Term Spécialité/Limtes de fonctions numériques

1. Rappels : généralités :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3307

Questionnaire à choix multiples :

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. Une bonne réponse rapporte 0,5 *point une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse donne* 0 *point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée est* 0.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5;+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5	-1	0	2	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	-3 ↘	-5 ↗	4 ↘	-4,5

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f :

1. Sur l'intervalle $]-5;+\infty[$, l'équation $f(x)=-2$:
   a. admet une seule solution
   b. admet deux solutions
   c. admet quatre solutions.
2. Sur l'intervalle $]-5;+\infty[$, la fonction f :
   a. admet pour minimum la valeur -5 ;
   b. admet pour maximium la valeur 4 ;
   c. admet deux maximuns.
3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   a. $y=4$ b. $y=4(x-2)$ c. $x=4$

Exercice 3311

On considère une fonction f définie et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$.
La fonction f admet le tableau de varition ci-dessous :

x	$-\infty$	-2		1	α	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

où α est le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $f(\alpha)=0$.

On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Dire pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est "*vraie*" ou si elle est "*fausse*" ou si "*on ne peut pas conclure*". Aucune justification n'est demandée.

Le barème est le suivant :
- 0,5 point par réponse exacte ;
- 0,25 point par réponse fausse ;
- 0 point pour absence de réponse.

Il n'y aura pas de note globale négative.

1. L'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions.
2. $f(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in]-5;-2[$.
3. Si $-2<x<1$ et $x<x'$ alors $f(x)<f(x')$.
4. $f'(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in]-\infty;-2[$.

2. Rappels : polynômes du second degré :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3343

Chacun de ses polynômes admettent au moins une racine parmi l'ensemble suivant :
$\{-2;-1;1;2\}$

Utiliser ce renseignement pour effectuer "*rapidement*" la factorisation de chacun des polynômes suivants :

a. x^2+2x-8 b. $2x^2-4x-6$
c. x^2+x-6 d. $3x^2-4x+1$
e. x^3+x^2-2x f. $5x^2+3x-2$

Exercice 3344

Dresser le tableau de variations de chacun des polynômes du second degré suivant :

a. x^2-5x+1 b. $-3x^2+x-1$
c. $2(x+1)(2x-1)$ d. $(2-x)(4+x)$

Exercice 3860

Résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2+4x+1=0$ b. $3x^2-4x+2=0$

c. $-x^2+2x+3=0$ d. $2x^2-4x+2=0$

e. $-3x^2+3x+3=0$ f. $-x^2+4x+3=0$

Exercice 4986

Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

a. $3x^2+4x+1$ b. $-3x^2+4x-1$ c. $-4x^2+5x$

d. x^2+2x-1 e. $-x^2+4x+1$ f. $3x^2-4x+2$

3. Rappels : dérivées :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 3304

On considère la fonction f dont l'image de $x\in\mathbb{R}$ est défini par le polynôme suivant du second degré :

$f(x)=x^3-2x^2+x-3$

1. a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

   b. Déterminer le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire le tableau de variations de la fonction f *(on complétera le tableau de variations à l'aide de valeurs approchées)*.

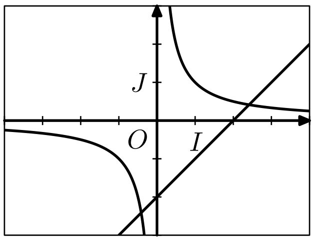
3. A l'aide du tableau de variation, justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

Exercice 3310

Soit l'équation (E): $\dfrac{1}{x}=x-2$ où l'inconnue est un réel de l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

1. Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ et la droite d'équation $y=x-2$.

   Au vu du graphique ci-dessus obtenu à l'écran de sa calculatrice, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $\left]0\,;+\infty\right[$



2. Un second élève considère la fonction g définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :

   $g(x)=x-2-\dfrac{1}{x}$

   a. On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$. Montrer que g est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

   b. Déterminer les images, par la fonction g, des nombres 1 et 4.
   Conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E).

3. Un troisième élève dit : "Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement". Justifier, en résolvant l'équation (E), que ce troisième élève a raison.

4. Introduction aux limites de fonctions :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 4989

On considère la fonction f définie par :

$f: x\longmapsto x+\dfrac{1}{x}$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. a. Par des calculs mentaux, Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	10	100	1000
$f(x)$				

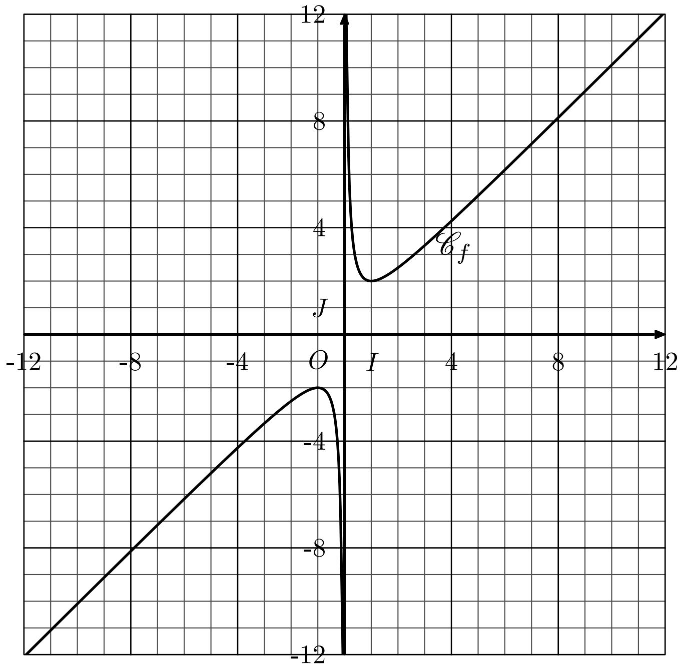
   b. Que peut-on dire de la valeur de "$f(x)$" lorsque "x" grandit énormément ?

3. a. Par des calculs mentaux, compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$f(x)$				

   b. Que peut-on dire de la valeur de "$f(x)$" lorsque "x" reste positif mais en devenant de plus en plus petit ?

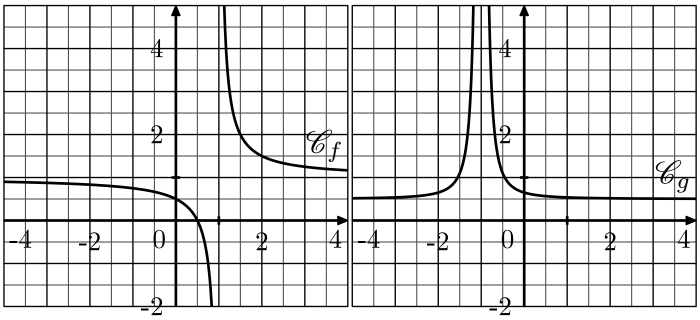
Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormée :



4. Interpréter graphiquement les résultats de la question 3..

Exercice 5002

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



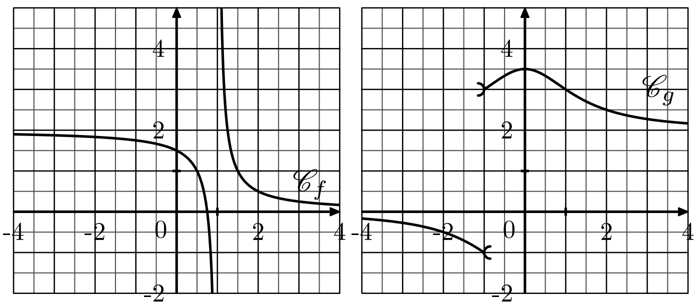
Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} g(x)$

Exercice 647

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto1^-} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\mapsto-1^-} g(x)$

Exercice 4990

On considère la fonction f définie par :

$$f: x\longmapsto \frac{x+2}{x-4}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer la valeur des réels a et b réalisant l'identité suivante pour tout $x\in\mathcal{D}_f$:
$$f(x)=a+\frac{b}{x-4}$$

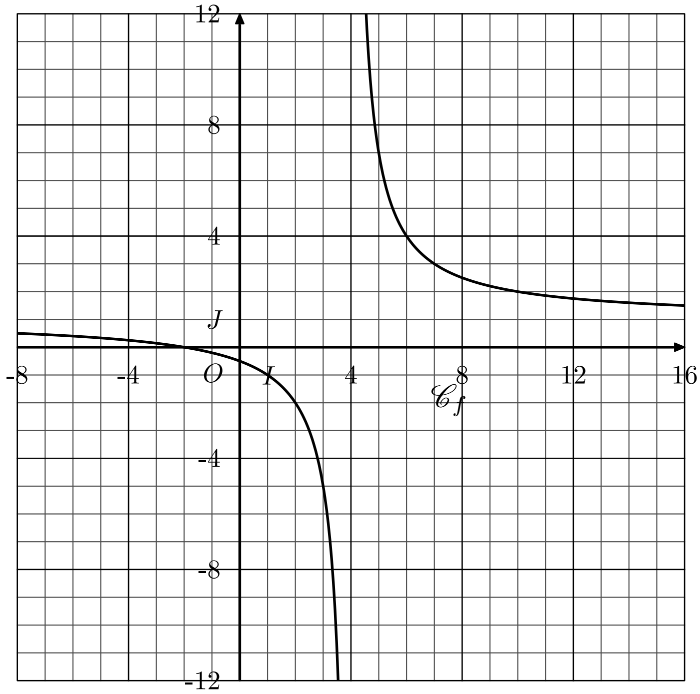
3. A l'aide de l'expression obtenue à la précédente question :

   a. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque la valeur de x grandit indéfiniment?

   b. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $]4\,;5]$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4?

   c. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $[3\,;4[$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4?

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormée :



4. Interpréter graphiquement les résultats précédement obtenus.

Exercice 6751

Graphiquement et à l'aide de la calculatrice, déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x-1}{3-x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x-1}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-2^+} \dfrac{-2{\cdot}x^2-2{\cdot}x+4}{2{\cdot}x+4}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto0^-} (x^2+x){\cdot}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

5. *Limites sans formes indéterminées :*

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5704

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \dfrac{5-x}{1-x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{x^2+x+1}{x}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{x-1}{-x^3}$

6. Limites avec formes indéterminées :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 3336

Sans déterminer les limites, préciser lesquelles présentent une forme indéterminée :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2\cdot x-1}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x^2+2\cdot x}{x^3-x^2}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} \sqrt{x^2-x-2}\cdot(x-2)$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x-1}{x^2+x}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} x^3-2x^2+1$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} x^3-2x^2+1$

Exercice 4993

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} 2\cdot x^2+3\cdot x$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} -3\cdot x^3+\frac{2}{x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} 5\cdot x^2-3\cdot x^3$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} x^2+2\cdot x-(x+2)^2$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} x^2+3\cdot x$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} x^3-2\cdot x^2$

7. Limites de fractions rationnelles en l'infini :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 4992

1. On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}$$

a. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1} = \frac{3+\frac{5}{x}}{x\cdot\left(3+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}$$

b. En déduire la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$.

2. On considère la fonction g définie par :

$$g : x \longmapsto \frac{4x^3+2x+1}{2x^3-2x^2}$$

Par un raisonnement analogue à la question précédente, établir l'égalité suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} g(x)=2$

8. Limites de fractions rationnelles en 0 :

Exercice 5013

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation : $f(x)=\dfrac{2\cdot x^3-x}{x^3+2\cdot x^2}$

1. Etablir les identités suivantes :

$$f(x) = \frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{2\cdot x^2-1}{x\cdot(x+2)}$$

2. Déterminer la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} f(x)$$

Exercice 4994

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{1}{x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{3}{x^2}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x^3+2\cdot x}{x^2+x}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$

9. Limites de fractions rationnelles avec factorisation :

Exercice 635

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{2-x}{2\cdot x^2-x-6}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3^-} \frac{x-3}{2\cdot x^2-15\cdot x+27}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-} \frac{-3\cdot x^2+7\cdot x-4}{(x-1)^2}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^+} \frac{3\cdot x^2+5\cdot x-2}{x^2+7\cdot x+10}$

10. Limites de fractions rationnelles avec tableau de signes :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5014

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2+3{\cdot}x}{2{\cdot}x^2-10{\cdot}x+12}$$

1. Etablir les identités suivantes :

$$f(x) = \frac{1+\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{10}{x}+\dfrac{12}{x^2}} = \frac{x{\cdot}(x+3)}{(x-2)(2{\cdot}x-6)}$$

2. Dresser le tableau de signes de $(x-2)(2x-6)$.

3. En déduire la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto2^-} f(x)$

f. $\lim\limits_{x\mapsto2^+} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto3^-} f(x)$ d. $\lim\limits_{x\mapsto3^+} f(x)$

Exercice 8656

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-1^-} \dfrac{x+4}{3x^2-x-4}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto1^-} \dfrac{x^2+x-3}{3{\cdot}x^2-7{\cdot}x+4}$

11. *Limites de fractions rationnelles :* *(+5 exercices pour les enseignants)*

Exercice 6801

On considère le polynôme $P=3{\cdot}x^2-x-2$.

1. Factoriser le polynôme P en laissant une trace de votre démarche.

2. Déterminer la valeur des deux limites suivnates :

a. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \dfrac{2{\cdot}x-3}{3{\cdot}x^2-x-2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \dfrac{2{\cdot}x-2}{3{\cdot}x^2-x-2}$

Exercice 5011

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{2{\cdot}x^3+x-2}{-x^2-2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{3{\cdot}x^3-2{\cdot}x^2}{x^4+x^3}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto3^+} \dfrac{x-6}{2x^2-15x+27}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} \dfrac{2x^2+5x+3}{-x^2+x+2}$

Exercice 3641

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{5x^2+3x-1}{3x^3+2x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{3x^4-2x}{x^3+x^2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{x^2-4x+4}{-2x^2+10x-12}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} \dfrac{1}{2x^2+x-1}$

Exercice 2960

Chacune des limites ci-dessous représente une forme indéterminée ; effectuer les transformations algébriques adéquates pour déterminer chacune de ses limites :

a. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2+x-2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{5x^2-3x+1}{2x^2+x-2}$

12. *Limites et radicaux : expression conjuguée :* *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 4991

1. Etablir l'égalité algébrique suivante pour $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$

2. En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{x\mapsto0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}} = -2$$

Exercice 3338

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \dfrac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3}$

Exercice 8657

Chacune des limites ci-dessous représente une forme indéterminée ; effectuer les transformations algébriques adéquates pour déterminer chacune de ses limites :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\sqrt{x}-x$ c. $\lim\limits_{x\mapsto2^-} \dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$

Exercice 8660

Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$

13. *Limites et radicaux : factorisation :* *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 6757

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2{\cdot}x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Etablir l'identité suivante : $f(x) = \dfrac{x\cdot\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$

3. En déduire les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$

Exercice 8658

Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\mapsto 3^-} \dfrac{\sqrt{3-x}}{2x^2-5x-3}$

Exercice 8659

Chacune des limites ci-dessous présente une forme indéterminée. Démontrer le résultat attendu en mettant en évidence la bonne transformation algébrique :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x}} = 0$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto -\frac{2}{3}^+} \dfrac{2x-1}{3x+2}\cdot\sqrt{3x+2} = -\infty$

Exercice 5003

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f : x \longmapsto \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. a. Pour $x\in[-1\,;0[$, établir l'égalité : $f(x) = -\sqrt{x+1}$

   b. Déterminer la valeur de la limite $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} f(x)$.

3. Déterminer la valeur de la limite $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)$.

4. Peut-on parler de la limite de la fonction f en 0.

Exercice 8661

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Exercice 8663

Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{4\cdot x^2-3x+1}}$

14. Asymptotes :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5714

En traçant la courbe représentative de fonctions à l'aide de la calculatrice ou de logiciel de tracer, émettre une conjecture sur l'ensemble de définition et sur les asymptotes à la courbe de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

b. $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

c. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$

d. $j(x) = \dfrac{(x^2+1)\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$

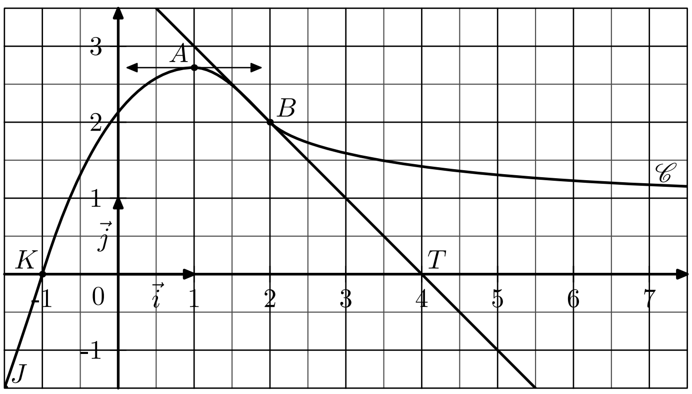
15. Etudes de fractions rationnelles :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 3303

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

- Les points $J\left(-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{3}{2}\right)$, $K(-1\,;0)$, $A\left(1\,;\dfrac{11}{4}\right)$, $B(2\,;2)$ sont des points de $\mathscr{C}$;
- La tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en B passe par $T(4\,;0)$.
- La droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- La fonction f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;1\right]$ et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.



1. Donner les valeurs de $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ ainsi que la limite de f en $+\infty$.

2. Donner, en justifiant vos résponses, les nombres $f'(1)$ et $f'(2)$

Exercice 5004

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+5}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

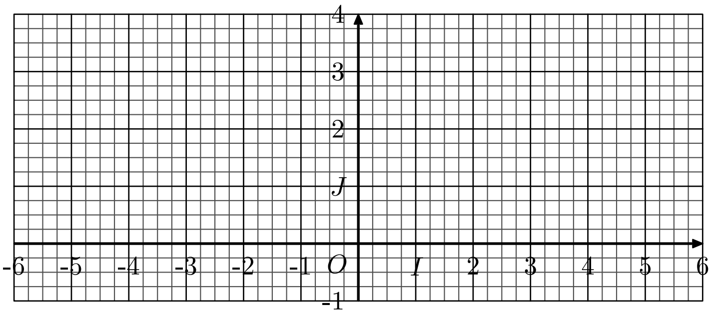
   b. Quelles asymptotes admet la fonction f?

3. a. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet l'expression :
$$f'(x) = \frac{-6x^2+12x+18}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

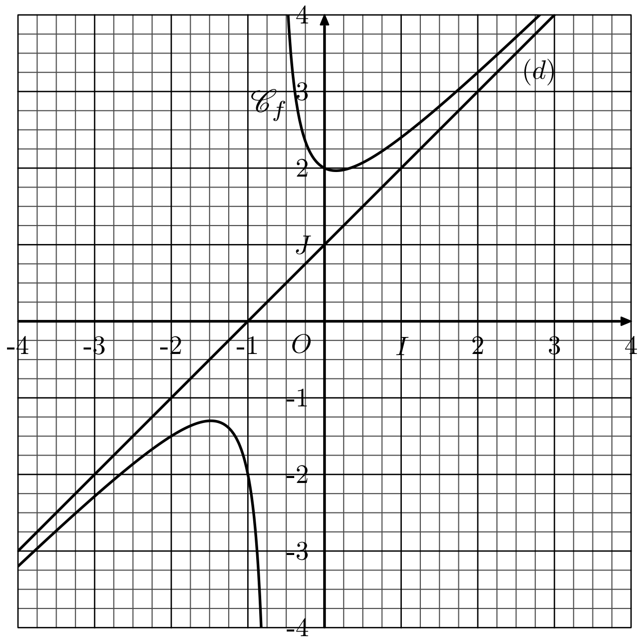
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. Tracer la droite (Δ), les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé ci-dessous :



Exercice 6802

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ par :
$$f(x) = \frac{3{\cdot}x^2+5{\cdot}x+4}{3{\cdot}x+2}$$
On notera $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f dans le repère $\big(O\,;\,I\,;\,J\big)$ ci-dessous :



La droite (d) est la représentation de la fonction g définie par :
$$g(x) = x+1$$

1. a. Donner, sans justification, les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

   b. Préciser si la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet des asymptotes.

2. a. Déterminer les réels a, b et c réalisant l'égalité :
$$f(x) = a{\cdot}x+b+\frac{c}{3{\cdot}x+2}$$

   b. En déduire que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' définie par :
$$f'(x) = \frac{9{\cdot}x^2+12{\cdot}x-2}{\left(3{\cdot}x+2\right)^2}$$

   c. Dresser, en justifiant votre démarche, le tableau de variations de la fonction f.
   On n'indiquera la valeur des extrémums de f

3. Pour tout entier naturel n, on considère :
   - M_n le point de (d) d'abscisse n,
   - N_n le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse n,
   - S_n le segment $[M_nN_n]$.

   a. Représenter sur le graphique les segments S_0, S_1 et S_2.

   b. Donner la mesure exacte du segment S_0.

   c. Que peut-on dire de la longueur du segment $[M_nN_n]$ lorsque la valeur de n tend vers $+\infty$.

16. Etudes de fonctions exponentielles :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 3618

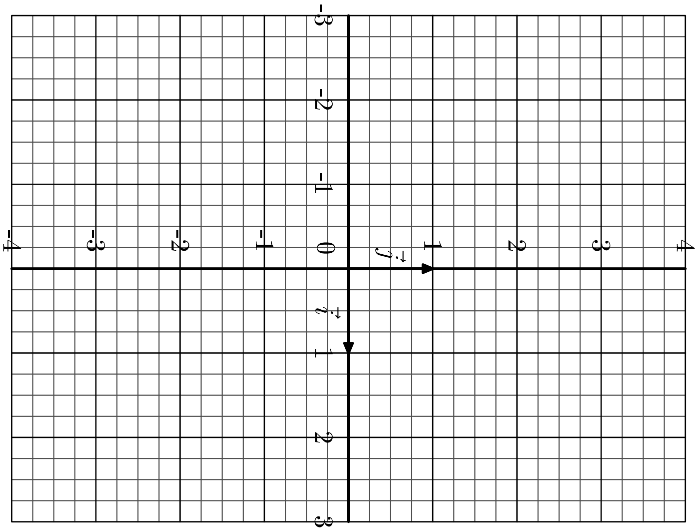
On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x-1}$$
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Etablir le tableau de variations de la fonction f.

3. Préciser les différentes asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.



Exercice 5851

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{e}$$

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

   b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0\,;1]$ en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.

2. Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle $[0\,;1]$: $x - \mathrm{e}^{-x} + 1 = \mathrm{e}^{-x} - x - \mathrm{e}^{-1} + 1$

Exercice 3677

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{9}{2}\cdot\mathrm{e}^{-2x} - 3\cdot\mathrm{e}^{-3x}$

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$ d'unité $1\,cm$.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
   $f(x) = 3\cdot\mathrm{e}^{-2x}\cdot\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

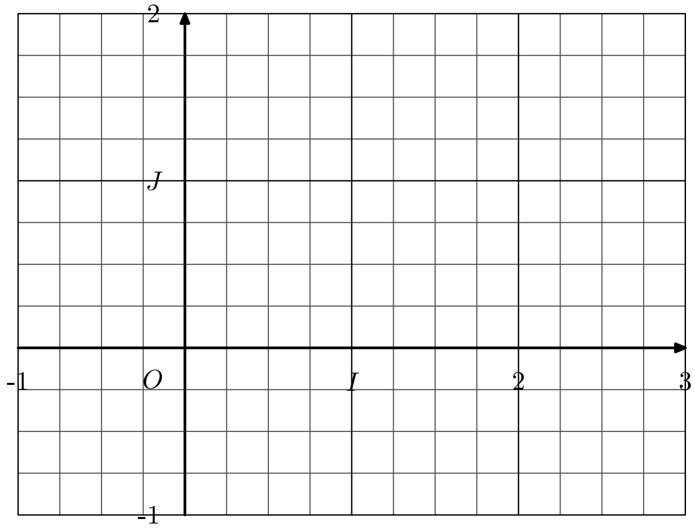
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

3. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

4. a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ intercepte l'axe des abscisses en un seul point.
   Donner la valeur approchée des coordonnées de ce point d'intersection.

5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous :



17. Etude de fonctions racines carrées :

Exercice 3341

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Etudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.

   b. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes? si oui, préciser.

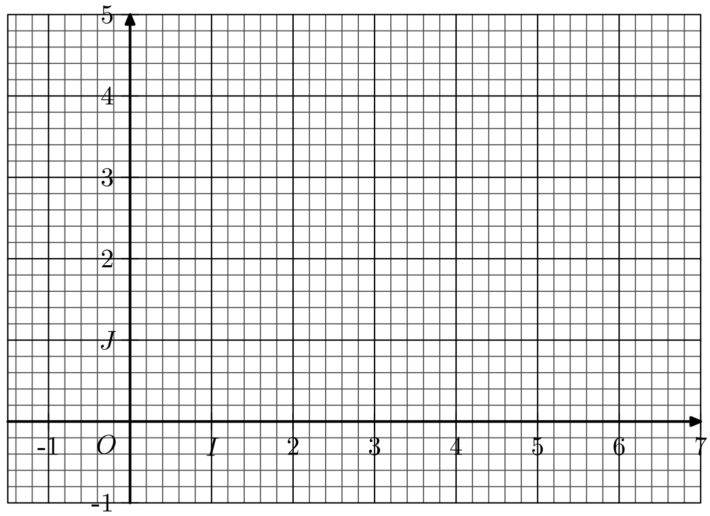
2. On note (d) la droite d'équation $y=1$. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (d).

3. a. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2h}{2\cdot(h+2)\cdot\left[2\sqrt{h^2+2h+2} + \sqrt{2}\cdot(h+2)\right]}$$

   b. En déduire la valeur du nombre dérivé $f'(1)$.

4. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$.



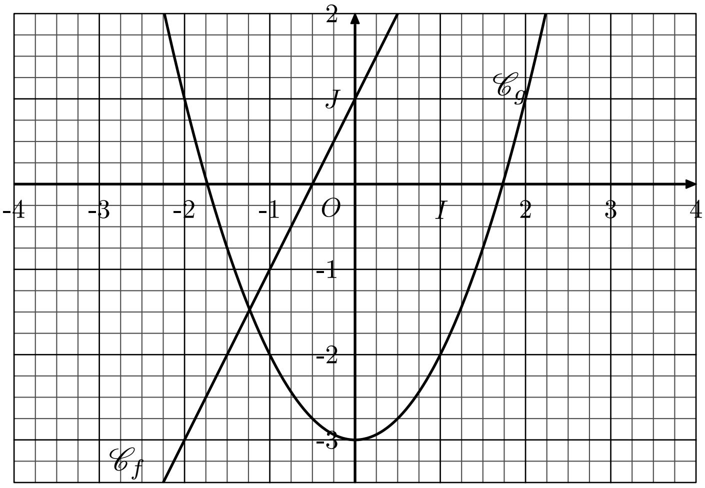
18. Composée de fonctions :

Exercice 5008

On considère les deux fonctions f et g définie sur $[-4\,;4]$ par les relations :

$f(x)=2x+1 \quad ; \quad g(x)=x^2-3$

On donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



1. Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

2. On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ;
  on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ;
  on note ce nombre $g(f(x))$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaine :

$x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g[f(x)]$

a. Déterminer la valeurs des expressions suivantes :

$g[f(-1)] \quad ; \quad g\Big[f\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big]$

b. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g(f(x))$					

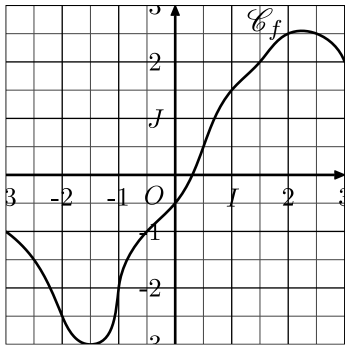
On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g[f(x)]$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g\circ f$.

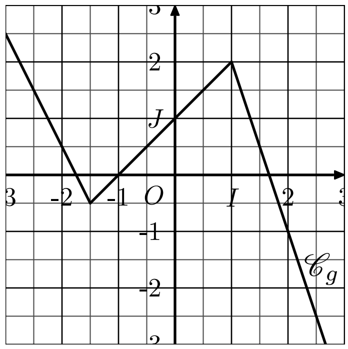
3. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_{g\circ f}$ représentative de la fonction $g\circ f$.

4. Donner l'expression, en fonction de x, de la fonction $g\circ f$.

Exercice 5009

On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\,;3]$ dont les courbes, respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, représentatives sont données dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormée :





1. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

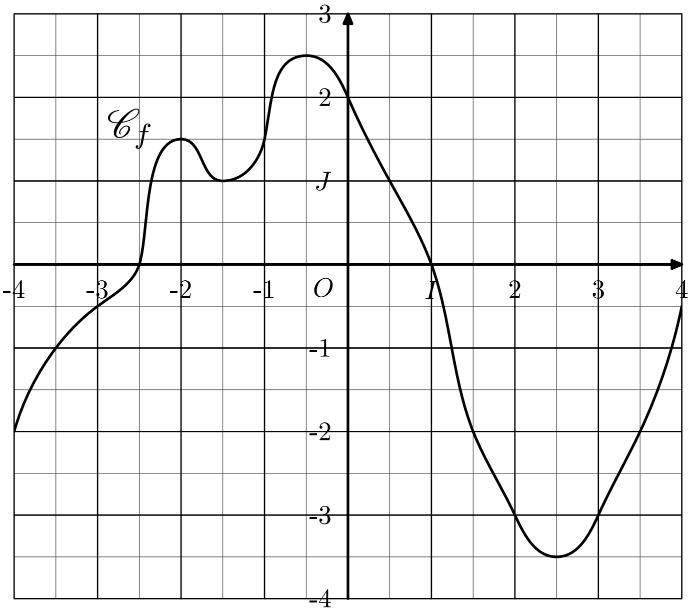
a. $(f\circ g)(-2)$ b. $(f\circ g)(1{,}5)$ c. $(f\circ g)(2)$

2. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $(g\circ f)(-3)$ b. $(g\circ f)(0)$ c. $(g\circ f)(1)$

Exercice 5010

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Calculer les images suivantes :

a. $(f\circ f)(1)$ b. $(f\circ f)(-2)$ c. $(f\circ f)(3)$

2. On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :

a. $f^3(1)$ b. $f^3(-3)$ c. $f^4(-1)$

Exercice 3309

Pour chaque question, déterminer une expression "*simplifiée*" de l'expression de la composée $f\circ g$ de la fonction g par la fonction f :

a. $f(x)=2x^2-x+1$; $g(x)=3x-2$

b. $f(x)=\sqrt{x-2}$; $g(x)=4x^2+12x+11$

c. $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $g(x)=\dfrac{3x+1}{2-x}$

d. $f(x)=x^2-x+1$; $g(x)=\sqrt{x}$

e. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$

19. Limites de composées de fonctions :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3355

Pour chaque question, déterminer la limite de $g\circ f$ en a :

a. $f(x)=2x^2-5x-3$; $g(x)=\dfrac{5-x}{x^2}$; $a=3$

b. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x+3}}$; $g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$; $a=-3$

c. $f(x)=\dfrac{\cos x-2}{x}$; $g(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^3+x^2}$; $a=+\infty$

Exercice 5023

Soit f une fonction définie sur $\big[0\,;+\infty\big[$ vérifiant :

$f(0)=0$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=+\infty$

On considère la fonction g définie sur $\big]0\,;+\infty\big[$ par la relation : $g(x)=\dfrac{1}{x}\cdot f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$

1. Déterminer la limite de la fonction g en 0.

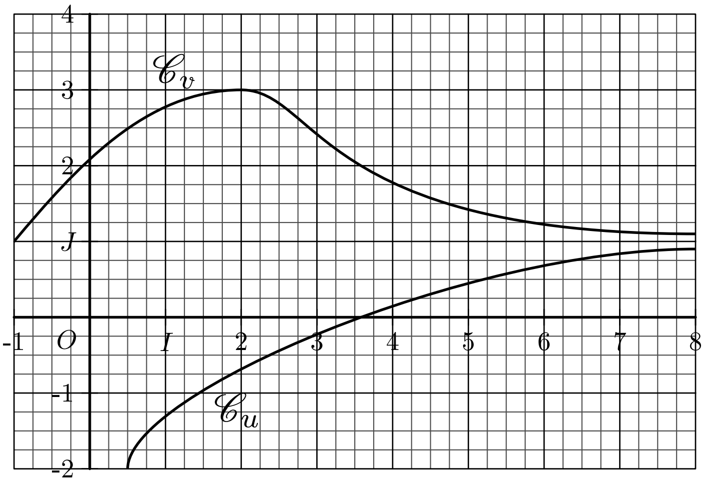
2. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g. Quelles conséquences peut-on déduire des deux questions précédentes pour la courbe $\mathscr{C}$?

20. Limites et comparaisons :

Exercice 3349

On considère les deux fonctions numériques u et v définies sur $\mathbb{R}$ dont les courbes représentatives $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ sont données dans le repère ci-dessous :



1. Dans le repère ci-dessus, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $u(x)\leqslant f(x)\leqslant v(x)$

2. Supposons que les fonctions u et v admettent les limites suivantes :

   $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}u(x)=1$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}v(x)=1$

   Faire une conjecture quand à la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 3351

On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x)=\dfrac{5}{x^2+2-\cos x}$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Etablir l'encadrement suivant :

   $\dfrac{5}{x^2+3}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{5}{x^2+1}$

   b. En déduire la valeur de la limite suivante :

   $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)$

Exercice 3354

Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x\cdot\frac{2+\cos x}{4}+\sin x$

Exercice 8662

Déterminer la valeur de la limite ci-dessous :

$\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{3+\cos x}{1+x}$

21. Fonction exponentielle et limite aux bornes :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 3614

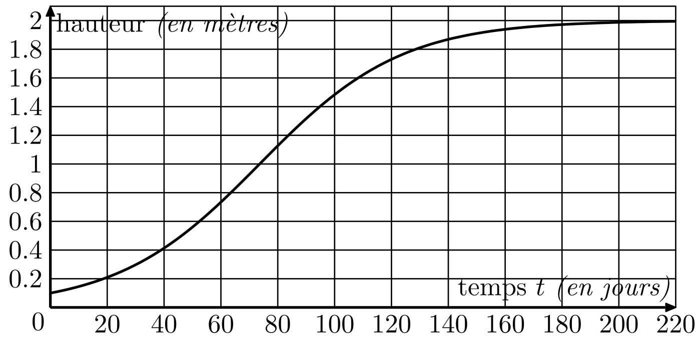
Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{-x+1}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{2x+1}$ c. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+1}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ e. $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

Exercice 5847

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.



On décide de modéliser cette croissante par une fonction logistique du type :
$$h(t) = \frac{a}{1+b\cdot\mathrm{e}^{-0{,}04\cdot t}}$$
où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure $0{,}1\,m$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de $2\,m$.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Exercice 3665

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :
$$f(x) = \frac{4\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+7}$$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Vérifier que pour tout réel x : $f(x)=\dfrac{4}{1+7\mathrm{e}^{-x}}$

2. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptôtes dont on précisera les équations.

   b. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   c. Démontrer que pour tout réel x : $0<f(x)<4$.

22. Fonction exponentielle et comparaison de croissance : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 3661

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{x}\cdot\left(x^2-x+1\right)$

c. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{-x}-1}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{x^2+1}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{-x}+3x+1$ f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}$

Exercice 3710

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :
$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$$
Le but de cet exercice est de déterminer les deux limites suivantes : $\lim\limits_{x\mapsto1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto1^+} f(x)$

1. Soit $X=\dfrac{2}{x-1}$. Prouver l'égalité :
$$\frac{2}{(x-1)^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{e}{2}\cdot X^2\cdot\mathrm{e}^X$$

2. En déduire la valeur des limites recherchées.

23. Limites par identification aux nombres dérivées : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 3662

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)$ d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}-1\right)$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)$

24. Suites et fonctions : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 3519

On se propose de montrer que les relations :

$$u_0 = -3 \quad ; \quad u_n = \frac{u_{n-1} - 8}{2 \cdot u_{n-1} - 9} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

définissent bien une suite et que cette suite est convergente.

1. On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty\,;\frac{9}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x-8}{2x-9}$$

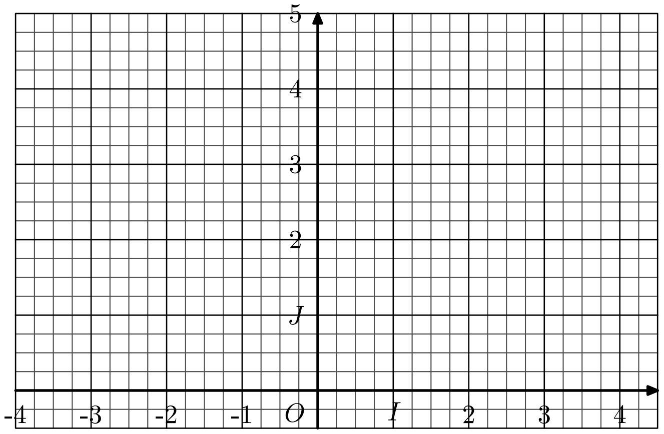
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

a. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
Citer les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
En déduire le tableau de variations de la fonction f.

c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

d. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous, ainsi que de la droite d'équation $y = x$:



e. En se servant de ce graphique, faire une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

2. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 1$.

3. Démontrer que la suite est croissante et qu'elle converge.
(On ne demande pas la valeur de la limite)

Exercice 3422

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = 1{,}4 \cdot v_n - 0{,}05 \cdot {v_n}^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 1{,}4x - 0{,}05 \cdot x^2$

a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$

2. Etablir la convergence de la suite (v_n) *(on ne demandera pas la valeur de la limite)*.

Exercice 5053

On considère la fonction f définit sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$$

1. Montrer que si $x \in [0\,;2]$ alors $f(x) \in [0\,;2]$

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évalution.*

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Etablir la convergence de la suite (u_n) *(on ne demande pas la valeur de la limite)*.

255. Partage :

Exercice 2526

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{5x+1}{-5x^2 + 4x + 1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

3. a. Justifier que les deux limites ci-dessous représentent une forme indéterminée :

$$\lim_{x \mapsto -\frac{1}{5}^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto -\frac{1}{5}^+} f(x)$$

b. Montrer que, pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(x) = -\dfrac{1}{x-1}$

c. En déduire la valeur des deux limites présentées à la question a..