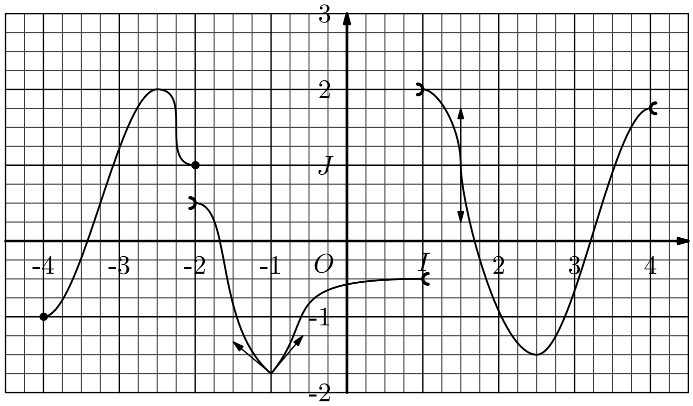
Term Spécialité/Continuité

1. Continuité en un point :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3537

Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ; cette courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 1,5 :



1. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer graphiquement l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

3. Déterminer les limites suivantes :

   a. $\lim\limits_{x\mapsto -2^-} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto -2^+} f(x)$

   c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} f(x)$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} f(x)$

4. a. Combien existe-t-il de nombres a tels que :
   $\lim\limits_{x\mapsto a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\mapsto a^+} f(x)$

   b. Quelle particularité graphique ont les points d'abscisse a vérifiant une telle condition?

Exercice 3538

La partie entière de 5,5 est 5 ; pour étendre, cette notion à l'ensemble des nombres réels *(et particulièrement aux nombres négatifs)*, on définit la partie entière d'un nombre x, qu'on note $E(x)$, de la manière suivante :

> *"$E(x)$ est le plus grand entier de l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à x"*

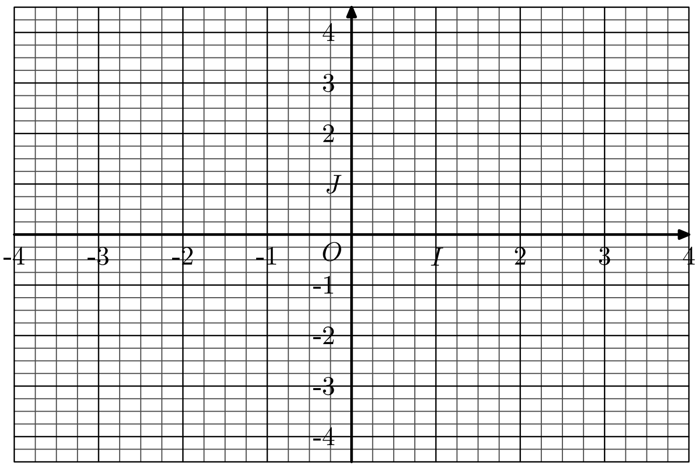
1. a. Supposons que $x=-2{,}5$, justifier que $E(x)=-3$.

   b. Compléter le tableau suivant :

x	$-4{,}5$	-4	$-3{,}9$	$-3{,}2$	-3
$E(x)$					

   c. Justifier l'encadrement suivant pour tout nombre réel x :
   $E(x) \leqslant x < E(x)+1$

2. a. On considère le repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous ; effectuer la représentation graphique de la fonction E sur $[-4\,;4]$



   b. Quelles particularités possède cette courbe?

Exercice 5825

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation :
$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

1. Justifier que la fonction h n'est pas continue en 0.

2. Déterminer les deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0^- \\ x\neq 0}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0^+ \\ x\neq 0}} f(x)$

Exercice 3539

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
   $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

   b. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)$

   c. Peut-on dire que la fonction f est continue en 0?

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x\neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$
   Justifier que la fonction g est continue en 0.

2. Tableau de signes sans le théorème des valeurs intermédiaires :

Exercice 2927

1. Soit n un entier naturel non-nul quelconque. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
$$f(x) = (1+x)^n - 1 - n\cdot x$$
Etablir le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

2. Etablir l'inégalité ci-dessous pour tout nombre x positif et tout entier naturel n strictement positif :
$$(1+x)^n \geqslant 1 + n\cdot x$$

L'inégalité établie à la dernière question s'appelle : ***Inégalité de Bernoulli***

3. Théorème des valeurs intermédiaires :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3543

On considère une fonction f qui admet le tableau de variations suivant :

x	-5		1		5		10^3
Variation de f	4	↘	-6	↗	-1 ‖ 5	↘	-13

1. Justifier que la fonction f s'annule deux fois sur son ensemble de définition.

2. Soit m un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de m du nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

Exercice 6239

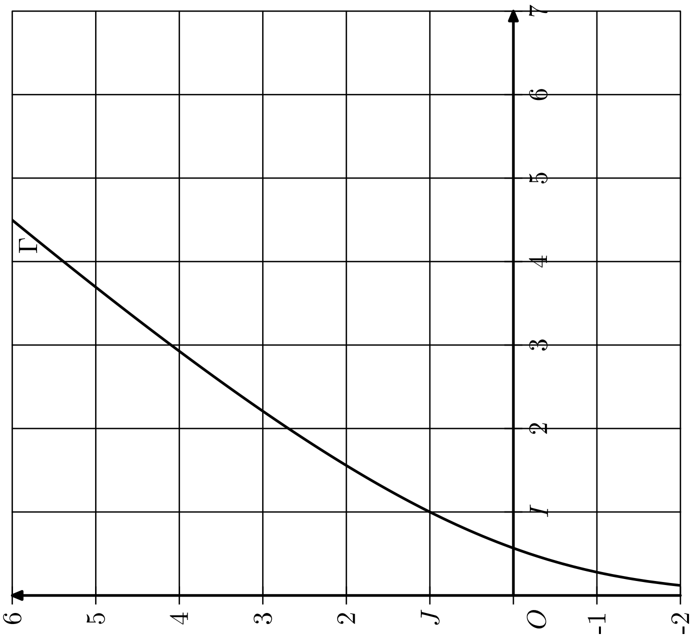
On considère la fonction f définie, continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ telle que :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = +\infty$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ du plan.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.

   On note α_n cette solution.

2. Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$. Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.



6. Etudes de fonctions :

Exercice 3544

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1}$$

Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

   b. Déterminer les limites de la fonction f en ses bornes.

   c. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes? Si oui, préciser lesquelles.

2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

3. a. Justifier que la fonction f ne s'annule qu'une fois sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

   b. Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide de votre calculatrice ; utiliser les fonctions de votre calculatrice pour déterminer une valeur approchée de ce zéro de la fonction f.

8. Etudes de fonctions avec la dérivée seconde :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3562

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x^2+1}$$

1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f, ainsi que celle de la dérivée seconde f''.

2. a. Etudier le signe de la fonction f''.

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f'.
   (Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)

3. a. Montrer que la fonction f' s'annule pour $x{=}1$ et aussi en un nombre α vérifiant l'encadrement :
   $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$

   b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'.

4. a. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   (Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)

Exercice 5812

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre réel x est définie par l'expression :

$$f(x) = 3\cdot\sqrt{x^2+1} - 2\cdot x$$

Le but de l'exercice est de montrer que la fonction f admet un maximum global et d'obtenir une valeur approchée.

1. a. Montrer que la dérivée seconde de la fonction f admet pour expression :
   $$f''(x) = \frac{3}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

   b. Etablir les deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f'(x) = -5$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f'(x) = 1$

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f'.

2. a. Justifier que la fonction f' s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$.

   b. On note α l'unique solution de l'équation : $f'(x){=}0$.
   Justifier brièvement que le nombre α appartient à l'intervalle $\big[0{,}8\,;0{,}9\big]$.

3. a. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.

   b. Justifier que la fonction f admet un minimum global qui est atteint pour $x{=}\alpha$.

Exercice 5235

Soit g la fonction définie sur $\big[0\,;+\infty\big[$ par :

$$g(x) = x\cdot\big(\mathrm{e}^x - e\big) + e - 2$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $\big[0\,;+\infty\big[$.
   Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $\big[0\;+\infty\big[$ par :
   $g''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$

2. En déduire les variations de la fonction g' sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

3. Etablir que l'équation $g'(x){=}0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. En déduire les variations de la fonction g sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

10. Etudes de fonctions avec une sous-fonction :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 3557

1. On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par :
   $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

   a. Etudier les variations de P.

   b. Montrer que l'équation $P(x){=}0$ admet une racine réelle et une seule, α, et que α appartient à l'intervalle $\big]1{,}6\,;1{,}7\big[$

2. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1.
   On considère la fonction numérique f définie sur $\mathcal{D}$ par :
   $$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$
   On désigne par $\big(\mathscr{C}\big)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à une repère orthonormé *(on prendra comme unité 4 cm)*.

   a. Etudier les variations de f *(on utilisera pour cela les résultats du 1.)*.

   b. Ecrire une équation de la droite (Δ) tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ) dans l'intervalle $\big]-1\,;1\big[$.

   c. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.
   Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (Δ) et la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

Exercice 5102

1. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $g(x) = -8x^3 + 4x - 4$

   a. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   (on utilisera des valeurs approchées pour compléter le tableau)

   b. En observant que $g(-1){=}0$, dresser le tableau de signes de la fonction g.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \frac{2x^2+1}{\big(2x^2+2x+3\big)^2}$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

   b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

(c.) Etablir que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est donnée par la relation :

$$f'(x) = \frac{-8x^3 + 4x - 4}{(2x^2 + 2x + 3)^3}$$

(d.) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
(on utilisera des valeurs approchées pour compléter le tableau)

(e.) En déduire le tableau de signes de la fonction f.

11. Dichotomie :

Exercice 3534

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = x^3 + 3{\cdot}x$

1. (a.) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   (b.) Justifier que le nombre 5 admet un unique antécédent par la fonction f ; on notera α ce nombre.

2. On pose pour valeur $a_0 = 0$ et $b_0 = 2$. On souhaite construire par la méthode de dichotomie les deux suites (a_n) et (b_n) adjacentes et convergentes vers α.

   (a.) Compléter le tableau ci-dessous :

	a_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
$n=0$						
$n=1$						
$n=2$						
$n=3$						
$n=4$						
$n=5$						

   (b.) Avec quelle précision obtient-on la valeur de α à l'aide du tableau.

