# Term Spécialité/Limite de suites

## 1. Rappels : suites arithmétiques et géométriques :

(+1 exercice pour les enseignants)

### Exercice 3393

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{3}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de $(u_n)$ donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante :
   $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$

### Exercice 3394

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{16}{27}$ et de raison $\frac{3}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de $(u_n)$ donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante :
   $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{16}$

### Exercice 5012

1. Soit $(u_n)$ une suite arithmétique définie pour $n\in\mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
   $u_4 = 3 \quad ; \quad u_7 = 15$
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite $(u_n)$.
   b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite $(u_n)$
2. Soit $(v_n)$ une suite géométrique définie pour $n\in\mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
   $v_2 = 2 \quad ; \quad v_5 = 54$
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite $(v_n)$.
   b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite $(v_n)$

### Exercice 6724

On considère les deux suites de nombres ci-dessous dont on donne les sept premiers termes :

a. 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16

b. 6 ; 3,5 ; 1 ; -1,5 ; -4 ; -6,5 ; -9

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite arithmétique?
Si oui, donner le premier terme et la raison. Si non, justifier votre rejet de cette affirmation.

### Exercice 6725

On considère les deux suites de nombres ci-dessous où sont donnés les six premiers termes :

a. 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; $\frac{1}{2}$ ; $\frac{1}{4}$

b. 1 ; 3 ; 9 ; 18 ; 54 ; 162

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite géométrique?
Si oui, préciser le premier terme et la raison. Sinon, justifier votre rejet de la conjecture.

### Exercice 3398

En identifiant chacune des sommes comme une somme des termes d'une suites arithmétiques ou géométriques, déterminer chacune de leurs valeurs :

a. $12 + 7 + 2 + (-3) + \cdots + (-28)$

b. $27 + 3 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{243}$

c. $\frac{2}{3} + \frac{8}{3} + \frac{14}{3} + \cdots + \frac{62}{3}$

d. $\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \cdots + \frac{1}{2^{24}}$

## 2. Rappels : autres :

### Exercice 3395

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$
   Déterminer la valeur des huit premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $v_1 = 2 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{v_n} + n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   Déterminer les cinq premiers termes de la suite $(v_n)$.

### Exercice 3396

Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes :

a. $\sum_{i=0}^{7} i$ b. $\sum_{i=3}^{8} (i^2 - i)$ c. $\sum_{i=0}^{7} (i-4)$

d. $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i}$ e. $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i^2}$ f. $\sum_{\ell=0}^{3} \left[ \sum_{i=0}^{\ell} i \right]$

**Exercice 5042**

Justifier que, dans chaque question, les informations ci-dessous ne définissent pas de suites :

a. $u_0 = 5$ ; $u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b. $u_0 = 1$ ; $u_1 = 4$ ; $u_{n+1} = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c. $u_0 = 3$ ; $u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

d. $u_0 = -1$ ; $u_n = \dfrac{u_{n-1} - 2}{u_{n-1} + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

## *3. Limites de suites arithmétiques et géométriques :*

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 6726**

1. On considère la suite $(u_n)$ arithmétique de premier terme $-4$ et de raison $5$ :

   a. Compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | $-4$ | 1 | 6 | 11 | 16 | 21 | | |

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme $u_n$ lorsque le rang $n$ devient de plus en plus grand?
   On notera : $\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = \ldots\ldots$

2. On considère la suite $(v_n)$ arithmétique de premier terme $3$ et de raison $-1{,}2$ :

   a. Compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_n$ | 3 | 1,8 | 0,6 | $-0{,}6$ | $-1{,}8$ | $-3$ | | |

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme $v_n$ lorsque le rang $n$ devient de plus en plus grand?
   On notera : $\lim_{n \mapsto +\infty} v_n = \ldots\ldots$

**Exercice 6727**

1. On considère la suite $(u_n)$ géométrique de premier terme $4$ et de raison $2$ :

   a. Compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | | |

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme $u_n$ lorsque le rang $n$ devient de plus en plus grand?
   On notera : $\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = \ldots\ldots$

2. On considère la suite $(v_n)$ géométrique de premier terme $81$ et de raison $\dfrac{1}{3}$ :

   a. Compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_n$ | 81 | 27 | 9 | 3 | 1 | $\dfrac{1}{3}$ | | |

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme $v_n$ lorsque le rang $n$ devient de plus en plus grand?
   On notera : $\lim_{n \mapsto +\infty} v_n = \ldots\ldots$

**Exercice 6728**

On considère la suite $(u_n)$ géométrique de premier terme $2{,}8$ et de raison $0{,}9$.

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous à l'aide de valeurs approchées au centième :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 2,8 | 2,52 | 2,268 | 2,041 | | | | |

2. A l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on établir pour la limite des termes de la suite $(u_n)$?
   On note : $\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = \ldots$

**Exercice 2557**

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie explicitement par : $u_n = 9n - 5$

   a. Déterminer la nature de la suite $(u_n)$ en précisant ses caractéristiques.

   b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie explicitement par : $v_n = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

   a. Déterminer la nature de la suite $(v_n)$ en précisant ses caractéristiques.

   b. Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.

## *4. Limites de somme des termes de suites :*

*(+2 exercices pour les enseignants)*

**Exercice 2559**

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $2$ et de raison $-1$.

   a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang $n$.

   b. On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de $S_n$ en fonction de $n$.

c. En déduire la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{1}{2}$.

a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang $n$.

b. On note $S'_n = v_0+v_1+\cdots+v_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de $S'_n$ en fonction de $n$.

c. En déduire la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S'_n$.

### Exercice 2588

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{2}{5}$ :

1. Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

2. a. Déterminer l'expression de la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite en fonction de $n$.

b. En déduire la valeur de la limite suivante :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_0+u_1+\cdots+u_n$

### Exercice 2621

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$ et la suite $(R_n)$ définie, pour $n\geqslant 2$, par la somme :
$R_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$

Déterminer la limite de la suite $(R_n)$.

### Exercice 6174

Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.
Le premier jour, il parcourt $50\,km$. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de $1\,\%$.

On note $u_n$ la longueur parcourue par le coureur le $n$-ième jour. En supposant ue le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre permiers termes de la suite $(u_n)$.

2. a. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ? Donner les èlèments caractéristiques de la suite $(u_n)$.

b. Exprimer le terme $u_n$ en fonction du rang $n$.

c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le $100^e$ jour ? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.

3. On note $S$ la somme des $n$ premiers termes de la suite $(u_n)$ : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

a. Exprimer la somme $S_n$ en fonction du rang $n$.

b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

| $n$ | 10 | 100 | 500 | 750 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_n$ | | | | | |

c. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la somme $S_n$ quand la valeur de $n$ devient de plus en plus grand ?

### Exercice 2560

Un globe-trotter a parié de parcourir $5\,000\,km$ à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir $50\,km$ en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de $1\,\%$ tous les jours.

On notera $d_n$ la distance parcourue durant le $n$-ième jour.

1. Calculer les distances $d_1$, $d_2$, $d_3$ parcourues durant les trois premiers jours.

2. Quelle est précisément la nature de la suite ?
Déterminer la valeur de $d_n$ en fonction de $n$.

3. On note $L_n$ la distance en kilomètres parcourus au bout de $n$ jours.
$L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

a. Déterminer l'expression de $L_n$ en fonction de $n$.

b. En déduire la limite de $L_n$ lorsque $n$ tend verse $+\infty$.
Le globe-trotter peut-il gagner ?

c. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours $N$ qui lui seraient nécessaires pour parcourir $4\,999\,km$

### Exercice 5738

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n \quad ; \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

1. Exprimer le terme $S_n$ en fonction de $n$.

2. Déterminer la limite de la suite $(T_n)$.

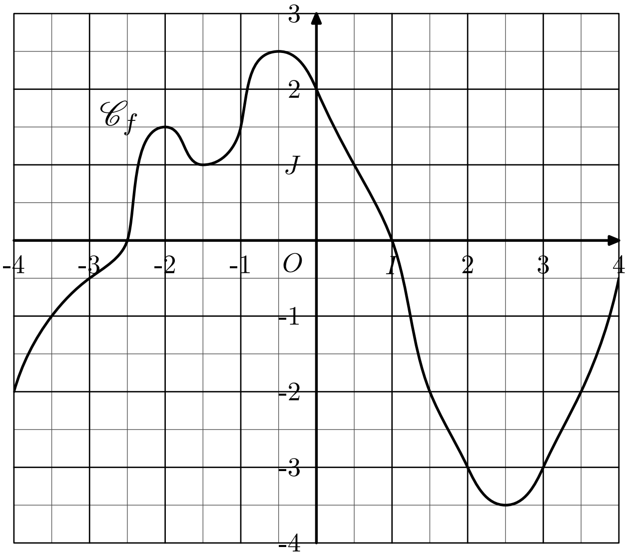
## 5. Autres limites :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

### Exercice 3397

On considère la fonction $f$ définie sur $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :




On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer que le terme $u_1$ est égal à $-3$.
2. Justifier les égalités suivantes :

   a. $u_2 = -0{,}5$ b. $u_3 = 2{,}5$
3. Compléter le tableau suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | | | | | | |

4. Que peut-on dire de la limite des termes de la suite $(u_n)$ ?

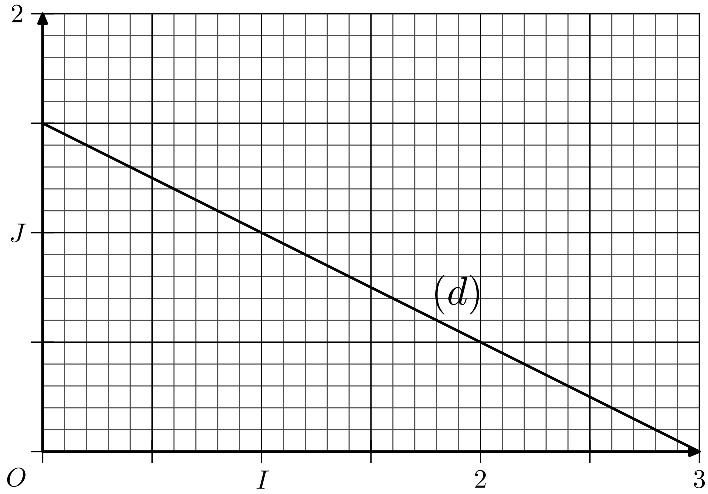
**Exercice 3411**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$u_0 = \dfrac{5}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\cdot u_n + \dfrac{3}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, la droite $(d)$ ayant pour équation :

$y = -\dfrac{1}{2}\cdot x + \dfrac{3}{2}$




1. Graphiquement, sur l'axe des abscisses représentées les cinq premiers termes de cette suite *(les constructions doivent être laissées)*.
2. a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en indiquant les valeurs approchées au dixième près :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 2,5 | 0,25 | 1,38 | 0,81 | 1,09 | | | | | |

   b. Quelle conjecture peut-on porter sur la limite de la suite $(u_n)$ ?

## *6. Avec un tableur :*

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 6732**

Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs de chacune des suites suivantes. Si nécessaire, on arrondi les valeurs au centième près :

1. Soit $(u_n)$ définie par la relation :

   $u_n = 2\cdot n + 3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | | | | |

2. Soit $(v_n)$ définie par la relation :

   $v_0 = 5 \quad ; \quad v_{n+1} = 0{,}75\cdot v_n + 3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   Soit $(w_n)$ définie par la relation :

   $w_n = v_n - 12$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a. Compléter le tableau de valeurs :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_n$ | | | | | | | | |
| $w_n$ | | | | | | | | |

   b. Vérifier que les 8 termes de la suite $(w_n)$ permettent de conjecturer que la suite $(w_n)$ est géométrique.
3. Soit $(t_n)$ définie par la relation :

   $t_0 = 0 \quad ; \quad t_1 = 1 \quad ; \quad t_{n+1} = t_n + t_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_n$ | | | | | | | | |

4. Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ définies par les relations :

   $\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = -1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2\cdot a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3\cdot b_n \end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | | | | | | |
| $b_n$ | | | | | | | | |

**Exercice 6731**

On définit les deux suites $u$ et $v$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 12 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\cdot(u_n+2\cdot v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}\cdot(u_n+3\cdot v_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. A l'aide d'un tableur, générer les 20 premiers termes des ces deux suites afin d'obtenir un tableau analogue à celui présenté ci-contre.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_n$ | $y_n$ | $w_n$ | | $t_n$ |
| 2 | 1 | 12 | | | |
| 3 | 8,33 | 9,25 | | | |
| 4 | 8,94 | 9,02 | | | |
| 5 | 9,00 | 9,00 | | | |
| 6 | 9,00 | 9,00 | | | |

2. On définit la suite $(w_n)$ par : $w_n = v_n - u_n$
   a. Dans la colonne C, exprimer les 20 premiers termes de la suite $w$.
   b. Que peut-on faire pour mettre en évidence que la suite $w$ suit une progression géométrique sur ces 20 premiers termes?
2. On définit la suite $t$ définie par : $t_n = 3\cdot u_n + 8\cdot v_n$
   a. Exprimer les 20 premiers termes de la suite $t$.
   b. Quelle conjecture peut-on effectuer sur la nature de la suite $t$?

## *7. Suites arithmético-géométriques :*

*(+2 exercices pour les enseignants)*

**Exercice 6733**

On considère la suite $(u_n)$ définie par la relation :
$u_0 = 8$ ; $u_{n+1} = 0{,}95\cdot u_n + 0{,}5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite $(v_n)$ définie par la relation :
   $v_n = u_n - 10$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Justifier que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera la valeur de son premier terme.
   b. Exprimer les termes de la suite $(v_n)$ en fonction de $n$.
2. En déduire une expression de la suite $(u_n)$ en fonction de $n$
3. Déterminer la limite des termes de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 6734**

On considère la suite $(u_n)$ définie par la relation :
$u_0 = -2$ ; $u_{n+1} = 2\cdot u_n + 0{,}5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite $(v_n)$ définie par la relation :
   $v_n = u_n + 0{,}5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Justifier que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera les élèments caractéristiques
   b. Exprimer les termes de la suite $(v_n)$ en fonction de $n$.
2. En déduire une expression de la suite $(u_n)$ en fonction de $n$
3. Déterminer la limite des termes de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## *8. Suites définies conjointements :*

*(+2 exercices pour les enseignants)*

**Exercice 6739**

On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies conjointement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = 4 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 2\cdot u_n - v_n \\ v_{n+1} = -3\cdot u_n + 4\cdot v_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. On considère la suite $(w_n)$ définie par la relation :
   $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Etablir que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison 5.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, le terme de rang $n$ s'exprime par :
   $w_n = -5^n$
2. On considère la suite $(t_n)$ définie par :
   $t_n = 3\cdot u_n + v_n$
   a. Montrer que : $t_0 = 19$
   b. Etablir que pour tout entier naturel, on a l'égalité : $t_{n+1} = t_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   On admettra que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $t_n = 19$
3. Déduire une expression des termes des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ en fonction de $n$.
4. En déduire les limites des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**Exercice 6738**

On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies conjointement par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 3 \\ v_0 = -1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 3\cdot u_n - 2\cdot v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2\cdot v_n \end{array}\right.$$

1. On considère la suite $(w_n)$ définie par la relation :
$w_n = v_n - u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Etablir que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison 4.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, le terme de rang $n$ s'exprime par :
   $w_n = -4\times 4^n$

2. On considère la suite $(t_n)$ définie par :
$t_n = 4\cdot u_n + 8\cdot v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Donner la valeur du terme $t_0$.
   b. Etablir que pour tout entier naturel, on a l'égalité :
   $t_{n+1} = t_n$

On admettra que la suite $(t_n)$ est constante.

3. Déduire une expression des termes des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ en fonction de $n$.

4. En déduire les limites des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**Exercice 6759**

On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 6 \\ b_0 = 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = 0{,}2\cdot a_n + 1{,}3\cdot b_n \\ b_{n+1} = -0{,}8\cdot a_n - 0{,}2\cdot b_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Exprimer les termes $a_{n+2}$ et $b_{n+2}$ en fonction des termes $a_n$ et $b_n$.

2. Que peut-on dire des termes de la suite $(a_{2n})$?

## 9. Autres suites :

*(+2 exercices pour les enseignants)*

**Exercice 6765**

Soit $(u_n)$ la suite définie par son premier terme $u_0=5$ et, pour tout entier naturel $n$ par :
$u_{n+1} = 0{,}5\cdot u_n + 0{,}5\cdot n - 1{,}5$

1. Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par :
$v_n = 0{,}1\cdot u_n - 0{,}1\cdot n + 0{,}5$
Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors $v_n$ en fonction de $n$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n$ :
$u_n = 10\times 0{,}5^n + n - 5$

3. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)$

**Exercice 6799**

On considère la suite $(u_n)$ définie par :
$u_0 = 6$ ; $u_{n+1} = 2\cdot u_n - 3\cdot n + 5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Donner les trois premiers termes de la suite $(u_n)$.

2. On considère la suite $(v_n)$ définie par :
$v_n = u_n - 3\cdot n + 2$
   a. Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 2.
   b. En déduire une expression des termes de la suite $(v_n)$ en fonction de leur rang.

3. a. Justifier que pour tout entier naturel $n$, on a :
   $u_n = 8\times 2^n + 3\cdot n - 2$
   b. En déduire la limite de suite $(u_n)$.

**Exercice 5737**

Soit la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}\cdot n + 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$v_n = u_n - n$

1. Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

2. En déduire que pour tout entier naturel $n$ :
$u_n = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 3285**

On définit la suite $(u_n)$ est définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On définit la suite $(v_n)$ par : $v_n = 4u_n - 8n + 24$

1. Par transformation successive, établir l'égalité suivante :
$v_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot v_n$.

2. En déduire une expression des termes de la suite $(u_n)$ en fonction de $n$.

## 10. Autres suites : suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

*(+1 exercice pour les enseignants)*

**Exercice 3515**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{array}\right. \quad ; \quad u_{n+1} = 7\cdot u_n + 8\cdot u_{n-1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$s_n = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire $s_n$ en fonction de $n$.

3. a. On pose $v_n = (-1)^n \cdot u_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $t_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
Exprimer $t_n$ en fonction de $s_n$.

b. Quel est la nature de la suite $(t_n)$.

4. a. Exprimer $v_n$, puis $u_n$, en fonction de $n$ *(on pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \cdots + t_{n-1}$)*.

b. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

## *11. Limites de suites définies explicitement :*

*(+1 exercice pour les enseignants)*

### Exercice 2558

Déterminer les limites des suites $(u_n)$ définies ci-dessous :

a. $n^3 \times 5^n$ b. $n - \left(\frac{2}{7}\right)^n$ c. $\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n$

d. $8^n - 3^n$ e. $\dfrac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ f. $\left(\frac{31}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n$

## *12. Théorèmes des gendarmes :*

*(+1 exercice pour les enseignants)*

### Exercice 2554

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel $n$, par la relation explicite : $u_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{2n-1}$

1. Déterminer les trois premiers termes de la suite $(u_n)$.

2. Etablir l'encadrement suivant :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $\dfrac{3n-1}{2n-1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3n+1}{2n-1}$

3. En déduire la valeur de convergence de $(u_n)$.

### Exercice 2567

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite de son terme de rang $n$ :
$u_n = \sqrt{2\cdot n+1} - \sqrt{2\cdot n}$

1. Montrer l'égalité suivante pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2\cdot n+1} + \sqrt{2\cdot n}}$$

2. Etablir l'encadrement suivant :

$$0 < u_n < \frac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot n}}$$

3. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

### Exercice 3441

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme de rang $n$ est définie par la relation :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1. Etablir l'encadrement suivant pour tout entier naturel $n$ non-nul : $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}$

2. En déduire la convergence de la suite $(u_n)$ ; on précisera la valeur de la limite.

## *255. Exercices non-classés :*

*(+4 exercices pour les enseignants)*

### Exercice 2555

Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessous définies explicitement :

a. $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{n+1}$ b. $u_n = \dfrac{n-3}{n^2+1}$

c. $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1}$ d. $u_n = 1 + n - 2n^2 + 3n^3$

### Exercice 6176

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n^2 + 2$ b. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} 2 + \frac{1}{n}$

c. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n^3 + n + 2$ d. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n - \frac{1}{n}$

e. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n\cdot(n-10)$ f. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n+1}$