Terminale Spécialité/Limites de suites et raisonnement par récurrence

1. Raisonnement par récurrences : *(+5 exercices pour les enseignants)*

Exercice 3494

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$x^n - 1 = (x-1)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

3. Convergences de suites monotones : *(+5 exercices pour les enseignants)*

Exercice 6910

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est majorée par 7.
2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 5732

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leqslant 2$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

4. Divergence de suites monotones : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 3473

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + n - 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a. Démonter que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$: $u_n \geqslant 0$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$: $u_n \geqslant n - 3$

   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Théorème des gendarmes : *(+2 exercices pour les enseignants)*

Exercice 5034

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. a. Etablir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

   $$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2\cdot u_n}$$

   b. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

   $$u_n \geqslant \sqrt{2}$$

2. a. Déduire des questions précédentes l'encadrement :

   $$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$$

   b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'encadrement ci-dessous pour tout entier naturel n :

   $$0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(u_0 - \sqrt{2}\right)^{(2^n)}$$

3. a. Donner une valeur approchée de $\left|u_0 - \sqrt{2}\right|$ au millième près.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

8. Un peu plus loin dans la récurrence : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 5815

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{3\cdot u_n}{1+2\cdot u_n}$

1. a. Calculer u_1 et u_2.

   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0<u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n<1$.

   a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Démontrer que la suite (u_n) converge. *(on ne demande pas la valeur de la limite).*

