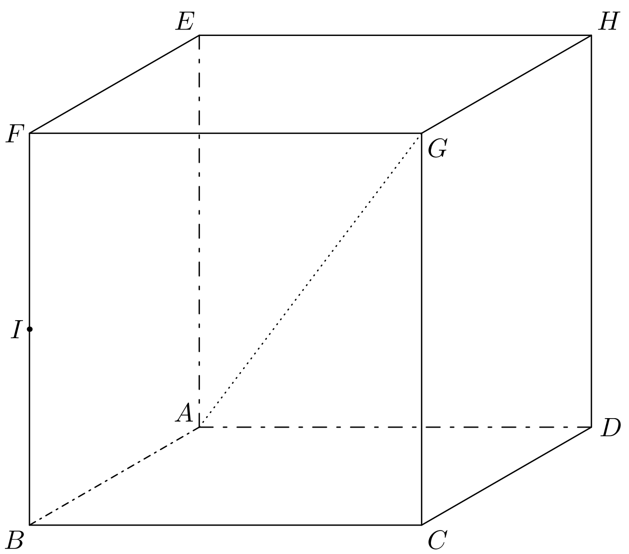
On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

1. Déterminer la distance du point A à la droite (BC).

2. Etablir que le point H a pour coordonnées : $H(-3\,;-2\,;-4)$

Exercice 8907

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1, le point I est le milieu du segment $[BF]$.



L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

Déterminer la distance du point I à la droite (AG).

Exercice 8904

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté sur la feuille annexe. Dans tout l'exercice, l'espace est arapporté au rep'ère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

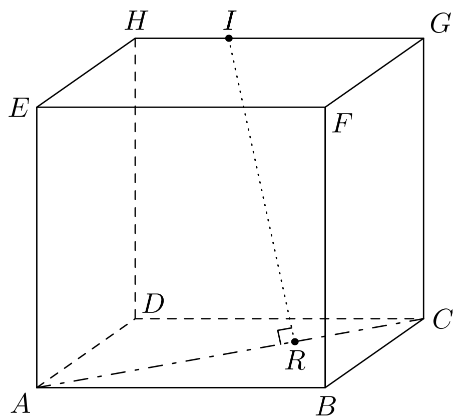
On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;1\,;1\right)$ et R le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).

1. Etablir que : $IR = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

2. Le point R appartenant à la droite (AC), il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AR} = t \cdot \overrightarrow{AC}$

   a. Exprimer les coordonnées du point R en fonction de t.

   b. A l'aide de la question 1., déterminer les coordonnées du point R.



Exercice 4100

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$A(1\,;-2\,;4)$; $B(-2\,;-6\,;5)$; $C(-4\,;0\,;-3)$

On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).

Soit t le réel tel que : $\overrightarrow{BH} = t \cdot \overrightarrow{BC}$

1. Démontrer que : $t = \frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$

2. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

16. Produit scalaire et relation vectorielle :

Exercice 4094

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre $ABCD$ issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

255. Exercices non-classés :

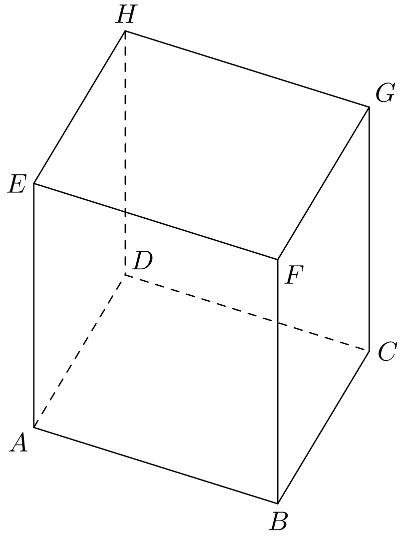
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 4247

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 3

On choisit le repère orthonormé $\left(D\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ tel que :

$\vec{i}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DA}\quad;\quad\vec{j}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DC}\quad;\quad\vec{k}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DH}$



1. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C\,;2)\,;\,(E\,;1)\}$.

On admet que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ ont les coordonnées suivantes :

$\overrightarrow{AE}\,(0\,;0\,;3)\quad;\quad\overrightarrow{DL}\,(1\,;2\,;1)$

Soit $(a\,;b)$ un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que : $\overrightarrow{AM}=a\cdot\overrightarrow{AE}$

et N le point de la droite (DL) tel que : $\overrightarrow{DN}=b\cdot\overrightarrow{DL}$

2. Montrer que les vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple $(a\,;b)$vérifie le système :
$\begin{cases}-a+2b=1\\3a-b=0\end{cases}$

3. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

4. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

Exercice 4034

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

La sphère de centre $A\left(1\,;1\,;1\right)$ et de rayon 10 est tangente au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=0$.

Exercice 4130

On considère l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{j}\right)$ orthonormé.

On considère la droite (d) passant par le point $A\left(1\,;-2\,;3\right)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\left(-2\,;0\,;1\right)$ pour vecteur directeur. Soit M le point de l'espace de coordonnées $\left(1\,;-1\,;13\right)$, déterminer les coordonnées du projeté H du point M sur la droite (d).

Exercice 8908

On considère l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{j}\right)$ orthonormé.

Soit $(\mathcal{P})$ le plan admettant pour équation cartésienne :

$3\cdot x-y+2\cdot z=0$

On considère le point $N\left(15\,;1\,;6\right)$. Déterminer les coordonnées du point I projeté orthogonal du point N dans le plan $(\mathcal{P})$.

